



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Пусть a - 1-ый член арифм. прогрессии,
 d - разность прогрессии. Тогда $a + 3d = 6 - 9x$,

$$a + 5d = (x^2 - 2x)^2, \quad a + 9d = 9x^2$$

~~$$a + 3d$$~~
$$a + 5d - (a + 3d) = 2d$$

$$a + 5d - (a + 3d) = (x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x) =$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 9x - 6; \quad (x^2 - 2x)^2 + 9x - 6 = 2d$$

$$a + 9d - (a + 5d) = 4d = 2 \cdot 2d$$

~~$$a + 9d$$~~

$$a + 9d - (a + 5d) = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

Умнож. $2 \cdot 2d = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$

$$2d = (x^2 - 2x)^2 + 9x - 6$$

$$9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 2(x^2 - 2x)^2 + 18x - 12$$

$$3(x^2 - 2x)^2 - 9x^2 + 18x - 9 = 0 \quad | :3$$

~~$$(x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x - 3 = 0$$~~

~~$$(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x + 1) = 0$$~~

~~$$(x^2 - 2x)^2 - (\sqrt{3}(x-1))^2 = 0$$~~

~~$$(x^2 - 2x - \sqrt{3}(x-1))(x^2 - 2x + \sqrt{3}(x-1)) = 0$$~~

~~$$x^2 - 2x - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$$~~

~~$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$~~

~~$$x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} = 0$$~~

~~$$D = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} = 7$$~~

~~$$D = 3 + 4 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 7$$~~

~~$$x = \frac{2 + \sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$~~

~~$$x = \frac{2 - \sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $x = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$.

$$3(x^2-2x)^2 - 9x^2 + 18x - 12 = 0 \quad | :3$$

$$(x^2-2x)^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$(x^2-2x)^2 - (3x^2 - 6x + 4) = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9$$

$$(x^2-2x)^2 - 3(x^2-2x) - 4 = 0$$

Замена $x^2-2x = t$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\forall t (t-4)(t+1) = 0$$

$$t = 4 \text{ или } t = -1$$

Обратная замена:

$$x^2 - 2x = 4 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x = -1$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 4 = 5$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1; x = 1 + \sqrt{5}; x = 1 - \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы макс. значение $3z = 13$, а это есть $3x + 6y$. Необходимо привести пример того, что такое возможно.
В двух нерав-вах (*) можно достигать раб-во на верхней границе

$$\begin{cases} 5y - z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}z - 5y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 4 + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5z - 10y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 4 + \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{65}{3} - 10y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15y = 12 + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y = \frac{1550}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Сущ. x для y :

$$3 \cdot \frac{5}{3} + 6x = 13$$

$$6x = 13 - 5 = 8; x = \frac{4}{3}$$

Проверим что такая пара x и y удовл. ни x и y границе также и вообще пусть подст. в изнач. систему

$$\begin{cases} \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2| \leq 2, \text{ да } y \text{ удовл.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |1| \leq 1, \text{ да } y \text{ удовл.} \end{cases}$$

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y-(2x-y) = x-2y-2x+y = -x-y \\ 2x-y-(x-2y) = x+y \end{cases}$$

Пусть $3y+6x = z$, $t = 2y+x$ $(x+y)$

$$z - 2t = 3y+6x - 4y - 2x$$

$z + t = x - 2y$ $z = y + 2x$, т.е. максимизировать можно z , значит найдем максимум z и мин. на z .

$$z - 2y = y + 2x - 2y = 2x - y; \quad \frac{z}{2} = x + \frac{y}{2}; \quad \frac{z}{2} - \frac{5}{2}y =$$

$$= x + \frac{y}{2} - \frac{5}{2}y = x - 2y.$$

Чтобы систему можно переписать в след. виде:

$$\begin{cases} |\frac{z}{2} - \frac{5}{2}y| \leq 2 \cdot 2 \\ |z - 2y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |z - 5y| \leq 4 \\ |z - 2y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq z - 5y \leq 4 \\ -1 \leq z - 2y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq z - 5y \leq 4 \cdot (-1) \\ -\frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}z - 5y \leq \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq 5y - z \leq 4 \\ -\frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}z - 5y \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

(*) Теперь сложим пер-ва

$$\begin{cases} -4 - \frac{5}{2} \leq \frac{3}{2}z \leq 4 + \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \leq 3z \leq 8 + \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -8.5 \leq 3z \leq 8 + 2.5 \\ -13 \leq 3z \leq 13 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m+2n)(m+2n-7) \quad n^3$$

$$A = 11p^2$$

$$B = mn(m+2n+9)$$

$$B = 75q^2$$

1 случай) $m+2n=1$, тогда $A = -6 \neq 11p^2$

~~2 случай) $m+2n=11$, тогда $A = 4 \neq 11p^2$~~

3 случай) $m+2n=11p^2$, тогда $A = (11p^2-7)11p^2 \neq 11p^2$

4 случай) $m+2n=p$, тогда $A = p^2 - 7p = 11p^2$

$$10p^2 = -7p$$

$$10p^2 > 0$$

$$-7p < 0 \quad \text{и. не и. д.}$$

5 случай) $m+2n=11p$, \neq тогда

$$A = 11p(11p-7) = 11p^2 \cdot 4; \quad p = 11p-7; \quad 10p=7, \quad \text{не может}$$

д.

2 случай) $m+2n=11$, тогда $A = 11 \cdot 2^2$

Уточню $m+2n=11, m=11-2n$

$\stackrel{11p^2}{=} 4q^2$

$$B = n(11-2n)(11+9) = 75q^2$$

$$n(11-2n) \cdot 20 = 75q^2$$

$$4n(11-2n) = 15q^2$$

\uparrow
четно $\Rightarrow 15q^2$ четно $\Rightarrow q$ четно

простое четно
только одно и
это 2

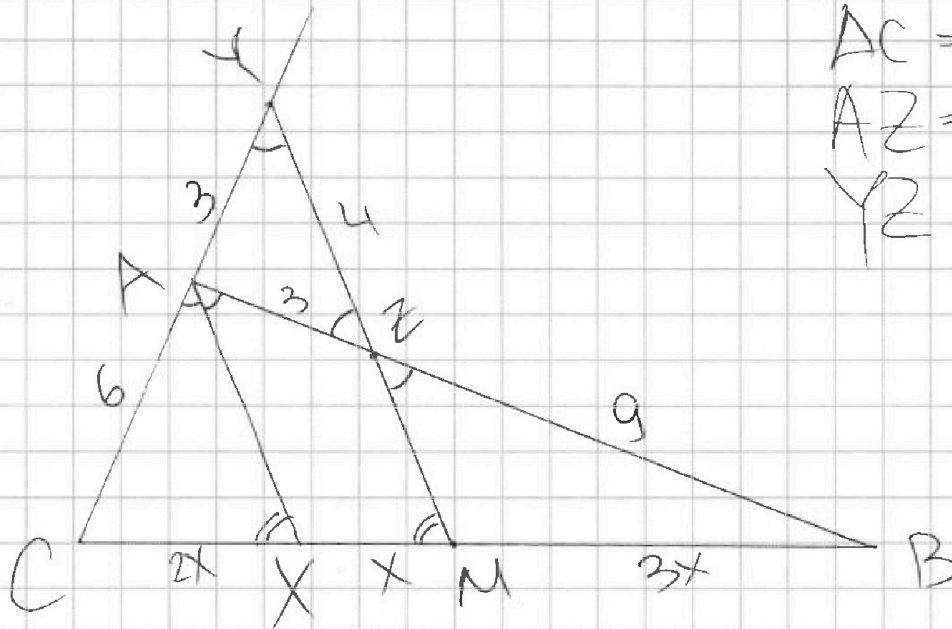


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найти: BC
AC = 6
AZ = 3
YZ = 4

AX — дис-са, M — ср. BC, раз. прямы. через M, параллельном AX пересекает AC на отрезке, то M правее X.

$\angle CYM = \angle CAX$ (соответств. при пересеч. $YM \parallel AX$ секущей CY)

$YM \parallel AX$ секущей CY

$\angle MZB = \angle XAB$ (соответственные при пересечении $AX \parallel MY$ секущей AB)

$\angle MZB = \angle AZY$ (накрест лежащие вертикальные)

$\angle AZY = \angle MZB = \angle XAB = \angle CAX = \angle AYZ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AYZ$ р/б, $AZ = AY = 3$

~~Рассм. $\triangle AYZ$ и $\triangle CAX$~~

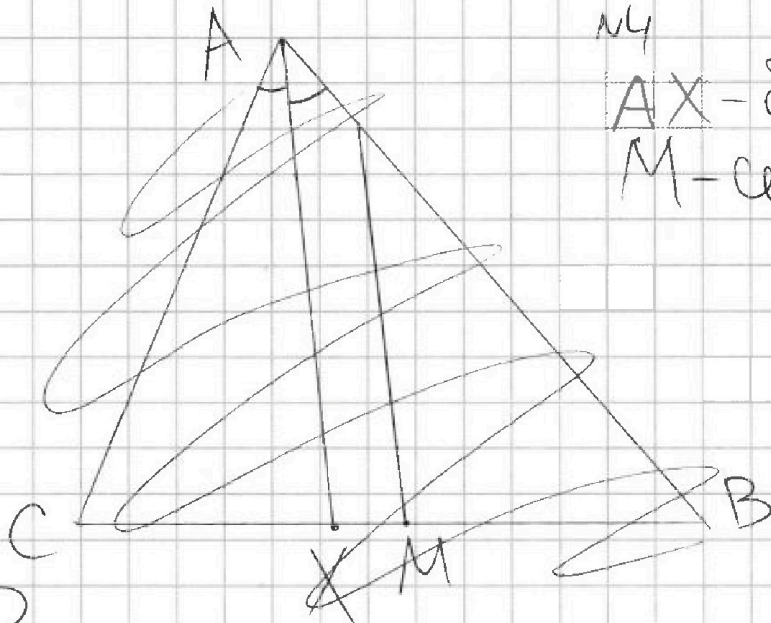


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

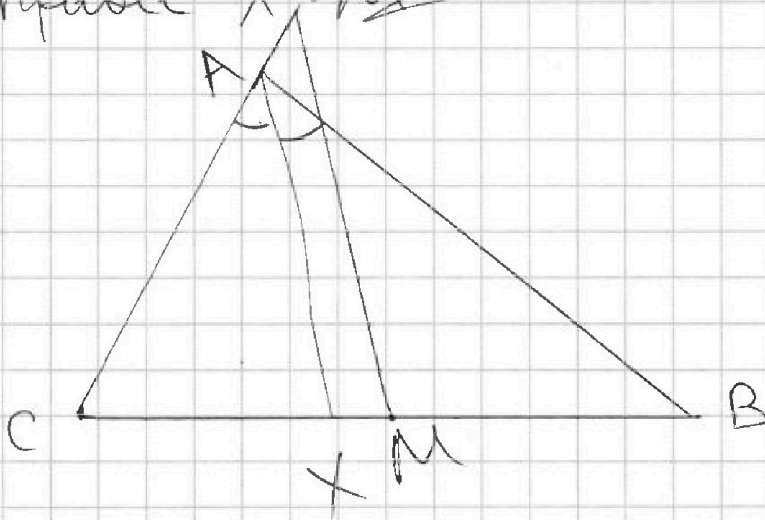


нч

AX - дис-са

M - сер. BC

Раз прямые параллельны, AX пересекает AC на ее продолжении, то M правее X .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle CAZ = \alpha$, тогда $\angle CAB = 2\alpha$,
 $\angle CAZ = \angle AZY = \alpha$.

Т. Косинусов гуд $\triangle AZY$:

$$AY^2 = AZ^2 + ZY^2 - 2 \cdot AZ \cdot ZY \cdot \cos \alpha$$

$$9 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha; \quad 24 \cos \alpha = 16$$
$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \angle CAB = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 =$$
$$= \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

Т. Косинусов гуд $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle CAB$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 180 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{9} = 180 + 16; \quad BC = \sqrt{196} = 14$$

Ответ: 14



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- 1) $\angle AYZ = \angle CYM$ - общий угол
2) $\angle AXC = \angle YMC$ (соответственные при пересечении прямых $AX \parallel MY$ секущей BC)

$$\Delta AYZ \sim \Delta CYM$$

* Рассмотрим ΔCAX и ΔCYM :

1) $\angle ACX$ - общий

2) $\angle CAX = \angle CYM$ (по доказанному выше)

$$\Delta CAX \sim \Delta CYM \text{ (по 2-м равным углам)}$$

Значит

$$\frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$3CX = 2CM$$

Пусть $CX = 2x$, тогда $CM = 3x$, $BC = 6x$,

$$MX = CM - CX = 3x - 2x = x$$

По св-ву бис-сы: $\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB}$; $\frac{1}{2} = \frac{6}{AB}$; $AB = 12$

$$AZ + ZB = 12; 3 + 2ZB = 12; ZB = 9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получ. $x=y$ в то же $y=e$.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

Обозначим $\sqrt{x+2} = u, \sqrt{7-x} = v$

Заметим $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{7-x} = \sqrt{14+5x-x^2} = uv$

Также учтем ограничения $x+2 \geq 0$

$$u - v + 7 = 2uv$$

$7-x \geq 0$
m.e.
 $-2 \leq x \leq 7$
e.op.
go to 10

Будем решать это ур-е с ур. по оп. и оп. наудр. $0 \leq x \leq 7$

ранее, а именно $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 7$

$$\sqrt{x+2} \leq \sqrt{7+2} = 3 \quad \begin{cases} x \geq 0 \end{cases}$$

пользуясь обратными

$-\sqrt{7-x} \leq 0$, также пользуясь ограничениями

Значит $\sqrt{x+2} + (-\sqrt{7-x}) + 7 \leq 17+3=10$
это левая часть ур-я

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2} - 7$$

Будем решать данное ур-е с ур. по ограничениям и опр-ям, наудр. ранее: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 7$

Возведём в квадрат обе части ур-я, что



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

Рассм. 2-ое ур-е:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0$$

$x \geq 0, y \geq 0$, т.к. находятся под корнем с множителем $\sqrt{\quad}$. С такими ограничениями справедливы следующие преобразования:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2) + 3(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \quad \text{или} \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \neq$$

$$x = y$$

с ур-я. обратим.

$$x \geq 0$$

и

$$y \geq 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 0$$

$$x^2 + xy + y^2 + 3 \geq 3$$

$$\sqrt{2} > 0$$

Значит

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2} > 0$$

равенство @ нулю достигаться не может.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим наибольшую часть
при данных оставшихся 3-х корнях
на этапе возведения в кв.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{4+5x-x^2} - 7 \geq 0 \\ 2\sqrt{4+5x-x^2} - 7 \geq 0 \end{array} \right.$$

На том этапе эти
выражения были
равны, поэтому
дост. проверить
наложим
лишь одно из
НЧХ, например,
второе

$$1) \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} = x$$

при данном x

$$\sqrt{4+5x-x^2} = \frac{5}{2}$$

$$2 \cdot \frac{5}{2} - 7 \geq 0; 1 \geq 0$$

подходит

$$2) x = \frac{5 \pm \sqrt{56}}{2}$$

при данном x

$$\sqrt{4+5x-x^2} = \frac{5}{2}$$

$$2 \cdot \frac{5}{2} - 7 \geq 0 - \text{это не так, такие } x\text{-ы}$$

не подходят

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

Чтобы мы нашли
2 допустим. зч x,
в паре к ним
идёт y равная
x.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, что обе части неотрицательны, а также обратимости:

28

$$x+2+7-x-2\sqrt{14+5x-x^2} = 4(14+5x-x^2) - 14\sqrt{14+5x-x^2} + 49$$

$$4 \cdot (\sqrt{14+5x-x^2})^2 - 12\sqrt{14+5x-x^2} + 40 = 0 \quad | :4 | :2$$

$$(\sqrt{14+5x-x^2})^2 - 3\sqrt{14+5x-x^2} + 10 = 0$$

$$\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$2(\sqrt{14+5x-x^2})^2 - 13\sqrt{14+5x-x^2} + 20 = 0$$

Замена $t = \sqrt{14+5x-x^2}$

Обр зам

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$D = 169 - 160 = 9$$

$$t = \frac{13 \pm 3}{4} = 4; \frac{5}{2}$$

$$\sqrt{14+5x-x^2} = 4 \text{ или } \sqrt{14+5x-x^2} = \frac{5}{2}$$

$$14+5x-x^2 = 16$$

$$14+5x-x^2 = \frac{25}{4}$$

(обе 7 не подходят, т.к. моменты когда б'кб.)

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$56 + 20x - 4x^2 = 25$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$\frac{D}{4} = 100 + 124 =$$

$$= 224$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{224}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{56}}{2}$$

Проверим корни на обратим.

$$0 \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \leq 7$$

$$5 + \sqrt{17} \leq 14$$

$$\sqrt{17} \leq 9, \text{ да, подходит}$$

$$0 < \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \leq 7, \text{ да, подходит}$$

$$0 < \frac{5 + \sqrt{56}}{2} < 7; 5 + \sqrt{56} < 14; \sqrt{56} < 9, \text{ да, подходит, а вот}$$

не подходит

$$\frac{5 - \sqrt{56}}{2} < 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по условию. Этого таких раскрасок:
А также порядок выбора точек не важен поэтому необходимо будет ещё разделить на 2.

$$\text{Таких раскрасок: } \frac{120 \cdot 120^{19}}{2 \cdot 4} = \frac{60 \cdot 30}{119 \cdot 15}$$

Всего раскрасок в сумме:

$$60 + 119 \cdot 15 = (4 + 119) \cdot 15 = 123 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 15 \\ \hline 615 \\ + 1230 \\ \hline 1845 \end{array}$$

Ответ: 1845



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Для начала посчитаем как-то раскрасок без использования узлов, лежащих на прямых дугах. Квадрат можно разбить на две равные части, если провести диагональ, тогда раскрас. с исп. точек, лежащих только на этих прямых переходит в себя при повороте на 180° в отличие от остальных раскрасок. Необходимо посчитать количество таких узлов и вычесть из

общего кол-ва узлов. Узлов, точек которых нет только на прямых, дугах квадрат на 2 равн. части:

$120 \cdot \frac{1}{2} = 60$ для призв. т. $\exists!$ точка

доп. ед. до T^2 наз. шими. раскраски, прием не важен порядок, мы выбираем именно пару. Теперь посчитаем кол-во раскрасок, кроме тех, что переходят в себя путем поворота на 180° . Для кол-ва из 120 т.

(кроме центра) $\exists 120$ т. в паре \exists раскраски, но если учитывать угловые,

то, получается, каждая пара "корондэт" еще в 4 раза больше еще 3 пары, а значит таким обр. их поск. в 4 раза больше раскрасок, чем нужно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

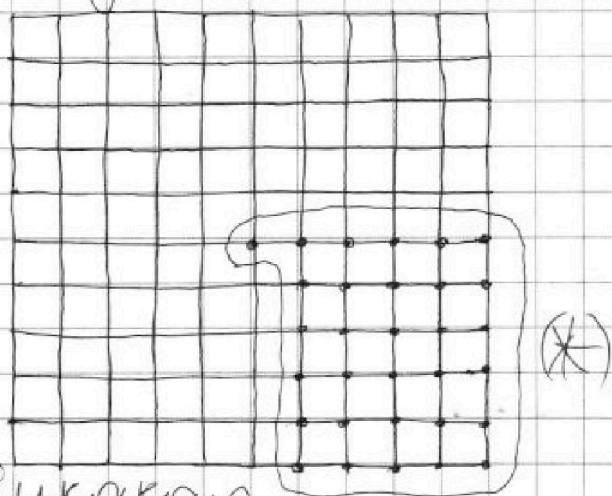
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Вело у такого квадрата 121 узел.
Рассм. часть квадрата, содержащую
56³¹ узел^{ов}, а именно:



Какая-то раскраска данной мозаики не может быть путями возврата раскраски этой же мозаики, кроме той же, так как при любом повороте 90° или транспонировании таких поворотов на месте может остаться лишь середина квадрата, а раскраска выключает 2 точки.

Тогда количество способов раскраски такой квадрат с усл. что раскраски не выпадут из группы возвратов — 30 количество способов выбрать 2 точки в такой (X) мозаике кв + это количество



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

способов выбор. такие пары точек, что

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7(m+2n)$$

$$B = mn(m+2n+9)$$

$$(m+2n)^2 - 7(m+2n) = A$$

$$B = (m+2n+9)mn; A = (m+2n)(m+2n+7)$$

$$A : m+2n$$

$$B : m, n$$

$$1) (m+2n) | (m+2n+7) = 1 | p^2$$

$$m+2n=11, \text{ тогда}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$q=2 \quad 4n(11-2n)=15 \cdot 4$$
$$n(11-2n)=15$$

1 случай: $n=1$: $15=1 \cdot (11-2)=1 \cdot 9$, нет

2 случай: $n=3$; $15=3 \cdot (11-6)=3 \cdot 5$, да
для этого $m=11-2 \cdot 3=5$
пара ~~(3; 5)~~ (5; 3)

3 случай: $n=5$; $15(11-10)=15$, нет
и случай $n=5$: $15(11-30)=15$, нет

Итого находит лишь пара
(5; 3).

Ответ: (5; 3)