



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть существует такая геометрическая прогрессия  $(a_n)$ .  $(a_{n+1} = q \cdot a_n)$  и  $a_7 = q^6 \cdot a_1$ ,  ~~$q^{12} \cdot a_1$~~

$$a_{13} = q^{12} \cdot a_1, \quad a_{15} = q^{14} \cdot a_1$$

$$\text{Тогда } q^6 \cdot a_1 = a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad q^{12} \cdot a_1 = a_{13} = 5-x,$$

$$q^{14} \cdot a_1 = a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

~~$$\text{и } q^{20} \cdot a_1^2 = a_7 \cdot a_{15} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}}$$~~
~~$$((13x-35)(x+1) \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{13x-35}{x+1} \geq 0 \quad \text{и} \quad x \neq -1)$$~~

$$\text{и } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = a_1 \cdot q^{12} = 5-x$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8 = a_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\underline{1} \text{ и } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0, \text{ тогда } 13x = 35, \text{ и } x = \frac{35}{13}$$

$$\text{и тогда } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 = \neq 0, \text{ и } 5-x=0, \text{ и } x=5$$

$5 \neq \frac{35}{13}$ , и. значит случаи невозможны

$$\underline{2} \text{ и } \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \neq 0, \text{ тогда } q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4} =$$

$$= \sqrt[4]{(x+1)^4} = \sqrt[4]{(x+1)^2} = \sqrt[4]{|x+1|^2} = \sqrt{|x+1|}, \quad q \neq 0$$

$$\text{и } q^6 = (\sqrt{|x+1|})^6 = (\sqrt{|x+1|})^3 = |x+1| \cdot \sqrt{|x+1|}$$

и



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) x = -5 \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{-65-35}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-64}} = \frac{10}{4 \cdot 2} = \frac{5}{4},$$

$$5-x = 10, \quad \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{(-100) \cdot (-4)} = 2 \cdot 10 = 20$$

Это значит значит. прогрессии  $(a_n)$  при  $q = \sqrt{2}$ ,  $a_1 = \frac{5}{32}$

$$(a_7 = a_1 \cdot q^6 = \frac{5}{32} \cdot 8 = \frac{5}{4}, \quad a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = \frac{5}{32} \cdot 2^6 = 10,$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = \frac{5}{32} \cdot 2^7 = 20) \quad (+)$$

$$2) x = 2 \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{26-35}{3^3}} = \sqrt{-\frac{9}{27}} \quad (-)$$

$$3) x = 3 \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{39-35}{4^3}} = \sqrt{\frac{4}{64}} = \frac{1}{4}, \quad 5-x = 2,$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$$

Это значит значит. прогрессии  $(a_n)$  при  $q = \sqrt{2}$ ,

$$a_1 = \frac{1}{32} \quad (a_7 = a_1 \cdot q^6 = \frac{1}{32} \cdot 8 = \frac{1}{4}, \quad a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = \frac{1}{32} \cdot 2^6 = 2,$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = \frac{1}{32} \cdot 2^7 = 4) \quad (+)$$

Ответ:  $\{-5; 3\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(y)$  имеет корни на  $[-1; 1]$  тогда и только тогда (из непрерывности), когда на  $[-1; 1]$  её минимальное значение  $\leq 0$ , а максимальное  $\geq 0$ .

~~максимальное значение  $\geq 0$~~  для  $[-1; 1]$ :

$$f(y)_{\max} = 10 - p, \quad f(y)_{\min} = -4 - p$$

и уравн \* имеет корни ~~тогда и~~ тогда и

только тогда, когда 
$$\begin{cases} 10 - p \geq 0 \\ -4 - p \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 10 \\ p \geq -4 \end{cases}$$

т. е. нам подходят  $p \in [-4; 10]$

Ответ:  $p \in [-4; 10]$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad (*)$$

$$\text{и. } 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$\text{и. } 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0$$

Пусть  $f(y) = 4y^3 + 6y^2 + 3y - 3 - p$ , тогда  $\cos x$  -  
- корни уравн.  $f(y) = 0$ ,  $\text{и. макс. уравн. } *$

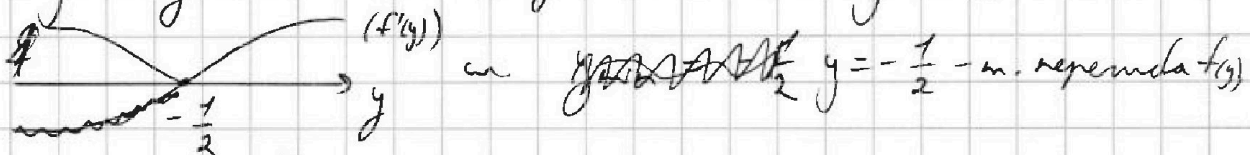
имеет решение тогда и только тогда,  
когда  $f(y) = 0$  имеет решение  $y_0: -1 \leq y_0 \leq 1$ ,

$$\text{и. к. } -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 - p = -4 - p, \quad f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 - p = 10 - p$$

$$f'(y) = 12y^2 + 12y + 3, \quad \text{и. } f'(y) = 0 \Leftrightarrow 12y^2 + 12y + 3 = 0$$

$$4y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (2y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 - p = -\frac{1}{2} - 3 - p = -3,5 - p$$

Для  $[-1; 1]$  макс. и мин.  $f(y)$  достигается

или в границах отрезков или в экстремумах.

$$-4 - p < -3,5 - p < 10 - p, \quad \text{и. } f(-1) < f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(1)$$

$$\text{и. } \forall y \in [-1; 1]: -4 - p \leq f(y) \leq 10 - p$$

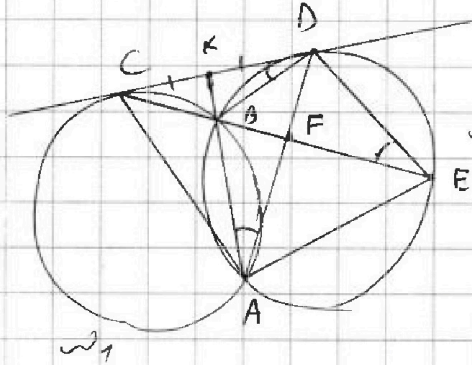


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$AB \cap CD = K, AD \cap CE = F$$

$$CK^2 = KB \cdot KA = KD^2 \text{ как секущая точки } \omega_1 \text{ и } \omega_2$$

$ABDE$  - вписанный четырехугольник,  $\angle DEB = \angle DAB$  как впис. угол на одну дугу

$\angle CDB = \angle DEB$ , как угол между кас. и хордой

Пусть  $CF = 3x$ , тогда  $FE = 10x$ , а  $CE = 13x$

так  $CD^2 = CB \cdot CE$  как секущая точки  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $\omega_1$

$$CB = \frac{CD^2}{13x}$$

$\angle DCE$  - острый,  $\angle CDB = \angle DEC$ ,  $\omega_1$   $\triangle CBD \sim \triangle CDE$  по I признаку

$$\omega_1 \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{DE} = \frac{CB}{CD}, \omega_1 \frac{CD}{DE} = \frac{BD}{BD} = \frac{CD^2}{CE \cdot BD}$$

$\angle AKD$  - острый,  $\angle KDB = \angle KAD$ ,  $\omega_1$   $\triangle KDB \sim \triangle KDA$  по I признаку

$$\omega_1 \frac{BD}{AD} = \frac{KD}{KA}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

когда удобно  $C_{100 \cdot 250}^4 + C_{200 \cdot 125}^4 - C_{100 \cdot 125}^2$

(т.к. слоты  $C_{100 \cdot 250}^4$  и  $C_{200 \cdot 125}^4$  мы считаем  
прямоугольниками симметричные относительно центра грани).

$$\text{Получаем ответ } C_{100 \cdot 250}^4 + C_{200 \cdot 125}^4 - C_{100 \cdot 125}^2 = \\ = C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - C_{12500}^2 = 2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$$

Ответ:  ~~$2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$~~   $C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - C_{12500}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрии центра прямоугольника.

В. ~~до~~ можно сказать, что у нас всего 2 операции: симметрии относительно одной из средних линий, т.к. симметрия относительно центра представляется их комбинацией. Прямоугольников симметричных относительно горизонтальной средней линии  $C_{100 \cdot 250}^4$ , т.к. мы красим 4 клетки в  $\text{III}$  прямоугольнике  $100 \times 250$  (см. рис. на стр. 1), а другой прямоугольник красится из симметрии. Аналогично прямоугольников симметричных относительно вертикальной средней линии  $C_{200 \cdot 125}^4$ . А прямоугольников симметричных относительно центра  $C_{100 \cdot 125}^2$ , т.к. мы красим 2 клетки в  $\text{III}$  прямоугольнике  $100 \times 125$ , а остальные 3 прямоугольника  $100 \times 125$  красятся из симметрии. В. прямоугольников удвоителя

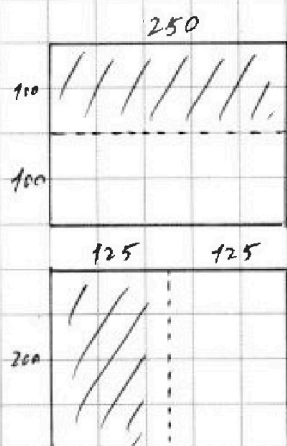


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



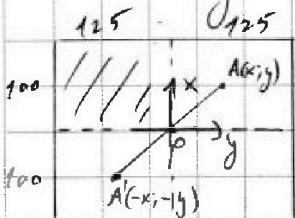
Заметим, что средняя линия  
прямоугольника делит его на

на 2 прямоугольника  $100 \times 250$ , или  
на 2 прямоугольника  $100 \times 125$ .

Трапециевидник - это параллелограмм

и его средняя линия пересекается в т. пересечения его диагоналей, и в его центре

(то е. в центре параллелограмма). Средняя линия



прямоугольника перпендикулярна  
оси. И если точка  $A(x; y)$

была симметрирована относительно

одной из средних линий, то сначала одна из ее  
координат принимает знак, а потом другая.

и  $A(x; y) \rightarrow A(-x; -y)$ . П.к. мы выбрали точку

пересечения средних линий, как начала ко-

ординат, а любая точка  $A(x; y)$  переходит

в т.  $A'(-x; -y)$  при симметрии относительно

точек пересечения средних линий, т.е. это





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) a+b^2 = c-1 + (c-9)^2 = c-1 + c^2 - 18c + 81 = c^2 - 17c + 80 = 560$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 17c - 480 = 0, \quad D = 17^2 + 4 \cdot 480 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$= 1600 + 609 = 2209 = 47^2, \quad \Leftrightarrow c = \frac{17 \pm 47}{2} \quad \begin{cases} c = -15 \\ c = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 32 \\ a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -15 \\ a = -16 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{+} 47 \\ \times 47 \\ \hline + 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$(2) a+b^2 = c+9 + (c+1)^2 = c+9 + c^2 + 2c + 1 = c^2 + 3c + 10 = 560$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 3c - 550 = 0, \quad D = 3^2 + 4 \cdot 550 = 9 + 2200 = 2209 = 47^2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-3 \pm 47}{2} \quad \begin{cases} c = 22 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 22 \\ a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -25 \\ a = -16 \\ b = -24 \end{cases}$$

(все возможные варианты (a, b, c))

Ответ:  $\{(31; 23; 32), (-16; -24; -15), (31; 23; 22), (-16; -24; -25)\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ (a-c)(b-c)=p^2 \\ a-b \neq 0 \\ a > b \\ p - \text{простое} \end{cases}$$

~6

$$a = 560 - b^2; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad \text{и } a-c, b-c \in \mathbb{Z}$$

или если  $(a-c)(b-c) = p^2$ , то или

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases}, \text{ но тогда или } a=b+p, \text{ или } a=b-c-p,$$

что невозможно, или

$$\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}, \text{ но тогда } a=c-p^2 < c-1 = b, \text{ что}$$

или  $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$ , но тогда  $a=c+1 < c+p^2 = b$ , что

$$\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}, \text{ и}$$

$$\begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} a=p^2+c \\ b=1+c \end{cases} \quad (B)$$

$$(1) \quad 560 = a+b^2 = c-1 + (c-p^2)^2 = c-1 + c^2 - 2cp^2 + p^4 = p^4 - 2cp^2 + (c^2+c-1)$$

и  $a-b = p^2-1$ ,  $a-b \neq 0$ , и  $p^2-1 \neq 0$

Если  $p \equiv_3 0$ , то  $p^2 \equiv_3 0$ ,  $p^2-1 \equiv_3 -1$ , если  $p \equiv_3 1$ , то  $p^2 \equiv_3 1$ ,  $p^2-1 \equiv_3 0$ , если  $p \equiv_3 2$ , то  $p^2 \equiv_3 1$ ,  $p^2-1 \equiv_3 0$ .

и нам разлагать так как  $p \equiv_3 0$ , но  $p$ -простое, и  $p=3$ , и  $(a-c)(b-c)=9$

$$\begin{cases} a=c-1 & (1) \\ b=c-9 \end{cases} \quad (1) \quad a+b^2 = c-1 + (c-9)^2 = c-1 + c^2 - 18c + 81 = c^2 - 17c + 80 = 560$$

$$\begin{cases} a=c+9 & (2) \\ b=c+1 \end{cases} \quad (2) \quad a+b^2 = c+9 + (c+1)^2 = c+9 + c^2 + 2c + 1 = c^2 + 3c + 10 = 560$$

и  $c^2 - 17c + 80 = 560$ , и  $c^2 - 17c - 480 = 0$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 480 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$$

$$c = \frac{17 \pm \sqrt{2209}}{2} = \frac{17 \pm 47}{2}$$

и  $\sqrt{2209} \notin \mathbb{Z}$ , и  $\frac{17 \pm 47}{2} \notin \mathbb{Z}$

(2)  $a+b^2 = c+9 + (c+1)^2 = c+9 + c^2 + 2c + 1 = c^2 + 3c + 10 = 560$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ + 134 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ + 133 \\ \hline 2209 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AM = \frac{HP}{\sin \angle XAC} = 2HP = 2\sqrt{16-k^2}$

$\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \angle A_1Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \angle HX = \angle AX - AM = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{16-k^2}$

Плоскости  $XR \parallel A_1H$  ( $HA_1Y$ ),  $\sin \angle XR \perp A_1Y$

$\sin \angle XHA_1 = \angle HA_1R = \angle A_1RX = 90^\circ$ ,  $\sin HA_1RX$  — прямая трапеция

$\sin A_1R = HX = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{16-k^2}$ ,  $\sin RY = A_1Y - A_1R = 2\sqrt{16-k^2}$

$RY^2 + RX^2 = XY^2$  по м. Пифагора,  $\sin g = h^2 + 4(16-k^2)$

$3h^2 = 4 \cdot 16 - 9 = 40 + 24 - 9 = 40 + 15 = 55$ ,  $h^2 = \frac{55}{3}$ ,  $\sin h = \sqrt{\frac{55}{3}}$

$\sin A_1H = \sqrt{\frac{55}{3}}$

Ответ: высота в призме  $\sqrt{\frac{55}{3}}$





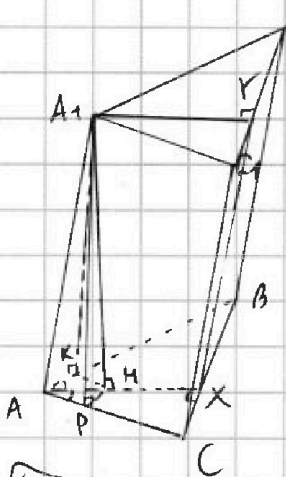
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7



$ABCA_1B_1C_1$  - ~~прямо~~ призма из упр.

$\triangle ABC$  равнос.,  $AB=1$ ,  $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 4$ ,

$S_{CC_1B_1B} = 3$   $AA_1C_1C, AA_1B_1B, CC_1B_1B$  - параллелограммы по сгр. призмам

~~параллелограммы по сгр. призмам~~  
Пусть  $A_1H \perp ABC$  (ср.  $A_1H$  - высота призм),  $A_1K \perp AB$  ( $AA_1B_1B$ ),  $A_1P \perp AC$  ( $AA_1C_1C$ )

Потому  $S_{AA_1B_1B} = A_1K \cdot AB$ ,  $S_{AA_1C_1C} = A_1P \cdot AC$ , и  $A_1K = A_1P = 4$

$KH \subset ABC$ ,  $PH \subset ABC$ , и  $PH \perp A_1H$ ,  $KH \perp A_1H$

и  $\triangle KA_1H = \triangle PA_1H$  по кривиз. рав. кривиз. мн  
о кривиз. и  $\triangle KA_1H = \triangle PA_1H$

и  $HP = KH$ ,  $HP \perp AC$ ,  $KH \perp AB$  по теор. о 3<sup>х</sup> перп.

и  $H$  равноуд. от  $AB$  и  $AC$ , и  $AH$  - дмс.  $\triangle ABC$ , и  $AH$  и впе

и мед. по сл. бы равнос. треуго. Пусть  $AM \cap BC = X$ ,

$A_1Y$  - мед. впе и дмс. в  $\triangle A_1B_1C_1$  к  $B_1C_1$ , и  $XY$  и  $A_1H$

в одной плоско., и. и.и.  $XY \parallel A_1H$ , и.и.и.  $XY \cap A_1H = Z$ .

если  $XY \perp A_1H$ , то  $XY \perp ABC$ , и  $BC \perp XY$

если  $A_1H \cap XY = Z$ , то  $ZX \perp BC$  по теор. о 3<sup>х</sup> перп.

и  $XY \perp BC$ , и  $S_{CC_1B_1B} = XY \cdot BC$ , и  $XY = 3$

Пусть  $A_1H = h$ , тогда  $HP = \sqrt{16 - h^2}$  по м. Тюрпарара

$\angle XAC = \frac{\angle BAC}{2} = 30^\circ$  ( $\angle BAC = 60^\circ$  по сл. бы равнос. мн.)



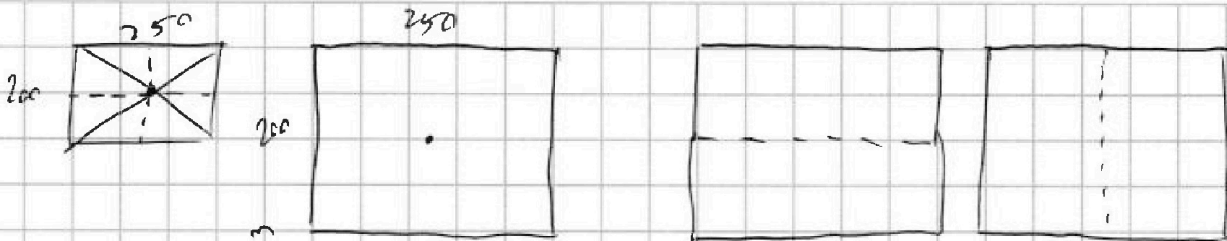


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

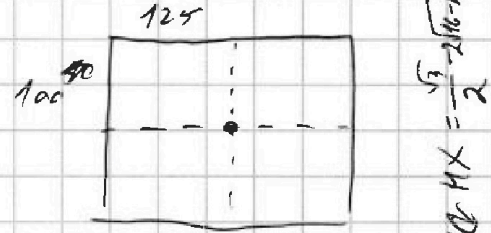
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 100 \cdot 125 + C_{100 \cdot 250 \cdot 100}^4 + C_{125 \cdot 200}^4 - C_{100 \cdot 125}^2$$

$$2 \cdot 250 \cdot 100 \quad 2 \cdot 200 \cdot 125$$



$$AM \cdot MX = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$a > b, \quad a - b \equiv_3 1, \quad a - b \equiv_3 2$$

$$(a-b)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$$

$$ab - c(a+b) = (p-c)(p+c)$$

$$a + b^2 = 560 \equiv_3 2$$

$$b \equiv_3 0, 12$$

$$b^2 \equiv_3 0, 11$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv_3 1 \\ a \equiv_3 1 \\ b^2 \equiv_3 2 \\ a \equiv_3 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \equiv_3 2 \\ a \equiv_3 1 \\ b \equiv_3 0 \\ a \equiv_3 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a > b \\ a \geq b + 2 \end{matrix}$$

$$AM = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$AM = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{matrix} a + b \equiv_3 2 \\ a - b \equiv_3 0 \end{matrix}$$

$$p^2 \geq (a-c)(b-c) \geq (b-c+2)(b-c)$$

$$= (b-c+2)^2 - 1$$

-1	0	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	9	16	25	36

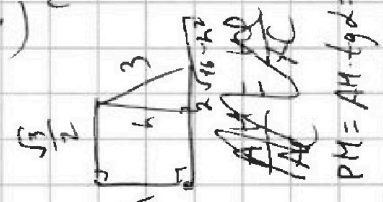
$$p^2 + 1 \geq (b-c+1)^2$$

$$p^2 \geq (b-c+1)^2 = (b-c)^2 + 2(b-c) + 1$$

$$(a-c)(b-c)$$

$$p \geq |b-c+1|$$

$$\begin{cases} p=0 \\ |b-c+1|=1 \end{cases}$$



$$PM = AM \cdot \frac{1}{2} = \frac{AM}{2}$$

$$(b-c)(b-c+2-a+c) + 1 \leq 0$$

$$b^2 - bc - ab + ac + 2b - 2c + 1 \leq 0$$

$$(b-c)(b-a+2) + 1 \leq 0$$

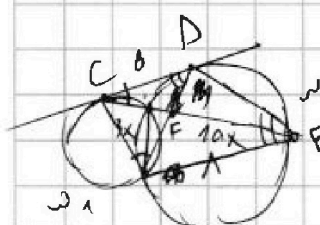


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

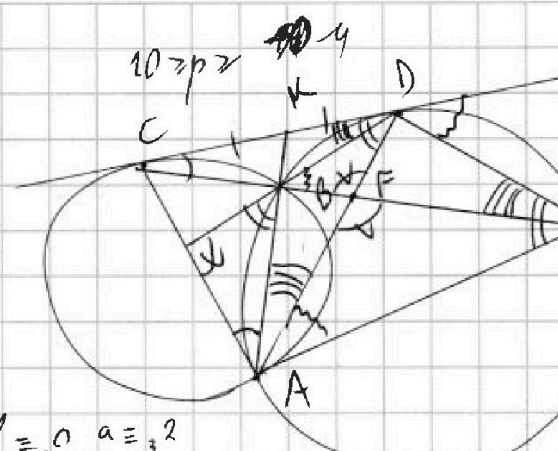
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

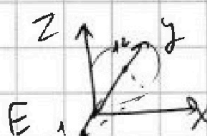


$a = 560 - b^2$   
 $560 - b^2 = b \cdot 3$   

$b$	0	1	2	$\dots$
$b^2$	0	1	1	$\dots$
$b^2 + b$	0	2	0	$\dots$
$560 - b^2 + b$	2	0	2	$\dots$



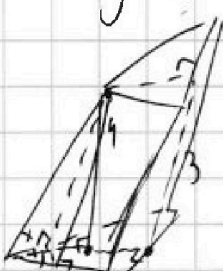
$10 \geq p \geq 4$   
 $AF \cdot FD = FE \cdot BF =$   
 $a \equiv 2$   
 $b \equiv 3$   
 $a \equiv 1$




$z = 4 - 2x$   
 $z = 4 - 2x$   
 $x = 1$

$\frac{CB}{AK} = \frac{CK}{CA}$

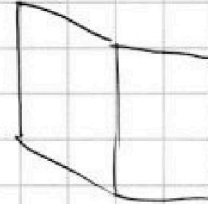
$3x + 4x - z - 2 + 25 + \dots = 4y + 4x - 4x^2 + 4z$   
 $3z - z + \dots = 4y + 4x - 4x^2 + 4z$   
 $4x^2 - 4x + 1 + 4z - 2 - 4y + 31 + \dots = 0$   
 $(2x - 1)^2$   
 $\sqrt{4y + 4z - 1 - (2x - 1)^2}$



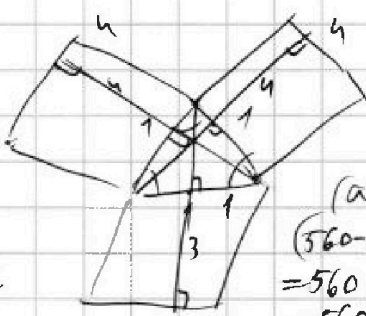
$CB \cdot CE = 4KB \cdot BA$   
 $\frac{CB}{BA} = 4 \cdot \frac{KB}{CE}$   
 $KB^2 = KB \cdot KA$



$b \equiv 0, a \equiv 2$



$(a-c)(b-c) \equiv (2-c)c$



$(a-c)(b-c) = 9$   
 $(560 - b^2 - c)(b-c) =$   
 $= 560b - b^2c - bc -$   
 $- 560c + b^2c + c^2 =$   
 $- 560b + 560(b-c) -$   
 $-(b-c)(b^2 - c) = p^2$

$-(b-c)b^2 + 560(b-c) + c(b-c) = p^2$   
 $-b^2 + 560 + c = \frac{p^2}{b-c}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y^3 + 6y^2 + 3y - 3 - p = 0$$

$$x+3 + 4-x-z + 25 + 2\sqrt{10}\sqrt{x+3} - 4 - 10\sqrt{4-x-z} - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x-z} = 4(y+x-x^2+2)$$

$$(y+1+9(y-12))^2 - 6|y+1||y-12| = 169 - z^2$$

$$(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = p^2$$

a, b, c  
a > b  
a = 560 - b^2  
560 - b^2 > b  
b^2 + b - 560 > 0  
D = 1 + 4 \* 560 = 2241

$$13 \leq z \leq 13$$

$$x+z \leq 4$$

$$x+z \geq -3$$

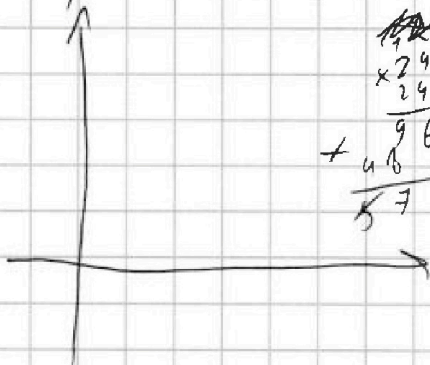
$$z \leq 7$$

$$b \geq 30, a \geq 3$$

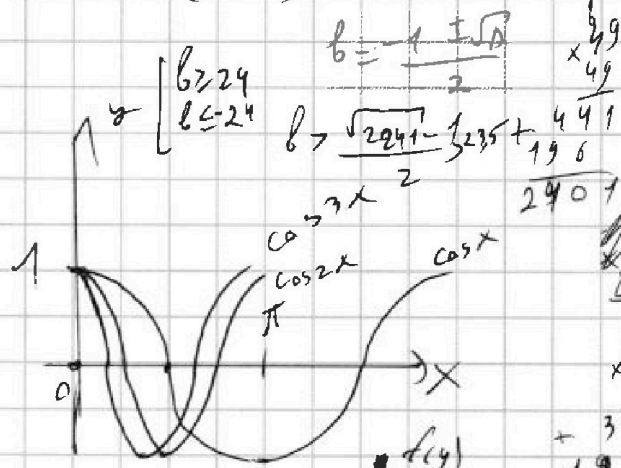
$$a \geq b+2$$

$$p^2 = (a-c)(b-c) \geq (b-1-c+2)(b-c) = (b-c)^2 + 2(b-c)$$

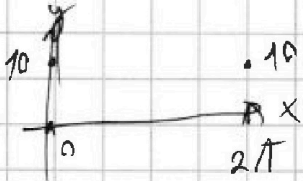
$$p^2 + 1 \geq (b-c-1)^2$$



$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline + 46 \\ 96 \\ \hline 576 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} T_{\cos x} = 2\pi & \times 1 \\ T_{\cos 2x} = \pi & \times 2 \\ T_{\cos 3x} = \frac{2\pi}{3} & \times 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline + 329 \\ 188 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\omega T f(x) = 2\pi$$

$$\frac{4}{4^3} + \frac{6}{4^2} + \frac{3}{4} - 3 =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{16} + \frac{12}{16} - \frac{48}{16} = \frac{1541}{16}$$

$$4y^3 + 6y^2 + 3y - 3 = 0$$

$$\frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$y((2y)^2 + 3 \cdot 2y + 3) = 3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ \times 23 \\ + 69 \\ \hline 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \times 17 \\ + 119 \\ \hline 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = \\ &= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \end{aligned}$$

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 - p = 0$$

$$f'(x) = 12x^2 + 12x + 3 = 0$$

$$f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p \quad f'(x) = 0 \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (2x+1)^2 = 0$$

$$2x+1=0, \quad x = -0,5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 - p = -4 - p$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 - p = 10 - p$$

$$\begin{aligned} f(-0,5) &= -4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 - p = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 - p = \\ &= -p - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{и } f(-1) < f(-0,5) < f(1)$$

$$\text{и если } f(-1) \leq 0, \quad f(1) \geq 0 \text{ или } f(-1) \geq 0, \quad f(1) \leq 0,$$

$$\text{то на } x \in [-1; 1] \text{ есть хотя бы 1 корень, и}$$

$$\exists y: \cos y = x, \text{ и есть корень } y$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 23

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot 9^6 &= \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot |x+1| \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{\frac{(13x-35)|x+1|}{x+1}} = \\ &= \sqrt{\frac{|13x-35| \cdot |x+1|}{x+1}} = \sqrt{|13x-35|}, \quad \text{и} \quad \sqrt{|13x-35|} = 5-x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |13x-35| = (5-x)^2 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |13x-35| = x^2 - 10x + 25 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 13x-35 = x^2 - 10x + 25 \\ 13x-35 \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \quad (1) \\ x \geq \frac{35}{13} \end{cases} \\ \begin{cases} -13x+35 = x^2 - 10x + 25 \\ 13x-35 < 0 \\ x < 5 \end{cases} & \begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (2) \\ x < \frac{35}{13} \\ x < 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1) \quad D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289$$

$$\text{и} \quad x = \frac{23 \pm 17}{2} \quad \begin{cases} x = 20 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$20 > 3 \geq \frac{35}{13} \quad \text{но } 20 > 5 > 3$$

и нам подходит только  $x = 3$

$$(2) \quad D = 9 + 40 = 49$$

$$\text{и} \quad x = \frac{-3 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$-5 < 2 < \frac{35}{13} < 5, \quad \text{и} \quad \text{нам подходят } x = -5 \text{ и } x = 2$$

Заметим, что при  $x = -5, x = 2, x = 3$   $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \neq 0$ ,

т.е. это 2 и) и они нам подходят.

Итого:  $\{x = -5, 2, 3\}$  Сделаем проверку.

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} (a-c) = \pm p \\ (b-c) = \pm p \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = -1 \\ a-c = -1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$a-c = b-c \Leftrightarrow a = b \ominus$$

$$a-c = -p^2, b-c = -1, a < b \ominus$$

$$a-c = 1, b-c = p^2, a < b \ominus$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b = p^2 - 1 \\ a-b = -1 + p^2 \end{cases}$$

$$1) a = p^2 + c, b = 1 + c$$

$$D = 289 + 4 \cdot 476 = 289 + 1912 = 2201$$

$$47 + 17 = 64$$

$$47 - 3 = 44$$

$$\begin{array}{r} \times 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \times \ \times \\ \pm \end{array}$$

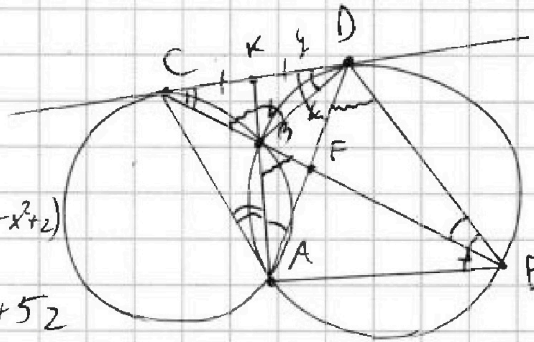
$$x+3+4-x-2+25+\dots = 4(y+x-x^2+2)$$

$$32+\dots = 4y \ 4x - x^2 + 52$$

$$CF = 3x, FE = 13x$$

$$CE = 13x$$

$$CD = 24$$



$$\begin{array}{r} 4 \quad 37 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \times 47 \\ \hline 1912 \\ 1912 \\ \hline 2201 \end{array}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$KD^2 = KO \cdot OKA$$

$$AF \cdot FD = AF \cdot FE$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{CE} = \frac{24}{13x}$$

$$\frac{AD}{DA} = \frac{KD}{KA}$$

$$\frac{KA}{KD} = \frac{AD}{DA}$$

$$\frac{KA}{KD} \cdot \frac{24}{13x} = \frac{AD}{DE}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{4y}{13x} \cdot \frac{KA}{AD}$$