



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим первый член прогрессии за b , разность за q .

$$\text{Тогда } bq^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}, \quad bq^8 = x+3, \quad bq^{14} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$\frac{bq^6 \cdot bq^8}{bq^{14}} = \frac{b^2 q^{14}}{bq^{14}} = b = (x+3)(25x-9)^{\frac{1}{2}}(x-6)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x-6)^{\frac{3}{2}}}{(25x-9)^{\frac{1}{2}}} = (x+3)(x-6)^2$$

$$bq^6 \cdot bq^{14} = (bq^{10})^2 = (25x-9)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-6)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{3}{2}}} = \frac{25x-9}{x-6} \Rightarrow$$

$$bq^{10} = \sqrt{\frac{25x-9}{x-6}} \Rightarrow$$

$$\frac{bq^{14}}{bq^{10}} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-6)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{3}{2}} \cdot (25x-9)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x-6} = q^4 \Rightarrow q = \frac{1}{(x-6)^{\frac{1}{4}}}$$

$$bq^6 = (x+3)(x-6)^2 \cdot \frac{1}{(x-6)^{\frac{3}{2}}} = (x+3) \cdot (x-6)^{\frac{1}{2}}. \text{ С другой стороны,}$$

$$bq^6 = (25x-9)^{\frac{1}{2}}(x-6)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (x+3)(x-6)^{\frac{1}{2}} = (25x-9)^{\frac{1}{2}}(x-6)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$x+3 = \sqrt{25x-9} \quad |^{\wedge 2} \Rightarrow x^2+6x+9-25x+9=0 \Leftrightarrow x^2-19x+18=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x-18)=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=18. \text{ Отсюда } b_1 = (1+3)(1-6)^2 =$$

$$= 100, \quad b_2 = (18+3)(18-6)^2 = 21 \cdot 12^2, \quad x_1 \text{ не подходит по ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\text{единственно возможное значение } b = (18+3)(18-6)^2 =$$

$$= 21 \cdot 144, \quad q = \frac{1}{\sqrt[4]{144}} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Ответ: $x=18$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq (25x-9)(x-6) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{25}\right)(x-6) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{9}{25}\right] \cup [6; +\infty)$$

$$\frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - \frac{9}{25}}{x-6} \geq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{9}{25}\right] \cup [6; +\infty)$$

$$\text{Проверка: } b = 21 \cdot 144, \quad a = \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad x = 18$$

$$b a^6 = \sqrt{(25 \cdot 18 - 9)(18 - 6)} = 21\sqrt{12}$$

$$b a^6 = 21 \cdot 12^2 \cdot \frac{1}{12\sqrt{12}} = 21\sqrt{12}$$

$$b a^8 = 21$$

$$b a^8 = 21 \cdot 12^2 \cdot \frac{1}{12^2} = 21$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cdot \cos 3x + 3p \cdot \cos x + 12 \cos x - 6 \cos 2x - 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 5 \cos x) + 3p \cdot \cos x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x + 6 - 10 = 0$$

$$4p \cdot \cos^3 x - 3p \cdot \cos x + 3p \cdot \cos x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cdot \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

Положим $\cos x = t$, $p-1 = a^3$. Тогда уравнение принимает вид:

$$a^3 t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(at + t - 1)(a^2 t^2 - at(t-1) + (t-1)^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} at + t - 1 = 0 \\ t^2(a^2 - a + 1) + t(a-2) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$t^2(a^2 - a + 1) + t(a-2) + 1 = 0$$

Второе уравнение - квадратное относительно t - имеет

дискриминант $D = (a-2)^2 - 4(a^2 - a + 1) = -3a^2 \leq 0$. Для $a \neq 0$

уравнение не имеет действительных решений. Для $a = 0$:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0. \text{ Отсюда } \cos x = 1, \text{ т.е. } x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$p-1 = 0 \Rightarrow p = 1.$$

Для первого уравнения корнем будет являться число

$\frac{1}{a+1}$. Посмотрим, когда $-1 \leq \frac{1}{a+1} \leq 1$, $a \neq -1$.

$$1) a+1 > 0 \Rightarrow a \in (-1; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq -1 \\ \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq -a-1 \\ 1 \leq a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in [-2; 1) \cup (-1; +\infty) \\ a \in [0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in [0; +\infty)$$

$$2) a+1 < 0 \Rightarrow a \in (-\infty; -1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq -1 \\ \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq -a-1 \\ 1 \geq a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -2] \\ a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \end{cases}$$

$a \in (-\infty; -2]$, т.е. решениями уравнения является:

$$a \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty), \text{ т.е. } p \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Для $p \in (-\infty; -7]$, т.е. $a^3 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty) \Rightarrow$~~

$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

Т.е. для $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ решением будет:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

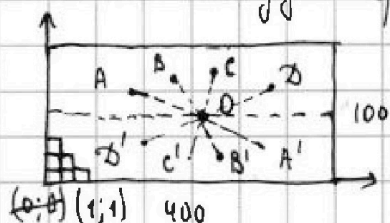
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай с центральной симметрией.

Расположение точек определяется 4 точками, лежащими

в одной из частей прямоугольника, разделённого

какой-нибудь средней линией этого прямоугольника:



Введём в прямоугольнике прямоугольную

систему координат для клеток. Тогда

для клетки с координатами $(i; j)$ будет поставлена

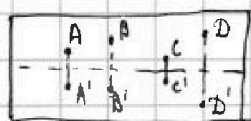
в соответствии клетка с координатами $(401-i; 101-j)$.

Тогда всего способов для этого случая $C_{2 \cdot 10^4}^4$

Теперь рассмотрим случай для осевой симметрии относительно

одной из средних линий. Расположение точек определяется

расположением 4 точек в половине прямоугольника:



Точке с координатами $(i; j)$, где $1 \leq j \leq 50$

соответствует точка $(i; 50-j)$.

Таких случаев $C_{2 \cdot 10^4}^4$. Для второй средней линии случаев

тоже $C_{2 \cdot 10^4}^4$. Рассмотрим случай точки симметричной

относительно обоих средних линий. Расположение точек

определяется 2-ми точками, лежащими в одной четверти



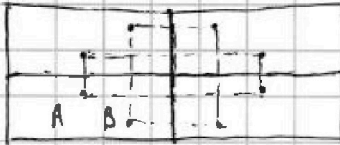
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

прямоугольника, ограниченный 2-ми средними линиями.



Для точки с координатами

$(i; j)$, где $1 \leq i \leq 100$, $1 \leq j \leq 50$

в соответствие ставится 3 точки с координатами

$(i; 101-j)$, $(401-i; j)$ и $(401-i; 101-j)$. Следовательно,

всего случаев $C_{10^4}^2$. По формуле включения-исключения

получаем общее количество случаев для осевой симметрии:

$$C_{2 \cdot 10^4}^4 + C_{2 \cdot 10^4}^4 - C_{10^4}^2$$

Аналогично по формуле включения и исключения

получаем кол-во случаев рс выбора в клетку, обладающих

хотя бы одной из осевой или центральной симметрий:

$$C_{2 \cdot 10^4}^4 + 2 C_{2 \cdot 10^4}^4 - C_{10^4}^2 - C_{10^4}^2 = 3 C_{2 \cdot 10^4}^4 - 2 C_{10^4}^2$$

(Если для расположения точек выполняется условие и

центральной, и осевой симметрии относительно какой-нибудь

одной из средних линий, то симметрии относительно другой

средней линии тоже выполняется, т.е. кол-во случаев в

этом варианте также равно $C_{10^4}^2$).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. a, b, c целые и $(a-c)(b-c) = r^2$, то рассмотрим следующие случаи:

1) $a-c = 1, b-c = r^2$. Тогда $c = a-1$, и $b-c = b-a+1 = r^2 \Rightarrow$

$$b-a = r^2 - 1 \Rightarrow b-a = (r-1)(r+1). \text{ Т.к. } r \geq 2, \text{ то правая часть}$$

> 0 . Т.к. $a < b$, то $b-a > 0$, т.е. противоречий нет. Пусть

$r \neq 3$. Тогда либо $r \equiv 1 \pmod{3}$, либо $r \equiv -1 \pmod{3}$, т.е. либо

$r-1 \equiv 0 \pmod{3}$, либо $r+1 \equiv 0 \pmod{3}$ соответственно. Тогда

правая часть $\div 3$. Противоречие, т.к. $b-a \not\equiv 0 \pmod{3}$. Т.е. отсюда

$r = 3$, а, значит, $b-a = 8$.

2) $a-c = -1, b-c = r^2 \Rightarrow c = a+1 \Rightarrow b-c = b-a-1 = r^2 \Rightarrow$

$$b-a = 1+r^2 \Rightarrow b-a = (1-r)(1+r). \text{ Т.к. } r \geq 2, \text{ то правая}$$

часть < 0 , а левая > 0 . Противоречие.

3) $a-c = r^2, b-c = -1 \Rightarrow c = b-1 \Rightarrow a-c = a-b+1 = r^2 \Rightarrow a-b = (r-1)(r+1).$

$r \geq 2 \Rightarrow$ правая часть > 0 . $a < b \Rightarrow a-b < 0$. Противоречие.

4) $a-c = -r^2, b-c = -1 \Rightarrow c = b+1 \Rightarrow a-c = a-b-1 = -r^2 \Rightarrow$

$$a-b = (1-r)(1+r). \text{ При } r \geq 2 \text{ и } a < b \text{ обе части одного знака.}$$

Аналогично 1 случаю получим, что $r = 3$, а, значит,

$$b-a = 8.$$

5) если $a-c = b-c = r$ или $a-c = b-c = -r$, то $a = b$. Противоречие.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Итак, } b - a = 8 \Rightarrow b = 8 + a. \quad a^2 + b = a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow$$

$$a(a+1) = 702. \quad 40^2 = 26 \cdot 27 \Rightarrow 1) a = 26; \quad 2) a = -27.$$

Тогда $b = 34$ и $b = -19$ соответственно. Отсюда

$$c_1 = 25 \text{ и } c_2 = 35 \text{ для пары } (26; 34); \quad c_3 = -18 \text{ и } c_4 = -28$$

для пары $(-27; -19)$.

Ответ: тройки (a, b, c) : $(26; 34; 25)$, $(26; 34; 35)$,
 $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4pt^3 - 6t^2 + 12t - 6 = 46$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cdot \cos x + 4(12 \cos^2 x - 6) = 46$$

$$4p \cdot \cos^3 x - 3p \cdot \cos x + 3p \cdot \cos x + 48 \cos^2 x - 24 = 46$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$(-27-c)(-13-c) = 9$$

$$(27+c)(13+c) = 9$$

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$$(34-c)(26-c) = 9$$

$$c = -18$$

$$c = 28$$

$$4p \cdot t^3 + 12t - 12t^2 - 4 = 0$$

$$pt^3 + 3t - 3t^2 - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$\left(\sqrt[p-1]{t-1}\right) \left((p-1)^{\frac{1}{3}} t^2 - ((t-1)^{\frac{1}{3}} \sqrt[p-1]{t-1} + (t-1)^2) \right) = 0$$

$$\left(\sqrt[p-1]{t-1}\right) t = 1$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[p-1]{t-1}}$$

$$-1 < \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{3}+1}} \leq 1$$

-1

$$a(a+1) = 702$$

$$2 \cdot 27 \cdot 13 = 26 \cdot 27$$

$$(p-1)^{\frac{2}{3}} t^2 - t^2 (p-1)^{\frac{1}{3}} + t (p-1)^{\frac{1}{3}} + t^2 - 2t + 1$$

$$(a-c)(b-c) = 9$$

$$a < b$$

$$(p-1)^{\frac{1}{3}+1} \geq 0$$

$$p \neq 0 > 0$$

$$a^2 + b^2 = 710$$

$$a^2 + a^2 + a + b = 710$$

$$2a^2 + a + b = 710$$

$$a^2 + a^2 + 402 = 0$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad a < b, \quad b - a \leq 3 \quad (a-c)(b-c) = p^2 \quad a^2 + b^2 = 710$$



поиск - то из них 1 или -1

другие p^2

$$a-c = b-c = p \Rightarrow a = b$$

$$b-a = (p-1)(p+1)$$

$$b-a = (1-p)(1+p)$$

$$c = a-1 \Leftrightarrow a-c = 1, \quad b-c = p^2 \Rightarrow b-c = b-a+1+p^2$$

$$c = a+1 \Leftrightarrow a-c = -1, \quad b-c = -p^2 \Rightarrow b-c = b-a-1-p^2$$

$$c = b-1 \Leftrightarrow b-c = 1, \quad a-c = p^2 \Rightarrow a-c = a-b+1+p^2 \Rightarrow a-b$$

$$c = b+1 \Leftrightarrow b-c = -1, \quad a-c = -p^2 \Rightarrow a-c = a-b-1-p^2$$

$$b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

$$a-b = 1 - p^2 = (1-p)(1+p)$$

$$a-b < 0$$

$$b-a > 0$$

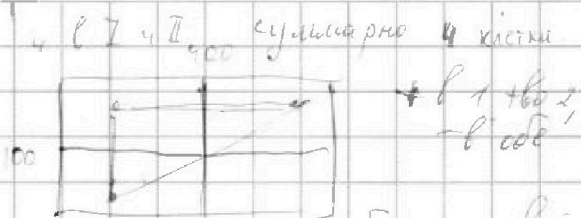
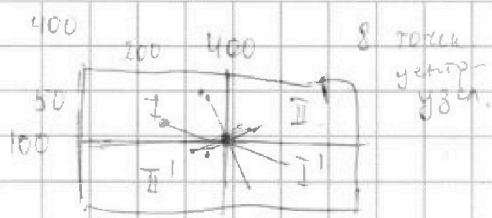


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



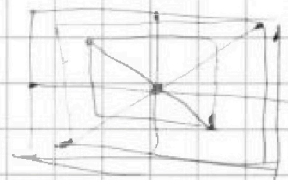
и склони сабах

сбавити вивискам.

400-50

У центрі симетрії

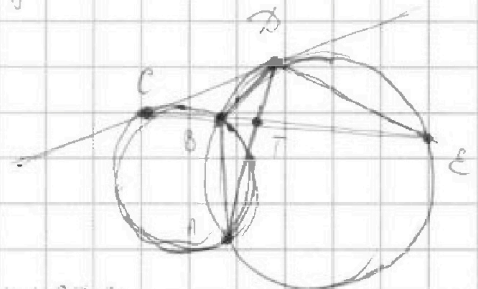
- 1) $\rho I = 4$; $\rho II = 4$; C_{10^4}
- 2) $\rho I = 3$; $\rho II = 1$; $C_{10^4}^3 - C_{10^4}^1$
- 3) $\rho I = 2$; $\rho II = 2$; $(C_{10^4}^2)^2$
- 4) $\rho I = 1$; $\rho II = 3$; $(C_{10^4}^3) - C_{10^4}^1$
- 5) $\rho I = 0$; $\rho II = 4$; $C_{10^4}^4$



У центр симетрії

кол во муглевіх ула осей симетрії

центральні + осей



$$\triangle CBD \sim \triangle EDE$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BD}{DE} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{CT}{TE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{ED}{CD} = 2$$

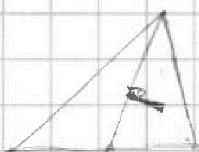
$$\frac{CT}{TE} = \frac{BC + BT}{TE}$$

$$\frac{CD^2}{TE} = BC + CE$$

$$\frac{BD}{DE} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BD}{DE}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_0^8 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}, \quad b_0^8 \cdot x = 3, \quad b_0^4 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}$$

$$b_0^2 \cdot b_0^4 = \sqrt{(25x-9)(x-6)(x+3)^2} \Rightarrow \frac{b_0^2 \cdot b_0^4}{b_0^4} = b_0^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)(x+3)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^2}}}$$

$$b_0^2 = \sqrt{(x+3)^2(x-6)^2} = (x+3)(x-6)$$

$$b_0^6 = \sqrt{25x-9} \cdot (x-6) = (x+3)(x-6) \cdot b_0^6 \Rightarrow$$

Воспользуемся тем, что $b_0^8 = \sqrt{b_0^2 \cdot b_0^4} = b_0^2 \cdot b_0^4 = \sqrt{(25x-9)(x-6)(x+3)^2} \cdot \sqrt{(x-6)(25x-9)(x-6)} \Rightarrow$

$$b_0^8 = \frac{b_0^8}{b_0^4} = \frac{x+3}{x+3} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

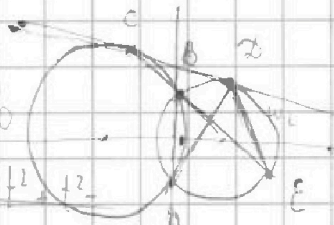
$$(p-1)t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$p-1$ - параметр \Rightarrow

обозначим $p-1 = a^3$

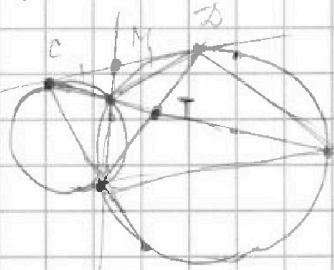
$$a^3 t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$(at+t-1)(a^2 t^2 + t^2 + 1) = 0$$



$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$\begin{array}{r} 441 \overline{) 9} \\ 48 \cdot 9 \cdot \\ \hline 450 \cdot 9 \cdot \\ \hline = 441 \cdot 12 \end{array}$$



$$a^3 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$p-1 \Rightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$AB \cdot BE + BD \cdot AE = BE \cdot AB$$

$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos^2 x + 10$

хотя бы 1 решение.

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = -\cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 + 2 \cos^2 x) = -\cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$-2 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x + 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x - 6 \cos^3 x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 6 \cos^3 x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$[-1; 1]$$

$$4p \cdot t^3 - 6t^3 + 12t + 10 = 0$$

$$4p \cdot t^3 - 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^3 x^3 + (x-1)^3 = 0$$

$$a^3 = p-1$$

$$(ax+x-1) (a^2 x^2 + ax(x-1) + (x-1)^2) =$$

$$= (x(a+1)-1) (a^2 x^2 - ax^2 + ax + x^2 - 2x + 1) = (x(a+1)-1) (x^2(a^2-a+1) + x(a-2) + 1)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a+1} \\ -1 \leq \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{cases}$$

$$(b_0)^2$$

$$x^2(a^2-a+1) + x(a-2) + 1 = 0$$

$$= \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$D = (a-2)^2 - 4(a^2-a+1) = a^2 - 4a + 4 - 4a^2 + 4a - 4 = -3a^2 < 0 \Rightarrow$$

корней нет.

$$-1 \leq \frac{1}{a+1} \leq 1$$

$$b_0^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_0^2 = x+3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq -1 \\ \frac{1}{a+1} \leq 1 \end{cases}$$

$$a \neq -1$$

$$b_0^2 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$b_0^2 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$a+1 > 0 \Rightarrow a \in (-1, +\infty)$$

$$b_0^2 = (x+3)(x-6) \cdot \frac{1}{(x-6)^3}$$

$$1 \geq -a+1 \Rightarrow 2 \geq -a$$

$$a \geq -2 \quad a \in (0, +\infty)$$

$$(x+3)(x-6)^2$$

$$1 \leq a+1$$

$$a \geq 0 \Rightarrow a \in (0, +\infty)$$

$$a+1 < 0$$

$$a \in (-\infty, -1)$$

$$(x-3) \sqrt{25x-9} \sqrt{x-6}$$

$$\frac{(x-6)^{\frac{5}{2}}}{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}$$

$$4+25+15+3=16$$

$$b_0^2 = x-6 \quad (x+3)(x-6) \cdot \frac{1}{(x-6)^3} = \frac{(x+3)(x-6)}{(x-6)^3} = \frac{x+3}{(x-6)^2}$$

$$b_0^2 = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)(x-6)^{\frac{1}{2}}}$$

$$b_0^2 (x+3)(x-6) = (25x-9)^{\frac{1}{2}} (x-6)^{\frac{1}{2}}$$

$$b_0^2 =$$

$$b_0^2 = (x+3)(x-6)$$

$$\frac{1}{(x-6)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x+3}{x-6} \sqrt{25x-9}$$

$$b_0^2 = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)(x-6)^{\frac{1}{2}}}$$

$$b_0^2 = \frac{1}{(x-6)^2}$$

$$(x+3)(x-6)$$

$$\frac{1}{(x-6)^{\frac{7}{2}}} = \frac{(25x-9)^{\frac{1}{2}}}{(x-6)^{\frac{1}{2}}}$$