



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

~~нужно~~ пусть  $a_{10} \neq 0$ , тогда:

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$(q^2)^4 = q^8 = \frac{(2-x)^4}{((25x+34)(3x+2))^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$m.k. a_{10} \neq 0 \Rightarrow 3x+2 \neq 0 \Rightarrow \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} = 1$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$((2-x)^2 - 25x - 34)((2-x)^2 + 25x + 34) = 0$$

$$4 - 4x + x^2 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 30$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 25x + 34 = 0$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 38 = 441 - 152 = 289$$

$$x_{3,4} = \frac{-21 \pm 17}{2} = -2$$

проверка:

$$x = -1$$

$$a_{10} = \sqrt{9 \cdot (-1)} \quad \phi$$

$$x = 30$$

$$a_{10} = \sqrt{789 \cdot 92} \quad ; \quad a_{10} \cdot q^2 = a_{12} \quad \phi$$

$$a_{12} = -28$$

$$(>0) (>0) (<0)$$

$$a_{18} > 0$$

$$x = -2$$

$$a_{10} = \sqrt{-16 \cdot (-4)} = 8$$

$$x = -2; \text{удовлетворяет}; q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_{12} = 4$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{-16}{(-4)^3}} = \frac{1}{2}$$

$$x = -19$$

$$a_{10} = \sqrt{(>0)(>0)} \quad a_{12} > 0 \Rightarrow x = -19; \text{удовлетворяет}$$

$$a_{18} > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$  (продолжение)

2) пусть  $\alpha_i = 0$ , тогда все  $\alpha_k; k \in \mathbb{N}$ ;  $\alpha_k = 0$ , т.к.  $\alpha_k = \frac{\alpha_i}{d^k}$

$\Rightarrow 2 - x = \alpha_{12} = 0 \Rightarrow x = 2$ ; подставляем в  $\alpha_{10} = \sqrt{84 \cdot 8} \neq 0$   
противоречие.

Ответ:  $x = -2$ ;  $x = -19$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$  (продолжение)

$$2) \begin{cases} a - b = 1 \\ 8 = 2ab \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{b} \end{cases}$$

$$\frac{4}{b} - b = 1$$

$$-b^2 - b + 4 = 0$$

$$b^2 + b - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\sqrt{3-x} = b = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\Downarrow b = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad a = \frac{8}{\sqrt{17} - 1}$$

$$b = \sqrt{3-x} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad a = \sqrt{6+x} = \frac{8}{\sqrt{17} - 1}$$

$$3-x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} \quad 6+x = \frac{64}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$x = \frac{12 - 18 + 2\sqrt{17}}{4} = x = \frac{64 - 108 + 12\sqrt{17}}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$\frac{2\sqrt{17} - 6}{4} = \frac{12\sqrt{17} - 44}{18 - 2\sqrt{17}}$$

$$36\sqrt{17} - 68 - 108 + 12\sqrt{17} = 48\sqrt{17} - 176$$

$\Rightarrow$  данные  $a$  и  $b$  удовлетворяют

$$x = \frac{2\sqrt{17} - 6}{4} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

Ответ:  $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$

$$x = -\frac{3 + 2\sqrt{17}}{2}$$

$$y = 18$$

$$z = 0$$

$$y = 18$$

$$z = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 (продолжение)

$$1) \begin{cases} a - b = -2 \\ -2 + 7 = 2ab \Rightarrow ab = \frac{5}{2} \Rightarrow b \neq 0; a = \frac{5}{2b} \end{cases}$$

$$\frac{5}{2b} - b = -2$$

$$5 - 2b^2 + 4b = 0$$

$$2b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$D = 16 + 40 = 56$$

$$b = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

~~$$b = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{14}}{4} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$~~

$$a = \frac{5}{2 \pm \sqrt{14}}$$

~~$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$~~

~~$$b = \sqrt{3-x} > 0 \Rightarrow b = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}$$~~

$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$

~~$$b = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}; a = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$~~

$$\sqrt{x+6} = \frac{5}{2 + \sqrt{14}}$$

$$b = \sqrt{3-x} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}$$

$$x+6 = \frac{25}{4+14+4\sqrt{14}}$$

$$3-x = \frac{4+14+4\sqrt{14}}{4}$$

$$x = \frac{25 - 108 - 24\sqrt{14}}{18 + 4\sqrt{14}} = x = \frac{12 - 18 - 4\sqrt{14}}{4} = \frac{-3 - 2\sqrt{14}}{2}$$

$$\frac{-83 - 24\sqrt{14}}{4\sqrt{3+\sqrt{14}}} = \frac{-6 - 4\sqrt{14}}{2\sqrt{3+\sqrt{14}}}$$

$$-83 - 24\sqrt{14} \neq -\frac{27}{2} - \frac{18}{2}\sqrt{14} - 6\sqrt{14} - 4 \cdot 14 = -83 - 24\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{6 + 4\sqrt{14}}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2}: \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \\ \text{заметьте, что правая часть} \leq 20 \end{array} \right.$$

оценим левую часть:

$$|y+2| + 2|y-18| \quad \begin{array}{ccc} 1) & 2) & 3) \\ -2 & & 18 \end{array} \rightarrow y$$

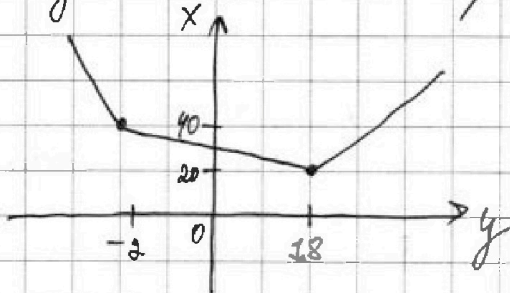
$$1) -y-2-2y+36 = 34-3y \geq 34-3(-2) = 40$$

$$2) y+2-2y+36 = 38-y \geq 20 = 38-18$$

$$3) y+2+2y-36 = 3y-34 \geq 54-34 = 20$$

$\Rightarrow$  левая часть  $\forall$  уравнения  $\geq 20 \Rightarrow$  равенство достигается,

когда левая = 20 = правая  $\Rightarrow z=0; y=18$



$$\text{I уравнение системы: } \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\underbrace{\sqrt{x+6}}_a - \underbrace{\sqrt{3-x}}_b + 7 = 2\sqrt{\underbrace{18-3x-x^2}_{ab}}$$

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab & (1) \\ a^2+b^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$$\text{вычтем из (2) - (1): } a^2 - 2ab + b^2 = 2 - (a-b)$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$\overset{t}{(a-b)^2} + t - 2 = 0$$

$$t_1 = -2; t_2 = 1.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$p \cos^3 x - 3p \sin^2 x \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3p(1 - \cos^2 x) \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0.$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 4 = 0.$$

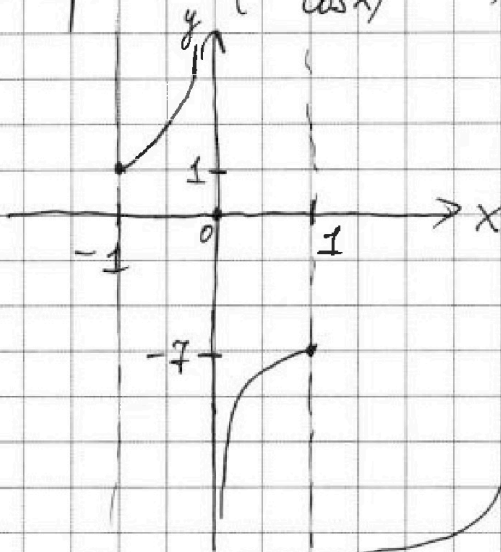
$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0.$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0; \cos x \neq 0, \text{ иначе } 4 = 0$$

$$(p-1) = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3; f(x) = 1 - \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^3, \text{ где } x \in [-1; 1].$$



~~х=0~~ - асимптота

$$\Rightarrow p \in [-\infty; -7]; [1; +\infty)$$

$$\left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 = 1 - p.$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$x = \pm \arccos \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } p \in [-\infty; -7]; [1; +\infty); x = \pm \arccos \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





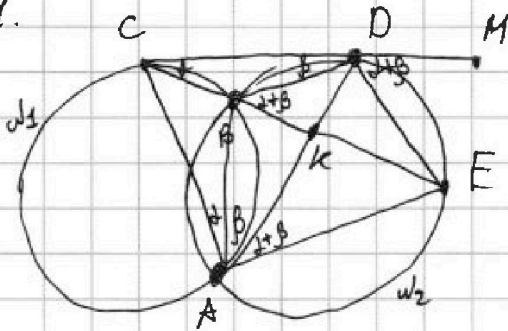
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№9.



Доказано:  $CD$  - кас.

$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

Найти:  $\frac{ED}{CD}$

Решение:

пусть  $\angle BAD = \beta$ ;  $\angle BAC = \alpha$ , тогда:  
 $\angle BDC = \angle BAD = \beta$ ;  $\angle DCB = \angle BAC = \alpha$  (углы между хордой и кас.)

$$\angle DBE = \angle BDC + \angle BCD = \alpha + \beta = \angle DAE \text{ (открывается на } DE) \Rightarrow$$

$\angle CAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AK$  - биссектриса в  $\triangle ACE$ .  $\Rightarrow$  по ЗСБ:

$$\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

$$\angle DAE = \angle MDE \text{ (хорда, кас.)} = \angle CAD \Rightarrow \angle ADM - \angle CAD = \angle ADE =$$

$$= \angle ACD \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{CA}{DA} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow DA^2 = CA \cdot AE =$$

$$= 7y \cdot 20y \Rightarrow DA = y\sqrt{140}; \quad AC = 7y; \quad AE = 20y$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{CA}{DA} \text{ (из этих же } \sim \Delta) \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{DA}{CA} = \frac{\sqrt{140}}{7} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

Ответ:  $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$



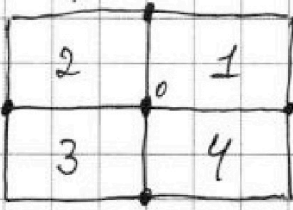
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.  
1) Сначала рассмотрим множества, для которых выполняется условие задачи только в 2-х клетках. Тогда разделим наш прямоугольник средними линиями на 4 равных прямоугольника.



Средние линии пройдут по границам клеток, так как стороны исходного прямоугольника — четные. Т.О. — центр. Тогда наше мн-во из 8 кв. разобьется на 2 по 4 клетки.

Число клеток в маленьких прямоугольниках =  $\frac{500 \cdot 120}{4} = 15000$  клеток.

Заметим, что выбор 4-х клеток в одном из маленьких  $\square$ ,

7 3 способа составить мн-во симметричное (выбор 4-х в  $\square$  №1; можно выбрать 4 клетки в  $\square$  №2, №3, №4 (или)).

Число способов выбрать 4 клетки в мал.  $\square = C_{15000}^4$ ; так можно

выбрать в 4  $\square$  т.е. составить мн-во и каждое из них мы посчитали 2 раза  $\Rightarrow$  таким способом  $\frac{4 \cdot C_{15000}^4 \cdot 3}{2}$

$= 6 C_{15000}^4$

Теперь рассмотрим, когда может выполняться 2 симметрии одновременно.

Пусть центральная + еще какая-то, но тогда (~~какая-то~~) ~~какая-то~~ также будет выполняться и 3-ий вид симметрии, т.к.  $8 \nmid 3$   $\Rightarrow$  если выполняется центральная + еще что-то, то выполняются все 3.

Пусть выполняется 2 средние, но тогда выполняется и центральная симметрия, т.к. ~~какая-то~~ композиция 2 симметрий = симметрия ~~какая-то~~  $\Rightarrow$  если выполняется не одна симметрия, то выполняются все 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ в каждом из мелких  $\square$  размещаем по 2 клетки  $C_{15000}^2$ ; все остальное восстанавливается однозначно.

3) теперь, когда выполняются одиночные симметрии, но клетки смежные ~~в~~ в 4 мелких  $\square$  из 4 клеток

для каждого такого выбора  $\exists$  по 2 способа и каждый из них считаем 2 графа.  
 $\Rightarrow \frac{2 \cdot C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3}{2} + \frac{2 \cdot C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2}{2} + \frac{2 \cdot C_{15000}^3 \cdot C_{15000}^1}{2}$

сложим все получившиеся суммы:

$$6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + (C_{15000}^2)^2$$

~~$$\frac{6 \cdot 15000!}{4! \cdot 14996!} + \frac{15000!}{2! \cdot 14998!} + \frac{2 \cdot 15000! \cdot 15000!}{1 \cdot 3! \cdot 14999! \cdot 14997!} + \frac{(15000!)^2}{2! \cdot 14998!}$$

$$\frac{15000 \cdot 14997}{4} + \frac{15000 \cdot 14999}{2} + \frac{15000^2}{2} \cdot 15000 \cdot 15000$$~~

Ответ:  $6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 (1 + C_{15000}^2) + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a < b$$

$$b - a \div 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a^2 + b = 1000$$

т.к.  $(a - c)(b - c) = p^2$ , то  $\exists 6$  вариантов переставить делители.

- 1)  $\begin{matrix} -p & -p \\ p & p \end{matrix} \Rightarrow a - c = b - c \Rightarrow a = b$  (противоречие  $\neq$  условию)
- 1)  $\begin{matrix} 1 & p^2 \\ p^2 & 1 \end{matrix} \Rightarrow a = c + 1; b = c + p^2$   $a < b$  (✓)
- 2)  $\begin{matrix} p^2 & 1 \\ -1 & -p^2 \end{matrix} \Rightarrow a = c + p^2; b = c + 1; p^2 > 1$  (1 условие) (✓)
- 2)  $\begin{matrix} -1 & -p^2 \\ -p^2 & -1 \end{matrix} \Rightarrow a = c - 1; b = c - p^2; c - 1 > c - p^2$  (1 усл.) (φ)
- 2)  $\begin{matrix} -p^2 & -1 \\ -1 & -p^2 \end{matrix} \Rightarrow a = c - p^2; b = c - 1$  (✓)

1)  $a = c + 1; b = c + p^2$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2 + c + p^2 = 1000$$

$$a^2 + a - 1 = 1000 - p^2$$

мин.  $a_0 = -\frac{1}{2}$

p	p <sup>2</sup>	p <sup>2</sup> -1	
2	4	3	X
3	9	8	✓
5	25	24	X
7	49	48	
11	121	120	
13	169	168	φ
17	289	288	
19	361	360	
23	529	528	
29	841	840	
31	961	960	

! следующий  $p^2 > 1000 + \frac{5}{4}$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$\text{левая часть} \geq -\frac{5}{4}$$

~~999~~  
~~992~~

из  $b - a \div 3 \Rightarrow c + p^2 - c - 1 \div 3 \Rightarrow p^2 - 1 \div 3 \Rightarrow$  из таблицы  $p = 3$

$$a^2 + a - 1 = 991$$

$$a^2 + a - 992 = 0$$

$$(a - 31)(a + 32) = 0$$

$$a = 31$$

$$c = 30$$

$$b = 30 + 9 = 39$$

$$a = -32$$

$$c = -33$$

$$b = -33 + 9 = -24$$

2)  $a - c = -p^2; b - c = -1$   $b - a = c - 1 - c + p^2 \div 3$

$$a = c - p^2; b = c - 1$$

$$p^2 - 1 \div 3$$

если  $p \neq 0$ , то  $(p - 1)(p + 1)$  может быть сравнимо с  $3$  только одно из них  $\div 3$ , т.к. остатков всего 3.

$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение).

$$a = c - 9; \quad b = c - 1$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0.$$

$$D = 289 + 3680 = 3969 = 63^2$$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} = 40$$
$$= \frac{-46}{2} = -23$$

$$(c - 40)(c + 23) = 0$$

$$c = 40$$

$$c = -23$$

$a = 31$
$b = 39$
$c = 40$

$a = -32$
$b = -24$
$c = -23$

Ответ:

$a$	$b$	$c$
31	39	40
-32	-24	-23
31	39	30
-32	-24	-33



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2}$$
$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

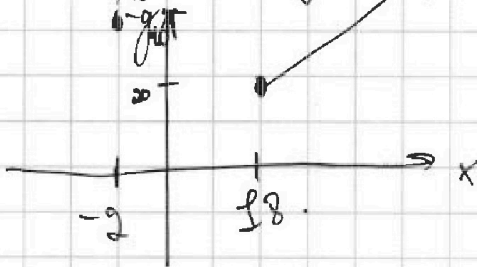
$$|a| + 2|b| = \sqrt{(a-b)-z^2}$$

$$|z| \leq 20$$

$$x > -6.$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$|x+2| + 2|x-18| = y.$$



$$-x-2-2x+36 = -3x+34 \geq 40.$$

$$x+2-2x+36 = 38-x \geq 20.$$

$$x+2+2x-36 = 3x-34 \geq 20.$$

$$z = 0. \quad y = 18$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

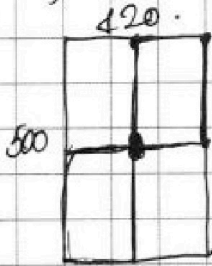
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a-b+7=2\sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2=9$$

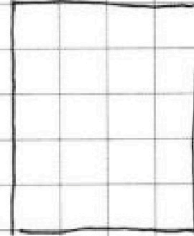
$$(a+b)^2=16+a-b$$



8 кл.

$$30 \cdot 500 = 15000$$

$$C_{15000}^4 + C_{15000}^4$$



$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$a-b+7=2\sqrt{ab}$$

$$a^2+b^2=9$$

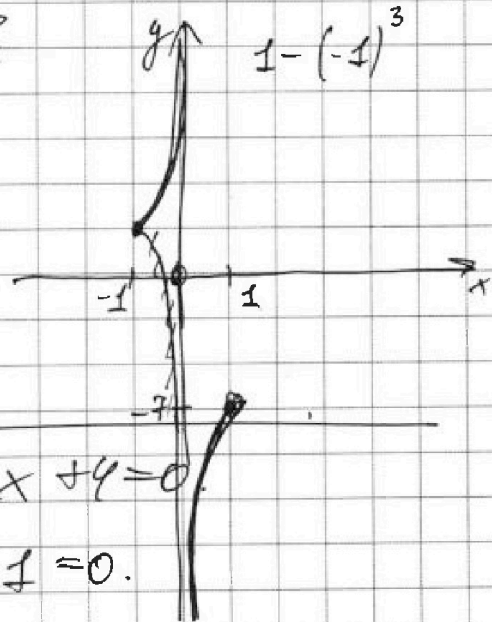
$$(a-b)^2=2-(a-b)$$

$$t^2+t-2=0$$

$$1+8=9$$

$$(t-1)(t+2)=0$$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$



$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$p-1 = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3$$

$$p = 1 - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3$$

$p \in$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x}$  (пер.)

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$x+6 + 3-x + \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = (\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x})^2$$

$$\cancel{a-b} + 16 = (a+b)^2$$

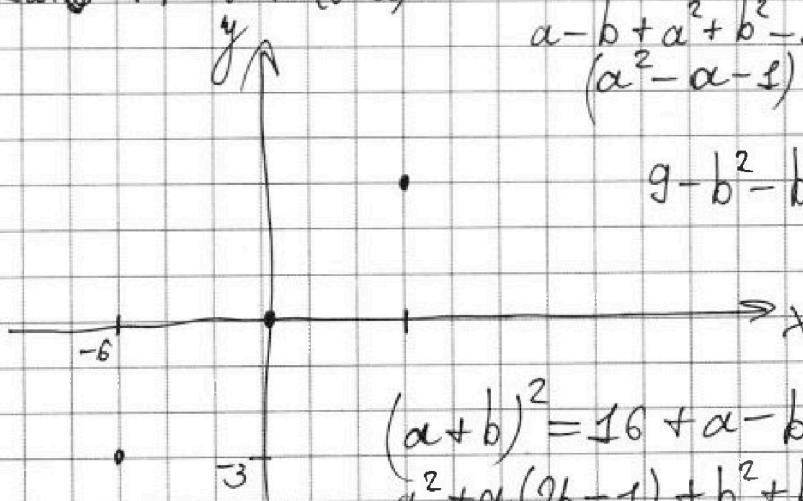
$$(a+b)^2 - (a+b) - 16 + 2b = 0$$

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab \\ a^2+b^2=9 \end{cases}$$

$$a-b = 2ab - 7 \leq 9 - 7 = 2$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}} \leq 2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+9} + 7 = 2\sqrt{a(9-a)}$$



$$a-b+a^2+b^2-2 = 2ab$$

$$(a^2-a-1) + (b^2-b-1) = 2ab$$

$$9-b^2-b+7 = 2ab$$

$$a = \frac{16-b^2-b}{2b}$$

$$a = \frac{8}{b} - b - \frac{1}{2}$$

$$(a+b)^2 = 16 + a - b$$

$$a^2 + a(2b-1) + b^2 + b - 16 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 - 4b + 64 = 64 - 8b$$

$$a = \frac{1-2b \pm \sqrt{8(8-b)}}{2}$$

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x+49} + 14\sqrt{x} - 14\sqrt{9-x} - 2\sqrt{a(9-a)} = 4(a(9-a))$$

$$42 + 13\sqrt{x} - 13\sqrt{9-x} =$$



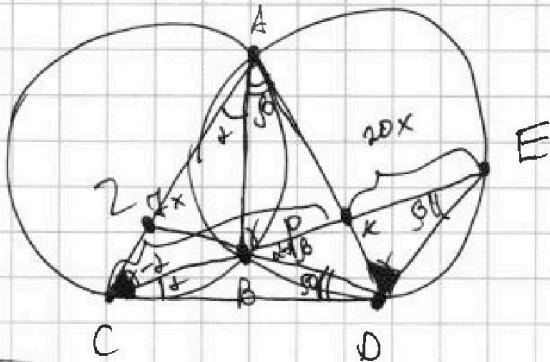
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{a^2 - b^2 + 7} = 2\sqrt{b}$$

$$\frac{\sin \angle ECD}{\sin \angle CED} = ? \sqrt{a^2 - (1 - 2\sqrt{b}) + \frac{1}{2}}$$

$$x(1 - 2\sqrt{b}) + 6\frac{1}{2} = 0.$$

$$\triangle CZD \sim \triangle DKE$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{ZD}{KE} = \frac{(1 + 2\sqrt{a})(1 - 2\sqrt{b})}{-13}$$

$$CB \cdot 27x = CD^2$$

$$CD = \frac{ZD \cdot DE}{KE}$$

$$CB \cdot 27x = \frac{(ZD \cdot DE)^2}{400x^2}$$

√f.

$$a_{10} = \sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$$

$$a_{12} = 2 - x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25 + 34}{(3x + 2)^3}}$$

~~$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$$~~
~~$$a_{12} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{25 + 34}{(3x + 2)^3}}$$~~

$$\frac{a_{12}}{a_{10}} = q^2 = \frac{2 - x}{\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = q^8 = \frac{1}{(3x + 2)^2}$$

$$a_{10} = \sqrt{441 \cdot \frac{21}{21} \cdot \frac{49}{49}}$$

$$\frac{(2 - x)^4}{(25x + 34)^2 (3x + 2)^2} = \frac{1}{(3x + 2)^2}$$

$$(2 - x)^4 = (25x + 34)^2$$

$$(4 - 4x + x^2)^2 = 25x + 34$$

~~$$x^4 + 16x^2 + 16 - 32x + 8x - 8x^3 - 25x - 34 = 0.$$~~

~~$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 57x - 18 = 0.$$~~

$$(4 - 4x + x^2) = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x + 1)(x - 30) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 30.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \frac{1}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√1.

{a<sub>n</sub>} - геом. пр.

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{18} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}} - 32 \cdot 31$$

$$a_{10} \cdot a_{18} = \sqrt{\frac{x+18}{3x+2}} = a_1 \cdot q^8$$

$$a_{10} \cdot q^8 = a_{18} \cdot (1+4 \cdot 9 \cdot 92)$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

$$a_{18} = a_1 \cdot q^{17}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

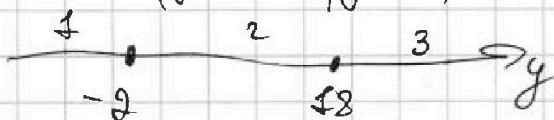
$$\begin{array}{r} 39699 \\ \times 36 \\ \hline 23819 \\ \times 36 \\ \hline 771 \\ \times 36 \\ \hline 277 \\ \times 36 \\ \hline 99 \\ \times 36 \\ \hline 351 \end{array}$$

√2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

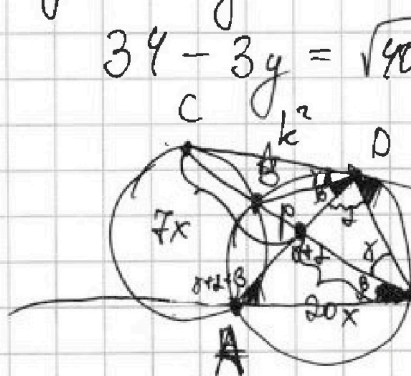
$$2\sqrt{y-3x-x^2+2} + \sqrt{3-x-2z} \geq 7$$

$$(y+2) + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$



$$-y-2-2y+36 = \sqrt{400-z^2}$$

$$34-3y = \sqrt{400-z^2}$$



$$p^2 - 1 \neq 3$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{p^2 - 1}{3}$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=-1 \\ a=c-p^2 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$k^2 = (7x-p)(27x)$$

$$k^2 = 189x^2 - 27px$$

Δ DME ~ Δ AMD

DM

$$d^2 + a - (1001 - p^2) = 0$$

$$1 + 4004 - 4p^2 = k^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

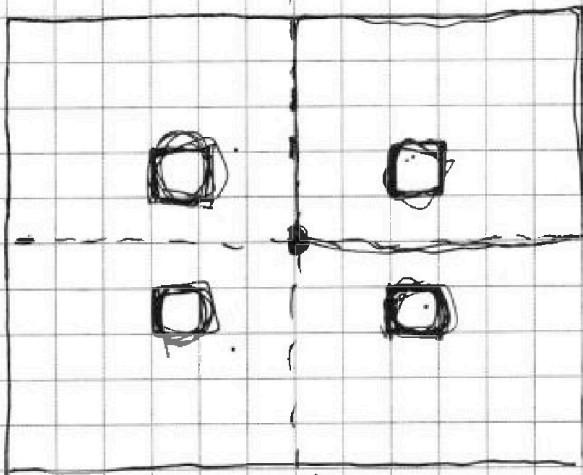


1  2  3  4  5  6  7

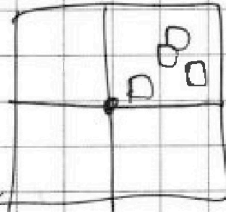
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√5.



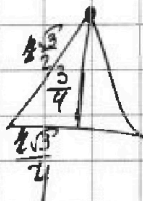
$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 81 \\ \hline \uparrow 31 \\ 93 \\ \hline 961 + 89 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline + 64 \\ \hline 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\frac{C_{15000}^4 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 6 C_{15000}^4 + C_{15000}^2 = 6(15000)!$$

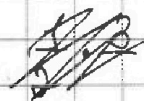
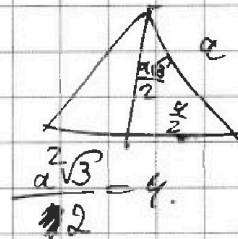
√7.



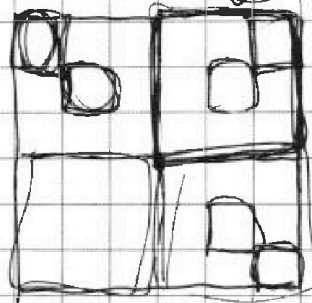
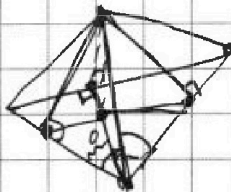
S=4.  
 $a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$a = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$



$$\frac{C_{15000}^4 \cdot 3 \cdot 4}{2} = 6 C_{15000}^4$$



$C_{15000}^2$





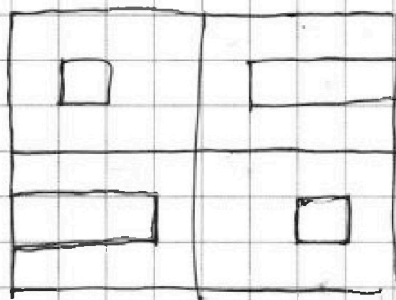
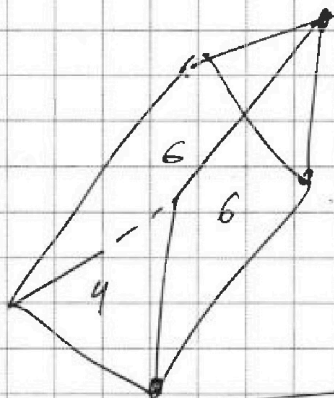
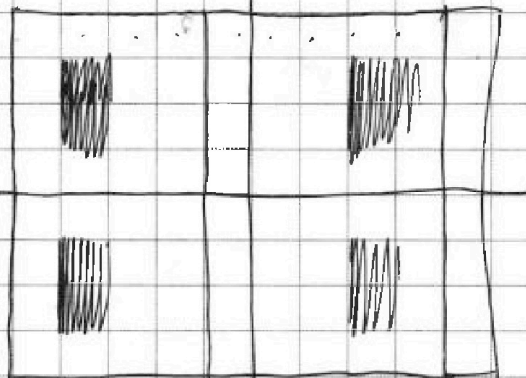
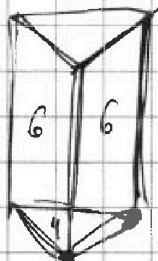
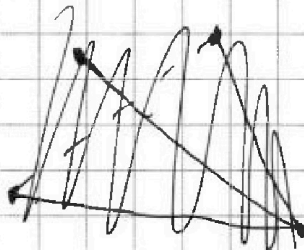
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{7}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$

~~$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0.$$~~

$$p \cdot \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0. \quad \frac{h}{b} - \frac{b}{h} + 8f$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0. \quad \frac{b}{x} - \frac{b}{x} = \frac{b}{x}$$

$$p-1 = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 \quad x - x = 8f$$

$$|p = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3| \quad \Delta = 1 + 4004p^2$$

$$\cos x \in [-1; 1].$$

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$1000 - a^2 - a + 1 = p^2$$

$$1001 - a^2 - a = p^2$$

$$\frac{1}{2} \quad 1000 \geq p^2$$

√2.

$$|y+2| + 2|y-18| \leq 20$$

$$-2-y-2y+36 \leq 20$$

$$34-3y \leq 20$$

$$3y \geq 14$$

$$b-c > a-c$$

$$b > a$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a < b$$

$$b-a \times 3$$

$$(a-c)(b-c) = p$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$\sqrt{a}(1-2\sqrt{b}) + \frac{1}{2}(1-2\sqrt{b})$$

$$2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + 1 - \sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{a}(1-2\sqrt{b}) - (1-2\sqrt{b})$$

$$a-c = b-c$$

$$a = b$$

~~$$a-b = a^2$$~~

$$b-c = p^2, a-c = 1$$

$$C = b - 1$$

$$1000 - a^2 > a$$

$$a(a+1) < 1000$$

$$b = 1000 - a^2$$

$$a^2 + a - 999 - p^2 = 0$$

$$1 + 4(999 + p^2)$$

$$(2\sqrt{a}+1)(1-2\sqrt{b}) = -13$$

$$(2\sqrt{a}+1)(2\sqrt{b}-1) = 13$$

$$|b-a+1 = p^2|$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -6$$

$$3 - x - 22 \geq 0$$

$$0 > (3-x)/(9+x)$$

$$0 > 8x - x^2 + 2x$$

$$0 < x - x^2 - 8x$$

$$(9x^2 - 8x)$$

$$9x^2 = 8x + 8$$

$$22 \leq 3 - x$$

$$2 \leq \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$$

$$y + 2 \geq 3x + x^2$$

$$-20 \leq z \leq 20$$

$$-\frac{3}{2} = -1.5$$

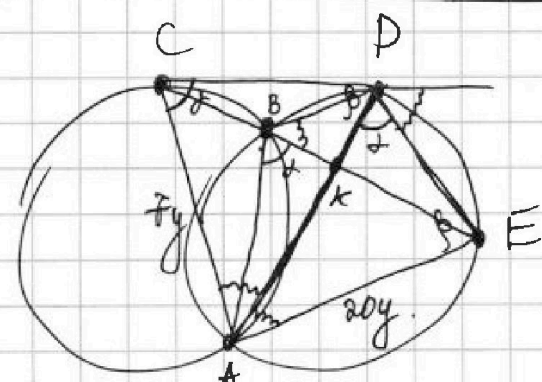
49 25  
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31

$$b + 1 - a = p^2$$

$$b - a + 1 = p^2$$

$$a^2 + b = 4000$$

$$b - a \nmid 3$$



$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$a^2 + a - 1 + p^2 = 4000$$

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{20y}{\sin \alpha}$$

$$\frac{20y \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{7y \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{20}{7} \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha$$

$$a^2 + a - 1 = 4000 - p^2$$

$$b - c = p^2$$

$$a - c = 1$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + AD + 40 = 0$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$$

$$\cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$a^2 + a - 1 \leq 1000$$

$$a^2 + a - 1001 \leq 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3(p+4) \cos x + 40 = 0$$