



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_9 - a_3 = 6d = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow 2d = x^2 - x - 1 \Rightarrow 4d = 2x^2 - 2x - 2$$

$$a_9 - a_5 = 4d = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Заметим, что $x = -1$ удовл. уравнению \Rightarrow

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2)$$

У второй скобки есть корень $x = -1 \Rightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = (x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2)$. У ост. скобки корни

$x_1 = -1 + \sqrt{3}$, $x_2 = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow$ у уравнения 3 корня.

Проверка:

$$x = -1$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$a_3 = -3 + 3 = 0$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (1-2)^2 = 1$$

$$a_5 = 4$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 3 \Rightarrow d = 0,5 \quad a_9 = 12 - 6\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{4 - \sqrt{3} \cdot 3}{2} \sqrt{2}$$

$$a_9 = 12 + 6\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}$$

Ответ: $-1; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left[\frac{x}{3} - 1; \frac{x}{3} + 1 \right] \\ y \in [3x - 1; 3x + 1] \end{cases}$$

y найдётся, если y этих отрезков есть пересечение \Rightarrow либо левый конец первого отрезка лежит во втором, либо левый конец второго лежит в первом, или наоборот правые концы

$$1) \begin{cases} 3x - 1 \leq \frac{x}{3} - 1 \leq 3x + 1 \\ \frac{x}{3} - 1 \leq 3x - 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \leq 3x + 1 \\ \frac{x}{3} - 1 \leq 3x + 1 \leq \frac{x}{3} + 1 \end{cases}$$

Решим двойные неравенства и получим:

$$1) \begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right] \\ x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \\ x \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right] \end{cases}$$

Заметим, что в максимуме случается, чем больше x , тем больше y_{\max} , так как $\frac{x}{3} \pm 1$ и $3x \pm 1$ линейны с $k > 0$

$$\Rightarrow 4y + 3x \rightarrow \max \text{ при } x \rightarrow \max \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow 4y + 3x = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$1) A = 13p^2$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2 > 0$$

$$m+n > 0, \text{ м.к. } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n > 9$$

И.к. $A: 13$, то один из множителей: 13

$$I. (m+n): 13. \text{ В макс}$$

В формулу $A = 13p^2$ является факторизация

A . Рассмотрим, какими множителями A может быть

$m+n$

$$I. m+n \neq 1, \text{ м.к. } m, n \geq 1$$

$$II. m+n = 13$$

$$m+n=4 \Rightarrow p=2.$$

$$\text{Тогда } B = mn \cdot 10 = 75q^2 \Rightarrow 15q^2 = 2mn. \text{ Переберем}$$

все ~~нх~~ возможные решения $(3; 10)$ и $(10; 3)$

$$III. m+n = 13p \Rightarrow m+n-9 = p \Rightarrow 9 = 12p \Rightarrow \text{Крест}$$

Нен



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

IV. $m+n=13p^2 \Rightarrow m+n-3=1 \Rightarrow m+n=10 \Rightarrow$ корней нет

V. $m+n=p \Rightarrow m+n-3=13p \Rightarrow m+n-3 > m+n \Rightarrow$ корней нет

VI. $m+n=p^2 \Rightarrow m+n-3=13 \Rightarrow p^2=22 \Rightarrow$ корней нет

2) $13 = 13p^2 = mn(m+n-3)$

Переберём все значения m , а потом n

I. $m=1$

1. $n=13$

$m+n-3=11 \neq p^2 \Rightarrow$ корней нет

2. $n \neq 1$, м.к. $m+n > 3$

3. $n=p \Rightarrow m+n-3=13p=p-2 \Rightarrow$ корней нет

4. $n=13p \Rightarrow m+n-3=p \Rightarrow 13p-2=p \Rightarrow$ корней нет

5. $n=p^2 \Rightarrow m+n-3=13 \Rightarrow m+n=16 \Rightarrow A=16 \cdot 7 \neq 75p^2$

6. $n=13p^2 \Rightarrow m+n=4 \Rightarrow A=4 \cdot (-5) < 0$

II. $m=13$

1. $n \neq 1$, м.к. выражение симметрично \Rightarrow если $m \neq 1$, то $n \neq 1$

2. $n=p \Rightarrow m+n-3=p=n \Rightarrow$ противоречие, корней нет

3. $n=p^2 \Rightarrow m+n-3=1 \Rightarrow n=-9$ противоречие

III. $m=13p$

1. $n=p \Rightarrow 13p+p-3=1 \Rightarrow$ корней нет

2. $n \neq 1$ в силу симметрии

IV. $m=p$

1. $n \neq 1$ в силу симметрии; 2. $n=p \Rightarrow 2p-3=13 \Rightarrow p=8$ - корни нет

3. $n=13 \Rightarrow m+10=p^2=p+10 \Rightarrow$ корней нет

4. $n=13p \Rightarrow 14p-3=1 \Rightarrow$ корней нет

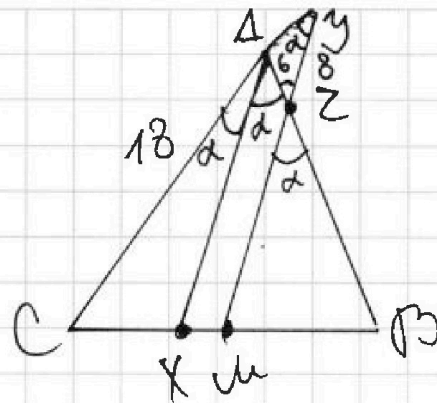


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle YAZ$ - внешний для $\angle A \Rightarrow \angle YAZ = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AZY = 480 - (180 - 2\alpha) - \alpha = \alpha$ ($\angle AZY = \angle CAZ$,
 т.к. образован пересечением паралл. прямых) \Rightarrow
 $\Rightarrow AY = AZ = 6$.

т.к. AX - биссектриса $\Rightarrow \frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$
 $\Rightarrow CX = BC \cdot \frac{AC}{AC+AB}$

т.к. $\angle CAZ = \angle CZM$ и $\angle C$ - общий, то $\triangle CAZ \sim \triangle CZM$
 $C k = \frac{18}{18+6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = k = \frac{BC \cdot \frac{AC}{AC+AB}}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{2AC}{AC+AB} = \frac{36}{18+AB} \Rightarrow AB =$

$= 30$. Заметим, что $\triangle BZM \sim \triangle BAX$ по 2 углам
 $C k = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{ZM}{AX} = \frac{4}{5}$. ВМП $x = ZM, y = AX$.

т.к. $\triangle CAZ \sim \triangle CZM$, то $\frac{YM}{AX} = \frac{6+x}{y} = \frac{6}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \\ \frac{6+x}{y} = \frac{6}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{y} = \frac{6}{15} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = 12$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ABC$ по т. косинусов

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$\triangle ZBM$

$$\begin{aligned} BM^2 &= 12^2 + 24^2 - 2 \cdot 12 \cdot 24 \cdot \cos \alpha = \\ &= 144 + 24^2 \cdot \frac{1}{3} = 12^2 \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{12 \cdot 12 \cdot 7}{3} = \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 7 \Rightarrow BM = 4\sqrt{21} \Rightarrow BC = 8\sqrt{21} \end{aligned}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $x, y \geq 0$, т.к. \sqrt{x} и \sqrt{y} определены.

Посмотрим на второе уравнение и преобразуем его

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + 1 = 0$$

Есть решение $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$.

Посмотрим на вторую скобку

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2) + (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y) + 1 = 0$$

Заметим, что т.к. $x, y \geq 0$, то оба произведения

неотрицательны \Rightarrow скобка - всегда больше \Rightarrow

$\Rightarrow x = y$ - единственное решение. Теперь подставим

в первое уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5-x^2}$$

$$\sqrt{6+5-x^2} = \sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = -(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 + (x+1) + (6-x)$$

$$\text{Введем } t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$t + 5 = -t^2 + 7 \Rightarrow t_1 = 1 \quad t_2 = -2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$x+1 = 1+6-x + 2\sqrt{6-x}$$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$x-3 = \sqrt{6-x}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6 - x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{решения } \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right) ; \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right);$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего 31 узел, значит без учета поворотов имеем C_{31}^2 раскраски. Рассмотрим, какие раскраски мы считаем сколько раз.

$n=1$, т.е. при любом повороте картинка не меняется, таких нет.

$n=2$, ситуация, когда точка 1 переходит в точку 2 при повороте двукратно \Rightarrow осевая симметрия относительно ~~всех параллельных сторон~~ центра, таких C_{31}^1

$n=3$, такой ситуации не бывает, т.к. в таком случае мы либо переходим к симметрии, а значит $n=2$, либо перехода не было \Rightarrow таких пар нет

$n=4$, все остальные, т.к. существует 3 поворота. итак $C_{31}^2 = 2 C_{31}^1 + 4x$, т.к. надо учесть $C_{31}^1 + x$, то ответ $\frac{C_{31}^2 + 2 C_{31}^1}{4}$

Ответ: $\frac{C_{31}^2 + 4 C_{31}^1}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 3x+3 &= a_3 & a_1+2d &= 3x+3 & 3\sqrt{3} \Rightarrow 4 \Rightarrow 12-6\sqrt{3} \\
 (x^2+2x)^2 &= a_5 & a_1+4d &= x^4+4x^3+4x^2 = x^2(x^2+4x+4) & d = \frac{4-3\sqrt{3}}{2} \\
 3x^2 &= a_9 & a_1+8d &= 3x^2 & x^2(x+2)^2 \\
 3(-1+\sqrt{3})+3 &= & & & 4d = 8-6\sqrt{3} \\
 = -3+3\sqrt{3}+3 = 3\sqrt{3} & & 2d=1 & & \\
 a_3+a_9 &= a_6 & d=0,5 & 4d = 3x^2 - x^2(x^2+4x+4) & \\
 a_5 = (4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2)^2 = 0 = a_3 & & & = x^2(3-x^2-4x-4) = & \\
 (1+\sqrt{3})^2 = a_9 - a_3 = 6d & \textcircled{4} & 1 = a_5 & = x^2(-x^2-4x-1) & \\
 = 4-2\sqrt{3} & & 3x^2 - 3x - 3 = 6d & 3 = a_9 & 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = \\
 & & & & = -x^4 - 4x^3 - x^2 \\
 & & x_1 = -1 & & \\
 & & x_2 = -1+\sqrt{3} & & \\
 & & x_3 = -1-\sqrt{3} & & \\
 & & x = -1 & & \\
 2x^2 - 2x - 2 = 9d & & & & \frac{a_9 - a_5}{0,5} = \frac{4 - (-6)}{0,5} = \frac{10}{0,5} = 20 \\
 3x^2 = 3 \cdot (4-2\sqrt{3}) = & & & & \frac{x^3+3x^2-2}{x+1} = \frac{x^3+x^2-4x^2-2}{x+1} \\
 = 12-6\sqrt{3} & & & & = \frac{x^2(x+1)-4x^2-2}{x+1} = \frac{x^2+x^2-4x^2-2}{x+1} = \frac{-2x^2+x-2}{x+1} \\
 & & & & = \frac{-2x^2-2x-2}{x+1} = \frac{-2(x^2+x+1)}{x+1} \\
 & & & & = -2 \frac{x^2+x+1}{x+1} \\
 & & & & = -2 \frac{x^2+2x-2}{x+1} \\
 & & & & a_9 = 12+6\sqrt{3} \\
 \textcircled{2} = 9+8 = 12 & & & & \\
 1-4+3+2-2 = 0 & & & & \\
 \cancel{3x^2} & & & & \\
 x_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3} & & & & \frac{x^3+3x^2-2}{x+1} \\
 & & & & = \frac{-8+12-2}{x+1} = \frac{4+3\sqrt{3}}{x+1} \\
 & & & & = \frac{4+2\sqrt{3}}{x+1} \\
 x_2 = -2-\sqrt{3} & & & & \\
 & & & & \frac{x^3+3x^2-2}{x+1} \\
 & & & & = \frac{-3x^3+3x^2-2x-2}{3x^3+3x^2} \\
 & & & & = \frac{-2x-2}{-2x-2} = \textcircled{4} \\
 & & & & (4+2\sqrt{3} - 2-2\sqrt{3})^2 = \textcircled{4}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$1) A = 13p^2$$

$$B = 75q^2$$

$$A = 13p^2 : 13 \Rightarrow (m+n) : 13 \text{ или } (m+n-9) : 13$$

$$I. m \equiv -n \pmod{13} \Rightarrow (m+n-9) \equiv 4 \pmod{13} \quad mn(m+n-3) = 13p^2$$

$$13k+4 \equiv p \pmod{13}$$

$$k=1$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$1) \begin{matrix} m+n = 13 & 1 \\ m+n-9 = p^2 = 4 & 13 \end{matrix}$$

$$2) \begin{matrix} m+n = 13p & p \\ m+n-9 = p & 13p \\ & p^2 \\ & 13p^2 \end{matrix}$$

$$9 = 12p$$

нет корней

$$3) \begin{matrix} m+n = p & \wedge \\ m+n-9 = 13p & \vee \end{matrix}$$

прямое противоречие
 $m+n = 22 \neq p^2$

$$4) \begin{matrix} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{matrix}$$

$$m+n > 9 \quad A = 16 \cdot 7 \cdot 75q^2$$

никогда

$$13p^2 \geq 52$$

$$75q^2 \geq 300$$

$$3 \cdot 5^2 \cdot q^2$$

$$\begin{matrix} m+n-3 = 13 \\ m+n = 16 \end{matrix}$$

$$m = 13$$

$$n = 1$$

$$m-2 = p^2 = 11x$$

$$\begin{matrix} n = p \\ m+n-3 = p \end{matrix}$$

$$10 mn = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$2mn = 15q^2$$

$$m+n = 13$$

$$m = 3$$

$$n = 10$$

$$(3, 10)$$

$$13 \cdot 4$$

$$3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$V. m = p^2$$

$$1. n = 1 \Rightarrow m + n - 3 = 13 = p^2 - 2 \Rightarrow p^2 = 15 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

$$2. n = 13 \Rightarrow m + n - 3 = 1 \Rightarrow p^2 + 10 = 1 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

$$VI. m = 13p^2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \text{Корней нет}$$

Итого получили решения $(3; 10)$; $(10; 3)$

Ответ: $(3; 10)$; $(10; 3)$

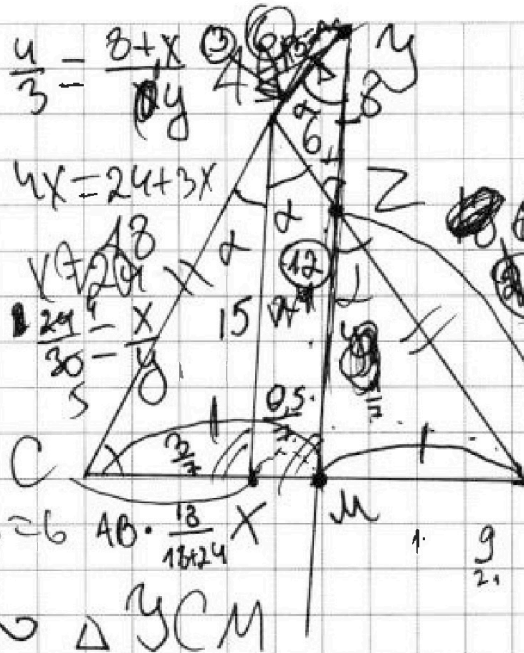


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{24}{18} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4c}{4c+AB}}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{AC+AB}{2AC}$$

$\triangle ACX \sim \triangle YCM$

$$\frac{4}{3} = \frac{18+AB}{18}$$

$$\frac{18+X}{18} = \frac{CX}{CM}$$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{AC}{AC+AB} = \frac{2AC}{AC+AB}$$

$AB = 6$

$$\frac{4}{3} = \frac{18+AB}{36} \Rightarrow AB = 30$$

$$\frac{AC+X}{AC} = \frac{2AC}{AC+AB}$$

$$\frac{21}{18} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}$$

$$AC+X = AB-3$$

$$18 + \frac{AB-18}{2} = AB-3$$

$$\frac{AC+X}{AC} = \frac{AC+AB}{2AC}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

$$18 - 9 + \frac{AB}{2} = AB - 3$$

$$2AC + 2X = AC + AB$$

$$\sqrt{10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} - \frac{8}{15}$$

$$\frac{AB}{2} = 12$$

$$24^2 = 400 + 160 + 16 = 576$$

$$X = \frac{AB-AC}{2}$$

$$AB = 24$$

$$2AC + 2X = AC + AB$$

$$\frac{8}{15} = \frac{8}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{CX}{AB} = \frac{AC}{AC+AB}$$

$$2AB - 6 = AC + AB$$

$$\sqrt{AB^2} = 144 + 576 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 24 \Rightarrow y = 15$$

$$= 720 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 24 = 720 - 384 = 336$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$> 0 \Rightarrow x = y$ — единственное решение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{-x^2+5x+6} = \sqrt{(6-x)(x+1)} \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{x+1})^2 + \checkmark$$

$$x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) \quad (\sqrt{6-x} + \sqrt{x+1})^2 + 6\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)} - (\sqrt{6-x})$$

$$\sqrt{(6-x)(x+2)} + \sqrt{(5-x)(x+1)} - 5 = 0$$

$$(6-x)(x+2) = 25 + (5-x)(x+1) - 10\sqrt{(5-x)(x+1)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = -(\sqrt{6-x} - \sqrt{x+1})^2 + x+1+6-x$$

$$t + 5 = -t^2 + 7 \quad t^2 + t - 2 = 0 \quad t = -1 \quad t = 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & [3x-1; 3x+1] \\ & \left[\frac{x}{3}-1; \frac{x}{3}+1 \right] \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+1} \sqrt{6-x} = \sqrt{6x}$$

$$\frac{x}{3}-1 \leq 3x-1 \leq \frac{x}{3}+1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{5}{4}; \frac{13}{4} \right]$$

$$x-3 \leq 9x-3 \leq x+3$$

$$\left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right]$$

$$x-3 \leq 9x-3$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$x \leq 9x \Rightarrow x \geq 0$$

$$9x \leq x+6$$

81 yzid

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2) + 5(x-y)(x+y) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} 3x & \leq 6 \\ x & \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$x \in \left[0; 3 \frac{3}{4} \right]$$

$$4 \left(\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{5}{4} \right) = 6 + 5 = 11$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 3x+1$$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) =$$

$$9x-3 \leq x-3 \leq 9x+3$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$8x \leq 0$$

$$x-3 \leq 9x+3 \quad \beta = \max_{mn} (m+n-3)$$

$$x \leq 0$$

$$-6 \leq 8x$$

Всего

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) \geq \frac{3}{4}$$

$$x \in \left[-\frac{3}{4}; 0 \right]$$

C₂

$$x, y \geq 0$$

~~81~~

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 \leq 3x+1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1$$

$$3x-1 \leq \frac{x}{3}+1 \cdot 3$$

$$\frac{x}{3}+1 \leq 3x+1$$

$$x-3 = \sqrt{6-x}$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$x \cdot x \leq 9x$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{aligned} 8x & \leq 6 \\ x & \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6 - x$$

$$0 \leq 8x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \quad x+1 = 1+6-x+2\sqrt{6-x}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \in [-1, 1] \quad |3x| > \left| \frac{x}{3} \right|$$

$$x: y \geq \frac{3x-1}{3x-1} \quad x-3y \geq -3 \quad 1-3y \geq -3 \quad y \leq \frac{4}{3}$$

$$4(2x + \frac{y}{3}) \Rightarrow \max \Rightarrow y+2x \Rightarrow \max \quad y \leq \frac{4}{3} \quad 3|x| \geq \frac{1}{3}|x|$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -4+3 \leq 3x-x-y+3y \leq -2 \text{ верно} \\ 2 \leq 2x+2y \leq -2 \\ 3x-y \leq 3 \quad 1 \leq \quad 1-3y \leq 3 \\ -4 \leq 4x-4y \leq 4 \quad 3x-3 \leq y \geq 3y-x \geq -3 \quad y \leq -\frac{2}{3} \\ -1 \leq x-y \leq 1 \quad y \leq \quad 1 \geq 3 \quad |x+y| \leq 2 \\ |x-y| \leq 1 \quad 3 \geq 3y-x \geq -3 \quad x \in [-1, 1] \\ y=3 \quad |3x-y| \leq 1 \quad 1 \geq x-y \geq -1 \quad \Downarrow \quad |2x+y| \leq 3 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y \in [-2, 2] \\ y \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right] \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 \geq y-3x \geq -1 \\ 3x-y \geq 1 \quad 1 \geq x-y \geq -1 \\ 3x+1 \geq y \quad 2 \geq -2x \geq -2 \\ 1 \geq x \geq -1 \quad v=1 \\ -4 \leq 2x+2y \leq 4y=2 \\ x=1 \quad (1-2) \leq 3 \quad x \leq \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \quad 3x-1 \leq \frac{4}{3}+1 \quad 3-y \geq -1 \quad y \geq -\frac{4}{3} \quad x-3y \leq 3 \\ x(3-\frac{1}{3}) \leq 2 \quad \frac{5}{3} \leq 1 \quad y \leq 4 \quad 2 \leq y \quad x-3 \leq 3y \\ -3 \leq 3y-x \leq 4y \quad 3-y \leq 1 \quad y \geq \frac{x}{3}-1 \leq y \\ \frac{2}{3}x \leq 2 \quad -1 \leq 3x-y \leq 1 \quad 3-y \leq 1 \quad 1 \quad y \geq \frac{x}{3}-1 \leq y \\ 4(2x + [3x-1; 3x+1]) \quad x-3y \geq -3 \quad x+y \geq 3 \end{matrix}$$

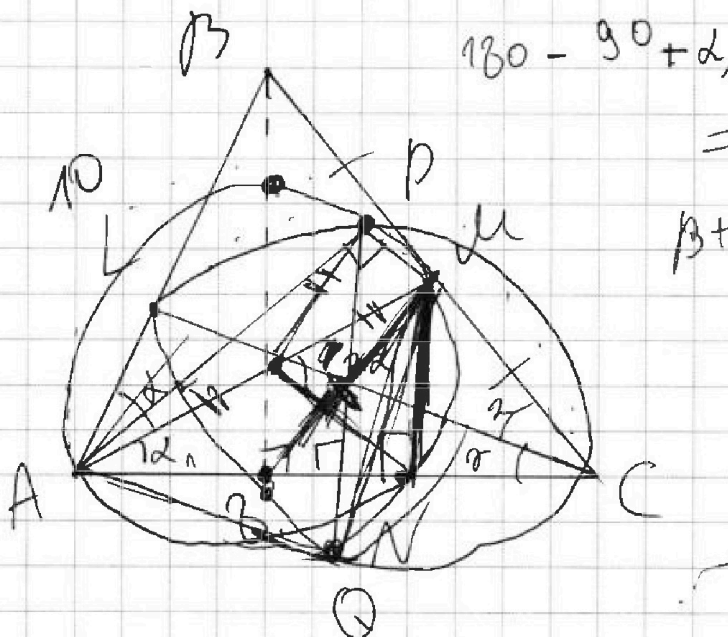


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - 90 + \alpha_1 - 90 + 2\beta =$$

$$= \alpha_1 + 2\beta$$

$$\beta + \alpha_2 +$$

$$\frac{MC}{BC} = \frac{BM}{MN} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

