



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть α и β — целые положительные числа, значения α , тогда

$$\beta \alpha^3 = \sqrt{\frac{15\alpha + 6}{(\alpha - 3)^3}}$$

$$\beta \alpha^9 = \alpha + 4$$

$$\beta \alpha^{11} = \sqrt{(5\alpha + 4)(\alpha)}$$

или $\beta \alpha$ не зависят

$$\begin{cases} \alpha^2 = \sqrt{\alpha - 3} \\ \alpha^2 = \frac{\sqrt{(15\alpha + 6)(\alpha)}}{\alpha + 4} \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \alpha \leq -\frac{6}{15} \\ \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$\alpha = 5$ — решение
ОДЗ:

Ответ $\alpha = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x - 6 \cos^2 x + 3 + 6 \cos x = p$$

$$2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^3 x - 2 \cos x - 6 \cos^2 x + 6 \cos x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

свернем по формуле

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cos x\right)^3 + 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cos^2 x \cdot \left(-2^{-\frac{1}{3}}\right) + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cos x \cdot \left(-2^{-\frac{2}{3}}\right) - 2 + 2 + 3 = p$$

$$\left(2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = p - 5$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-2^{\frac{2}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x \leq 2^{\frac{2}{3}}$$

$$-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} \cos x - 2^{-\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \leq p - 5 \leq \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$p \in \left[\left(-2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 5, \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 5 \right] \text{ если } p$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt[3]{p-5} + 2^{-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

↑ решение



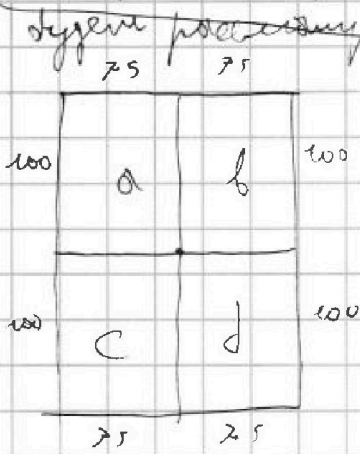
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача: В прямоугольнике со сторонами 100 и 75...



В каждом из квадратов со сторонами 75 и 100 можно провести 3 диагонали. Всего 12 диагоналей. Но некоторые диагонали совпадают. Всего 4 типа диагоналей: 1) диагональ от центра к углу, 2) от центра к середине стороны, 3) от угла к середине противоположной стороны, 4) от угла к углу.

1) Два квадрата имеют по 4 диагонали, и т.д.

уже определены комбинации

~~из всех C_{30000}^4 комбинаций~~

Возможности: а) в кв. а. 4 точки, тогда всего будет 4 диагонали

$$C_{7500}^4 = 3 \text{ комбинации}$$

б) в кв. а. 3 точки, в кв. б. 1 точка:

2. $C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 = 2$ (в кв. а. 3 точки, в кв. б. 1 точка)

в) в кв. а. 3 точки, в кв. в. 1 точка:

$$C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 = 2$$

2 в кв. а., 2 в кв. б.:

$$C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 \cdot 2 = C_{7500}^2$$

1 комбинация

Итого: $3 C_{7500}^4 + 4 C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 2 C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 + 56242499 \cdot C_{7500}^2$

число комбинаций, когда от центра квадрата проведены диагонали к углам



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

p - простое число

a, b, c - целые.

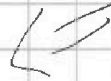
но у с.л.

$$(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \rightarrow a=b \text{ (возм. } a>b)$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \rightarrow a-b=1-p^2, \quad 1-p^2 < 0, \text{ т.к. } p \geq 2$$

(строгие усл.)
 $a < b$ (строгие усл.)



$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$$

1) $p^2 = 3m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow p=3$

$$\begin{cases} a-b=p^2-1 \\ a-b=3k+1 \\ a-b=3k+2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) $p^2 = 3k+2$ возм. p не цел.
 $p^2 - 2 = 3k$

1) $\begin{cases} a-b=8 \\ a+b^2=820 \end{cases}$

$$b^2 + b = 812$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$b = \frac{56}{2} =$$

$$\begin{cases} b=28, & a=36, & c=27 \\ b=29, & a=-21, & c=-30 \end{cases}$$

Answers: $(36; 28; 27)$

$(-21; -29; -30)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$S_{AA_1M} = S_{AA_1N} = S_{AA_1M} = 5 \Rightarrow AA_1 \perp MC$
 $S_{AA_1M} = 5 \Rightarrow AN = 2,5$
 $S_{AA_1M} = 4$

$\triangle AMN \sim \triangle NMA_1$
 по гипотенузе и катету $\Rightarrow MN = NM$
 $AM \perp MC$
 $AN \perp MC$
 MC - высота $\triangle AMN$ и $\triangle ANM$

$MC \perp AN$
 $MC \perp AM$
 $MC \perp$ плоскости AMN
 $MC \perp AA_1$
 $AA_1 \perp MC$

$AA_1QP \perp$ плоскости AMC (т.к. $AA_1 \perp$ плоскости AMN и $AA_1 \perp MC$)
 P, Q - середины AM и AN

$AK = AP$ - высота, $AK \perp$ плоскости AMC и медианой $\triangle AMC$

$BP \perp AP \Rightarrow BP \perp$ плоскости AMC (по св. $BP \perp$ и $BP \perp AP$)
 $BP \perp PQ$ (по св. $BP \perp$ и $BP \perp AP$)
 $\angle APB = 90^\circ$ в $\triangle BPQ$ $\Rightarrow \triangle BPQ$ - прямоугольный

$QB_1 = PB$
 $QB_1 \parallel PB \Rightarrow \triangle B_1PQ$ - \triangle $S_{B_1PQ} = 4 = B_1P \cdot B_1Q \Rightarrow B_1P = B_1Q = 2$

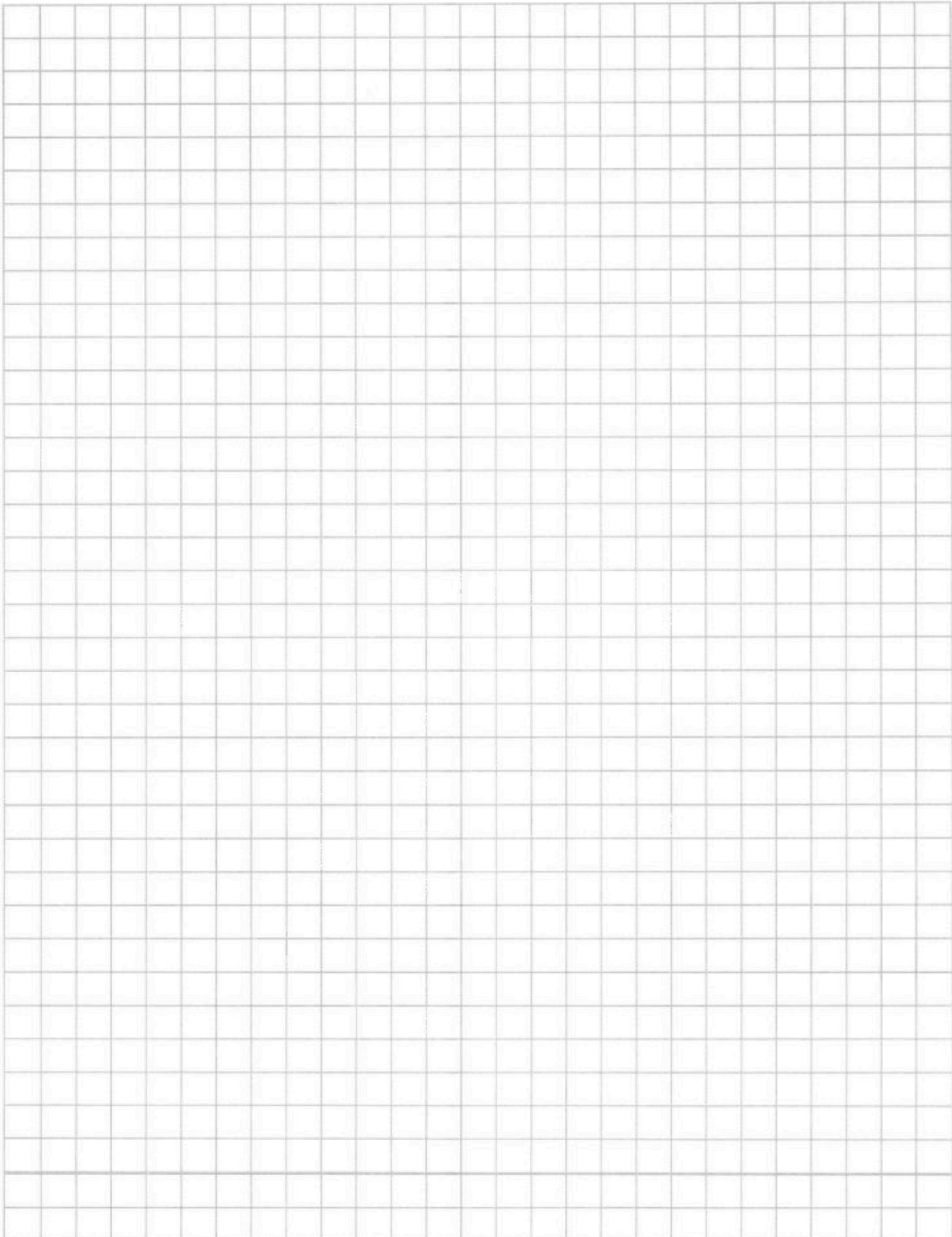


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos^3 x - 6 \cos^2 x - \cos x + 3 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x = p$$

$$2 \cos^3 x - 4 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$2 \cos^2 x (\cos x - 2) + 3 \cos (\cos x - 2) = p - 9$$

$$(2 \cos^2 x + 3) (\cos x - 2) = p - 9$$

$$a - b = 3k + 1$$

1) пусть $a - c = 1$ $b - c = p^2$

2) пусть $b - c = 1$ $a - c = p^2$

$$a - c = b - c$$

$$a - b = 0$$

1) $1 - p^2 = 3k + 1$ невозм.

$$a - b = 79$$

2) $p^2 - 1 = 3k + 1$

$$a - b = 2$$

$$203$$

$$3248$$

$$100 \cdot 3249$$

97

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 57 \\ \hline 14 \\ 141 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$p^2 = 3k + 1$$

$$p = 3$$

$$p^2 = 3k + 2 = 3m - 1$$

$$a - c = 3k + 2$$

$$a - b = 3k - 1$$

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ b - c = 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b - c = 1$$

$$C^3 \cdot 3^8$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 5 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$(2 \cos^3 x - 1) \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 = p$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq -7$$

$$-15 \leq z \leq 19$$

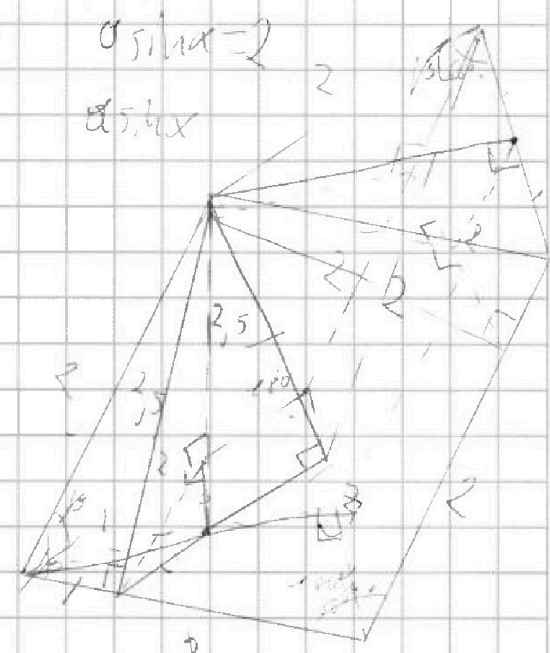
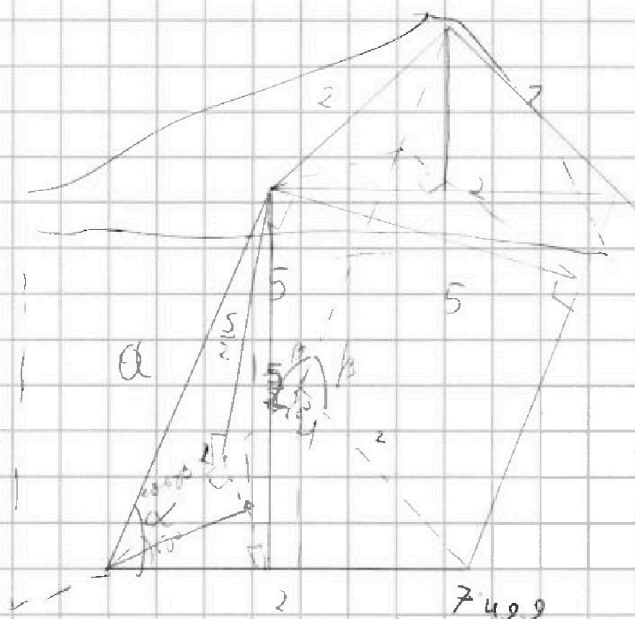
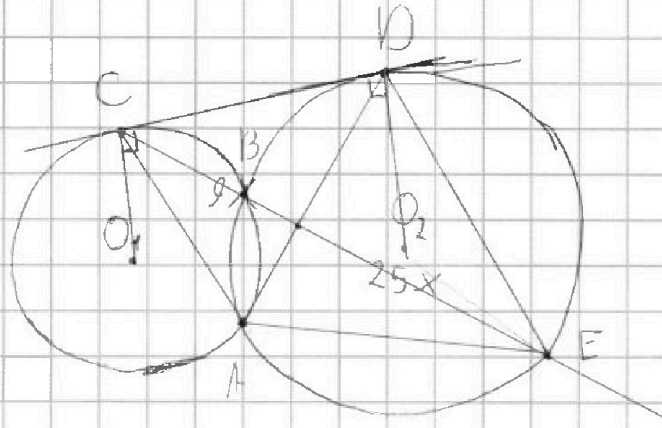


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

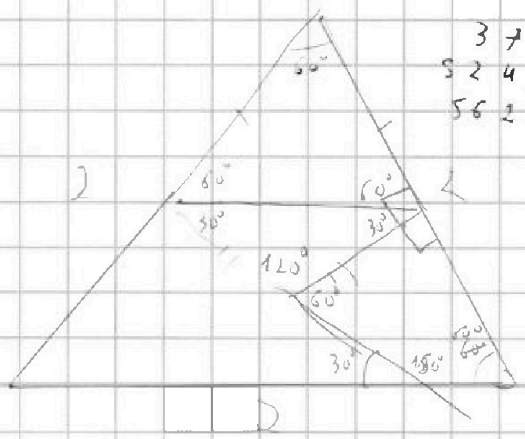
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



7499
2500
37495
52493
56242500



$\frac{2500!}{7499!} = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 \varphi^3 &= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ b_1 \varphi^9 &= x+4 \\ b_1 \varphi^{11} &= \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi^8 &= \sqrt{\frac{(15x+6) \cdot (x-3)^4}{(15x+6)}} \\ &= (x-3)^2 \\ \varphi &= \pm (x-3)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \pm b_1 \cdot (x-3)^{\frac{3}{4}} &= \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{\frac{1}{4}} \\ b_1 &= \sqrt{15x+6} \cdot (x-3)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\varphi^2 = \frac{\sqrt{15x+6}(x-3)}{x+4} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} 15x+6 &= (x+4)^2 \\ 15x+6 &= x^2+8x+16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ x &= 5 \text{ или } x = 2 \end{aligned}$$

Объем 5.

~~x = 2~~ *суммарно*

$$\begin{aligned} 2 \cos^3 x - 2 \cos x + 2 \cos x + 6 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 1 &= p \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 &= p \\ (4 \cos^3 x) + (3 \cdot 1 \cos^2 x + 2) + 3 \left(2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cos x + 1 \right) &= p \\ \left(2 \frac{2}{3} \cos x - 2 \frac{1}{3} \right) + 5 &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 \cdot \cos x &\leq 1 \\ -2 \frac{2}{3} \cos x &= 2 \frac{2}{3} \\ -2 \frac{2}{3} \cos x &\leq 2 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\cos(2x) \cos x - \sin 2x \sin x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \cos x - (2 \sin x \cos x) + 6 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) = p$$

$$\begin{aligned} (2 \cos^2 x - 1) \cdot (\cos x - 3) - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) + 6 \cos x &= p \\ -2 \cos x (-2 - \cos^2 x) &= p \end{aligned}$$