



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1
x-?

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} - \text{седьмой член прогрессии,}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} - \text{пятнадцатый член прогрессии}$$

$$5-x - \text{пятнадцатый член прогрессии}$$

b - первый член прогрессии, q - её знаменатель.

~~Ограничения:~~

$$b \neq 0$$

$$q > 0$$

$$q \neq 1$$

$$q \neq 0$$

$$(13x-35)(x+1) \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \\ b q^{12} = 5-x \end{cases}$$

$$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\Rightarrow q^8 = (x+1)^2$$

$$x \neq \frac{35}{13} \text{ (м.к. иначе } b q^6 = 0, \text{ но } b \neq 0, q \neq 0)$$

$$1) \quad q^4 = (x+1) \quad (x \neq -1)$$

$$q^2 = \sqrt{x+1}, \text{ м.к. } q^2 \geq 0 \quad (q^2 \neq -\sqrt{x+1})$$

$$\rightarrow b \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x+1) = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b(x+1) = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow (x+1)^3 \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = 5-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$\begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \Rightarrow \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ (подходит по } \text{ограничениям})}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \leq 5 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad q^4 = -x-1 \quad \geq 0 \quad x \leq -1$$

$$-b(x+1)^3 = 5-x$$

$$b(x+1)^3 = x-5$$

$$q^2 = \sqrt{-x-1} \quad \geq 0 \quad (q^2 \neq -\sqrt{-x-1})$$

$$b(\sqrt{-x-1})^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-b(x+1) \cdot \sqrt{-x-1} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$-b(x+1) = \sqrt{\frac{35-13x}{(x+1)^4}}$$

$$-b = \frac{\sqrt{35-13x}}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{35-13x} = 5-x$$

$$\Rightarrow \sqrt{35-13x}^2 = (5-x)^2$$

$$x \leq 5$$

$$35-13x = 25-10x+x^2$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x \leq 5 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -5$$

(подходит под определение)

Ответ:
-5; 3

~~при x = 3!~~

при $x = 3!$

$$b q^6 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = 2$$

$$b q^{12} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{32}$$

$$b q^{14} = 4$$

при $x = -5$

$$b q^6 = \frac{5}{4}$$

$$b q^{14} = 20 \Rightarrow b = \frac{5}{32}$$

$$b q^{12} = 10$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q^6 = 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
10 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1 + 3(y-12)| = \sqrt{169-z^2} \quad (2) \end{array} \right.$$

$x+z \leq 4$

$\Rightarrow x^2 \leq x+y+z \leq 4+y$

$\Rightarrow y \geq x^2 - 4$

$\Rightarrow x+y-x^2+z \geq x+z-4$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{x+y+z-x^2} + \sqrt{4-(x+z)}$$

ОДЗ:

$$z^2 \leq 169$$

$$x \geq -3$$

$$x+z \leq 4$$

$$x+y+z \geq x^2$$

(2)

1. $y+1 + 3y - 36 = \sqrt{169-z^2}$

$4y - 35 = \sqrt{169-z^2}$

$y \geq \frac{35}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$p = ?$

} ≥ 1 решение

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$t = \cos x \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow p = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

Рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3, t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t + 1)^2$$

$$f'(t) = 3(2t + 1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow f(t)$ ~~монотонно~~ ~~возрастает~~ монотонно возрастает на $(-\infty; -\frac{1}{2})$ и монотонно возрастает на $(-\frac{1}{2}; +\infty)$

$t \in [-1; 1] \Rightarrow$ свое минимальное значение она принимает в $t = -1$: $f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

т.к. $f(t)$ - монотонно возрастающая функция, то свое максимальное значение она принимает в $t = 1$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow f(t) \in [-4; 10] \Rightarrow \forall y \in [-4; 10] \exists t \in [-1; 1] : f(t) = y$$

\Rightarrow для каждого значения из $[-4; 10]$ \exists единственный $\cos x \Rightarrow$ ~~одно~~ $\exists \geq 1$ решение относительно x , т.к. $\cos x \in [-1; 1]$ и принимает все свои значения на данном промежутке $p = f(t) \in [-4; 10]$

при $p = -4$ $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

при $p = 10$ $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
43 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3 (продолжение)

при $p \in (-4; 10)$ $\cos x \in (-1; 1)$ и $\cos x$ удовлетворяет уравнению $4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$

$\cos x = a \in (-1; 1)$ и a удовлетворяет уравнению $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$

$x = \pm \arccos(a) + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$

\uparrow $p \in (-4; 10)$

a - корень, м.к

$4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$ - уравнение

при $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$ решений нет, $\cos x$

м.к при данных p $\cos x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Ответы: $(p = -4, x = \pi + 2\pi n)$; $(p = 10, x = 2\pi k)$;

$(p \in (-4; 10); x = \pm \arccos(a) + 2\pi m)$, где a - корень уравнения $4a^3 + 6a^2 + 3a - 3 = p$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$



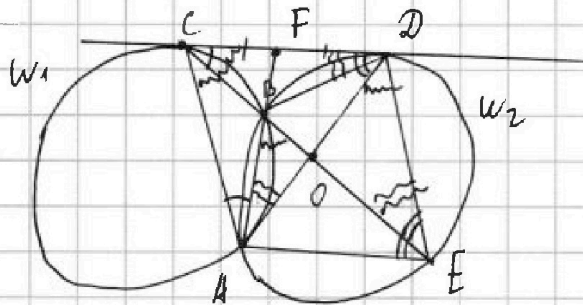
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$AD \perp CE = 0$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

Решим:

Пусть $AB \cap CD = F$. AB - радикальная ось W_1 и

W_2 , т.к. проходит через 2 точки пересечения окружностей. $F \in AB \Rightarrow F \in$ рад. оси W_1 и

$$W_2 \Rightarrow \text{pow}_F(W_1) = \text{pow}_F(W_2)$$

$$\Rightarrow CF^2 = FD^2 \Rightarrow CF = FD \quad (CF > 0, FD > 0)$$

$$\angle CAB = \angle DCB \quad (\text{углы к/у касательной к окруж. } W_1)$$

$$\angle CFA = \angle AFD \quad (\text{углы к/у касательной } CD \text{ и хорды } AD)$$

$$\angle ADE = \angle ABE \quad (\text{внешние}) \Rightarrow \angle ACE = 180^\circ - \angle CAB - (180^\circ - \angle ABE) = \angle ABE - \angle CAB = \angle ADE - \angle CAB$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADE - 2\angle CAB + \angle CAB = \angle ADE$$

$$\Rightarrow \triangle DCA \sim \triangle EDA \quad (\angle AED = \angle CFA, \angle DCA = \angle ADE)$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{ED} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{EA}, \quad \frac{CO}{\sin \angle CDA} = \frac{CD}{\sin \angle COD} \quad (\text{т.к. углы } \angle COD \text{ и } \angle CDA)$$

$$\frac{OE}{\sin \angle ODE} = \frac{DE}{\sin \angle ODE} = \frac{DE}{\sin \angle COD} \Rightarrow \frac{CO \cdot \sin \angle ODE}{OE \cdot \sin \angle CAD} = \frac{CD}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{CO}{DE} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\sin \angle ODE}{\sin \angle CAD}, \quad \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{AD}{\sin \angle CAD}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DA} = \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle CAD} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{CO}{DE} = \frac{3}{10} \cdot \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{CO}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
11 ИЗ 11

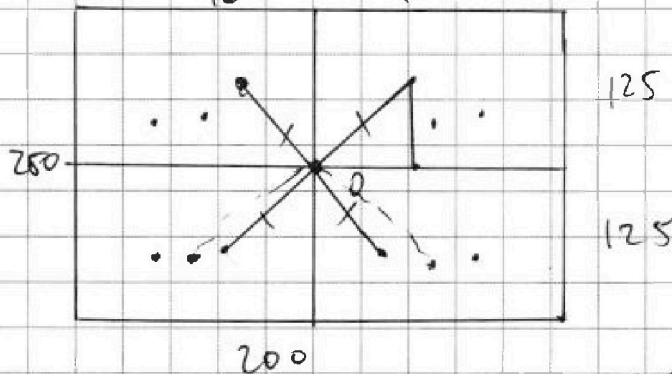
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Рассмотрим симметрию, когда выполняются симметрии относительно средней линии:

$$\frac{C_{25000}^4 + C_{25000}^4}{2} = C_{25000}^4 = \frac{25000!}{24996! \cdot 4!}$$

(т.к. 2 раза посчитали комбинации симметрии)

2) Симметрия относительно центра (относительно диагоналей)



Пусть выберем какой-то одну точку (вертикаль правая или левая), тогда рассмотрим сколько точек симметрии (или точек квадрата)

её можно выбрать от центра: $r(O, A) = x^2 + y^2$

O - центр и начало координат, A - точка.

Заметим, что каждая раскраска относительно средней линии подходит под раскраску относительно центра

\Rightarrow Если подходит какое-то решение относительно центра, то оно же подходит под раскраску



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N_6
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 $(a, b, c) - ?$
 $a > b$
 $(a-b) \nmid 3$

$(a-c)(b-e) = p^2$, p -простое
 $a + b^2 = 560$

1) $(a-c) = 1 \rightarrow a = 1 + c$
 $(b-c) = p^2 \rightarrow b = c + p^2$
 $\Rightarrow \begin{cases} b-a = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$

$\Rightarrow b^2 + b = 559 + p^2$
 $(b + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 559 + p^2$
 $(2b+1)^2 = 4p^2 + 2237$
 $a > b \Rightarrow c+1 > c+p^2$
 $\Rightarrow p^2 < 1$, но p -простое
 $p \geq 2$
 $\Rightarrow p^2 \geq 4$

2) $(a-c) = p$
 $(b-e) = p$
 $\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$, но $a > b$

3) $(a-c) = -p \Rightarrow a = b$, но $a > b$
 $(b-e) = -p$

4) $(a-c) = p^2 \Rightarrow c = a - p^2$
 $(b-e) = 1$

5) $(a-c) = -p^2$
 $(b-c) = -1$
 $\Rightarrow \begin{cases} a = c - p^2 \\ b = c - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ p^2 > -1 \\ p^2 < 1 \end{cases}$
но $p \geq 2$

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \\ (a-b) \nmid 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3} \\ p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 2 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

① $p^2 \nmid 3 \Rightarrow p = 3$ (p -простое)

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + b = 552 \\ b^2 + b - 552 = 0 \end{cases}$

$b(b+1) = 8 \cdot 3 \cdot 23 \quad D = 1 + 2758 = 2759$

$b = 23$ Если $b < 23 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{23} \Rightarrow \frac{8 \cdot 3 \cdot 23}{b} > 24$

$a = 31$ $\Rightarrow \boxed{b \geq 23} \mid N \Rightarrow \begin{cases} b+1 \geq 24 \\ b < 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+1 \geq 24 \\ b+1 < 24 \end{cases}$

\Rightarrow из данного случая выводит $\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \end{cases} \mid \begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \end{cases}$

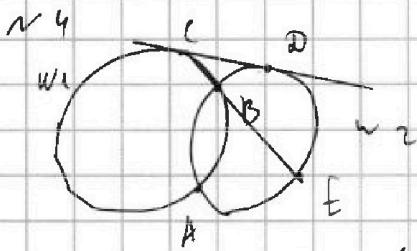


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{NO}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} = 2$$

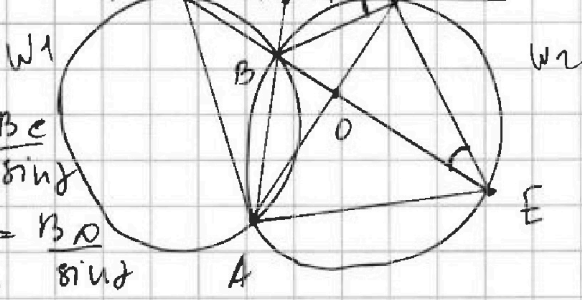
$$\frac{1}{BO} = \cos\left(\frac{13}{3} - \frac{1}{BO^2}\right)$$

$$\frac{2}{BO} + \frac{CO - BO}{BO^2} = \frac{13}{3} \cos$$

$$\frac{1}{BO} + \frac{CO}{BO^2} = \frac{13}{3} \cos$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{NF}{FC} \cdot \frac{CB}{BO} = \frac{AO}{AO} = 1$$



$$\frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{BE}{\sin \beta}$$

$$\frac{BF}{\sin \beta} = \frac{BO}{\sin \alpha}$$

$$BO \cos \alpha = CO - BO$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC}{BO}$$

$$CB \cdot CE = CO^2$$

$$NB \cdot NA = \frac{CO^2}{4}$$

$$NB \cdot NA = \frac{CB \cdot CE}{4}$$

$$\frac{NA}{AB \cdot BO} = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{AB + BN}{AB \cdot BO} = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{1}{BO} \left(1 + \frac{BC}{2BO}\right) = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{1}{BO} + \frac{BC}{2BO^2} = \frac{BC \cdot CO}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{2}{BO} + \frac{BC}{BO^2} = \frac{13}{3} \cos$$

$$\frac{OD}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} \cdot \frac{NC}{CO} = 1$$

$$\frac{OD}{OA} \cdot \frac{AB}{BN} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{ON} = \frac{AB}{BN} \cdot \frac{1}{2} = \frac{BO}{CB}$$

$$\frac{1}{NB} = \frac{2BO \cdot AB}{CB}$$

$$\frac{CO}{\sin \alpha} = \frac{OE}{\sin \beta} = \frac{CB}{AB \cdot 2BO}$$

$$\frac{CO}{\sin \beta} = \frac{CO}{AB} = \frac{BO}{CB} \Rightarrow CO = CO + OE = CO + \frac{10}{3} CO = \frac{13}{3} CO$$

$\triangle CDB \sim \triangle CED$

$CO^2 = CB \cdot CE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим

$$4) \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

$$p^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Если $p \equiv 1 \pmod{3}$, то

$$p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

\Rightarrow не подходит

Если $p \equiv 2 \pmod{3}$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ не имеет}$$

$$6) \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$a - b \not\equiv 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b \equiv 1 \pmod{3} \\ a - b \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 2 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Если $p \not\equiv 0 \pmod{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \equiv 1 \pmod{3} \\ p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

\Rightarrow невозможно $p^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \text{ (p-простое)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -9 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b = p^2 = 9 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^2 + b = 561 - p^2 = 561 - 9 = 552$$

$$b(b+1) = 552 = 24 \cdot 23$$

Если $b > 23 \Rightarrow b+1 > 24$

\Rightarrow

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 24 \cdot 23. \text{ Если } b < -24, b+1 < -23 \Rightarrow -42 \leq b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
8 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{Если } 0 < b < 23 \Rightarrow b+1 < 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) < 23 \cdot 24$$

$$\Rightarrow b < 23$$

$$\text{Если } b > 23 \Rightarrow b+1 > 24$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24 \Rightarrow \text{противоположно}$$

$$\Rightarrow b \leq 23$$

$$\Rightarrow b = 23 \quad (\text{Если } b > 0)$$

$$b(b+1) = 24 \cdot 23$$

$$\text{Если } \cancel{b} < 0 \Rightarrow -24 < b+1 < -1$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 23 \cdot 24$$

$$(b \neq 0)$$

$$\Rightarrow b \leq -24$$

$$\text{Если } b < -24 \Rightarrow b+1 < -23$$

$$\Rightarrow b(b+1) > 24 \cdot 23 \Rightarrow \text{противоположно}$$

$$\Rightarrow b \geq -24$$

$$\Rightarrow -24 \leq b \leq -24 \Rightarrow b = -24$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 32 \\ b = -24 \\ a = -16 \\ c = -15 \end{cases}$$

\Rightarrow Всего 4 случая

$$(31; 23; 22); (-16; -24; -25)$$

$$(31; 23; 32); (-16; -24; -15)$$

$$\text{Ответ: } (31; 23; 22); (-16; -24; -25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+11 + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$x+y-x^2+z \geq 0$$

$$x^2 \geq -3$$

$$x+z \leq 4$$

N 3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = f(t) = p$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$t \in [-1, 1]$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$



$$f'(t) = 0 \quad x \neq 1 \quad f'(t) = 3(4t^2 + 4t + 1) = 3(2t+1)^2$$

$$\frac{t}{-1} \quad +$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$



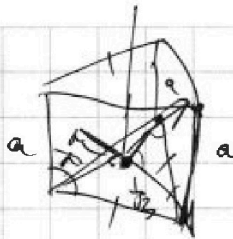
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7



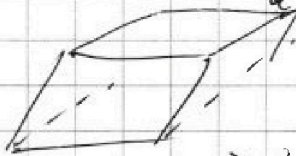
$$a \cdot \sin \alpha = h$$

$$a \cdot \sin \beta = h$$

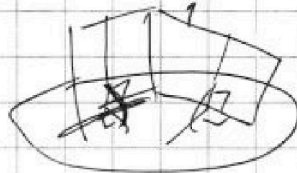
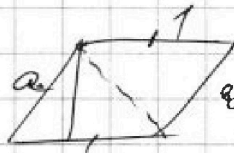
$$a \cdot \sin \gamma = h$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = h/a$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{4} \sin \beta$$



$$\Rightarrow h_1 = h_2 = h_3 = \frac{4}{3}h$$



$$ah_1 = 4$$

$$ah_2 = 4$$

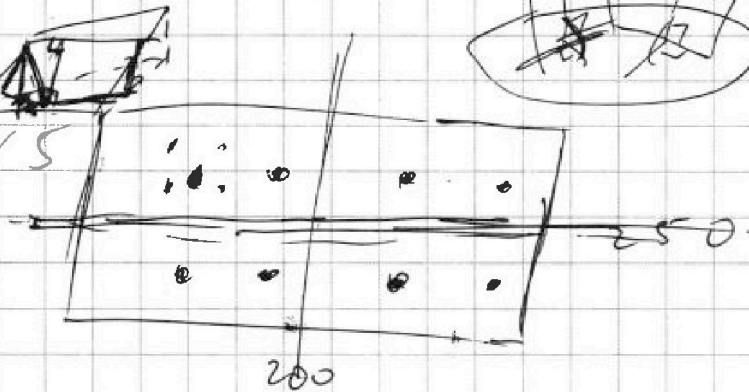
$$ah_3 = 3$$

N 2

$$\sqrt{x^2 + 3^2 + 5^2} = 2$$

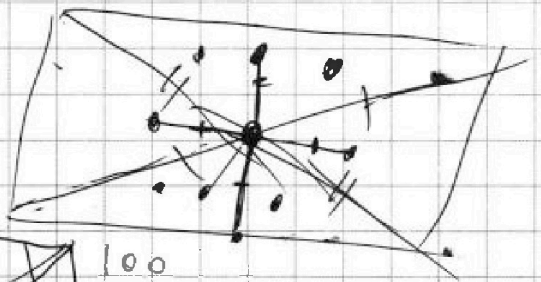
$$\sqrt{x^2 + 2^2 + 2^2} = 1$$

N 5

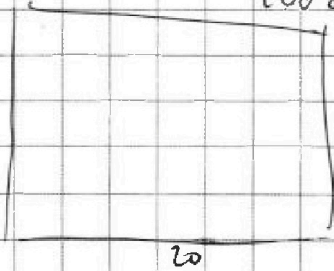
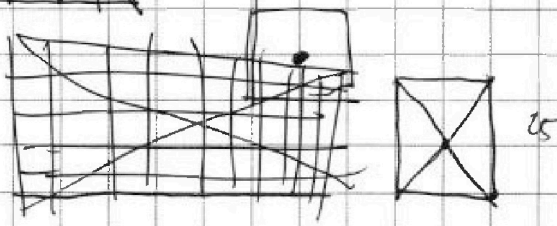
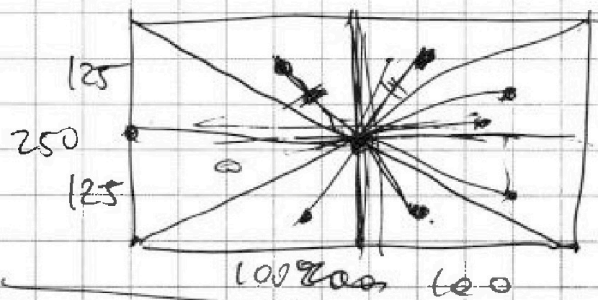
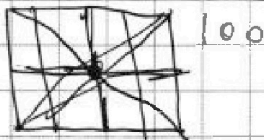


$$250 \cdot 100$$

$$C_4^{25000} + C_4^{25000}$$



$$2 \cdot C_4^{25000}$$



$$5000 \cdot 4$$

$$+ 49998 \cdot 4$$

$$+ 49996 \cdot 4$$

$$+ 49994 \cdot 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b q^{12} = 5-x \\ b q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \end{cases}$$

$\begin{matrix} \downarrow \\ 2 = -5 \\ \rightarrow b q^6 = \frac{5}{4} \\ b q^{12} = 10 \\ b q^{14} = 20 \end{matrix}$

$q^2 = 10 \Rightarrow q^6 = 1000$
 $q^8 = (x+1)$

$(3)^2 = (20+3)^2 = 400 + 120 + 9 = 529$
 $529 - 240 = 289 = 17^2$

$$q^6 = \frac{5-x \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}} = (5-x)(x+1) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{13x-35}$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{(x+1)^2}{(5-x)(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{\sqrt{x+1}} = \frac{(x+1) \cdot \sqrt{13x-35}}{5-x \sqrt{x+1}}$$

$a > b$
 $a - b > 3$

$$(x+1)^2 = \frac{(x+1)^8 \cdot (13x-35)}{(5-x)^3 \cdot (x+1)} \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow (5-x)^3 = (13x-35) \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{x+1}$$

$a = e + 1$
 $b = e + p^2$
 $\Rightarrow a - b = 1 - p^2$
 $a + b = 2e + p^2 = 560$
 $a - b = 2(1 - p^2) = 2p^2$
 $b + b^2 - p^2 = 561$
 $b + b^2 - 56 + p^2 = 561$

$$(5-x) \cdot q^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} \cdot q^6 = 5-x$$

$$q^8 = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1) \cdot (x+1)^3} = (x+1)^2$$

$$\begin{cases} a^4 = x+1 \\ a^4 = -x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \sqrt{x+1} & (1) \\ a^2 = \sqrt{-x-1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad b \cdot (\sqrt{x+1})^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^3} = 5-x$$