



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad 8x+3=a_3, \quad (x^2+2x)^2 = x^2(x+2)^2 = a_5, \quad 3x^2 = a_9$$

т.к. a_3, a_5 и a_9 члены арифм. прогр. $\Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_1 + 2b \\ a_5 = a_1 + 4b \end{cases} \Rightarrow$

$$\rightarrow a_5 - a_3 = 2b$$

$$\rightarrow a_9 - a_5 = 4b \Rightarrow \begin{cases} a_9 = a_1 + 8b \end{cases} \Rightarrow \Delta(a_5 - a_3) = (a_9 - a_5) \Rightarrow \text{Заменим это}$$

$$\Delta(x^2(x+2)^2 - 8(x+1)) = 3x^2 - x^2(x+2)^2$$

$$3x^2(x+2)^2 - 8(x+1) - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x+2)^2 - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2+4x+4) - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 2 - x^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Запишем в свободной форме это выражение

$$\Downarrow (x^2+2x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

$$\text{1) } x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow a_3=0, \quad a_5=1, \quad a_9=3$$

$$\text{2) } x^2+2x-2=0 \Rightarrow \Delta=4+4\cdot 2=12 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{a) } x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow a_3 = -3\sqrt{3}, \quad a_5 = 4, \quad a_9 = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$\text{б) } x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 3\sqrt{3}, \quad a_5 = 4, \quad a_9 = 12 - 6\sqrt{3}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2
$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 3 \end{cases}$$
 1) Заметим, что $|x-3y| = |3y-x|$ и $|3x-y| = |y-3x| \Rightarrow$

2) ~~$8+8 \leq |x-3y| + |3x-y| = |3y-x| + |y-3x|$~~

$8+1 \geq |x-3y| + |3x-y| = |3y-x| + |3x-y| \geq |2y+2x| \Rightarrow$
по пер. бу А

$\Rightarrow 4 \geq |2y+2x| \Rightarrow 2 \geq |x+y| \Rightarrow 8 \geq 4|x+y| = |4x+4y|$ (*)

2) Сделаем еще раз аналогично:

$2+3 \geq |x+y| + |3x-y| \geq |x+y+3x-y| = |4x|$
 $3 \geq |4x|$ (**)

3) Сейчас смотрим на * и ** :

$11 = 8+3 \geq |4x+4y| + |4x| \geq |8x+4y| \geq 8x+4y$

Максимальное зн. $3x+4y$ это 11
при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{N3} \quad A &= m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9) \\ B &= m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) \end{aligned}$$

1) Заметим, что A обязательно четное, т.к. либо $m+n$, либо $m+n-9$ одет. четное \Rightarrow и само A четное

① пусть $A = 13p^2$, $B = 75q^2$

т.к. A чет., а p простое $\Rightarrow p = 2 \Rightarrow A = 13 \cdot 2^2 = 52$

$$(m+n)(m+n-9) = 52, \quad m+n = t \Rightarrow t(t-9) = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 9t - 52 = 0 \Rightarrow (t-13)(t+4) = 0. \quad \text{Если } t = -4, \text{ то}$$

противоречие, т.к. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in \mathbb{N} \Rightarrow t = 13 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m+n = 13 \Rightarrow m+n-3 = 10$$

т.к. $m+n = 13 \Rightarrow$ они разной четности (m и n) $\Rightarrow mn$ - четное \Rightarrow

$$\Rightarrow B \text{ - четное} \Rightarrow \text{т.к. } q \text{ простое } q = 2 \Rightarrow B = 75 \cdot 4 = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mn(m+n-3) = 300, \text{ т.к. } m+n-3 = 10 \Rightarrow mn = 30 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m=10 \\ n=3 \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} m=3 \\ n=10 \end{matrix}, \text{ т.к. все симметрично}$$

② пусть $A = 75q^2$, $B = 13p^2$

Аналогично, т.к. A чет. $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow A = 75 \cdot 4 = 300 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 300, \quad t = m+n \Rightarrow t(t-9) = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 9t - 300 = 0 \Rightarrow D = 81 + 1200 = 1281, \text{ но } 35^2 = 1225, \text{ а}$$

$$36^2 = 1296 \Rightarrow 1281 \text{ не квадрат} \Rightarrow \text{решения в } \mathbb{N} \text{ числах нет}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеется у нас всего 2 решения: $(m, n) = (10, 3) = (3, 10)$

Ответ: $(m, n) = (10, 3)$

$(m, n) = (3, 10)$

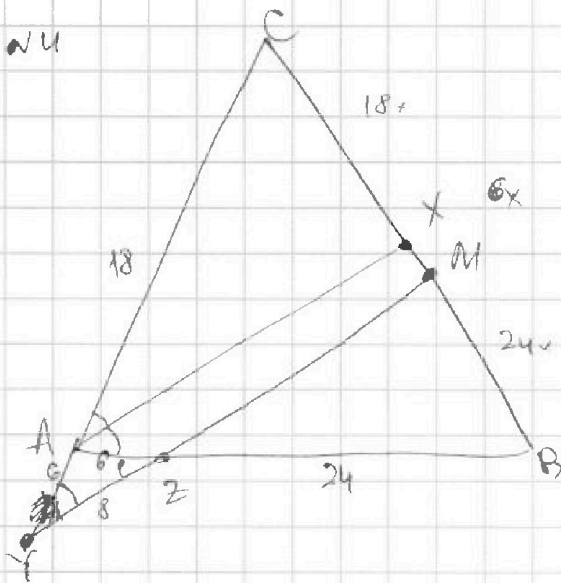


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $CM=MB$, $AX \parallel BM \perp AB$
 $AC=18$, $AZ=6$, $YZ=8$

1) Т.к. $AX \parallel BM \Rightarrow \angle CAH = \angle CMH$
 (соотв. углы)

$\angle AZY = \angle ZAX$ (накрест. лем.)

\Downarrow

$\angle CYM = \angle AZY$

\Downarrow

$\triangle AYZ$ - равнобедрен

\Downarrow

$AY = AZ = 6$

2) Т.к. $AX \parallel BM$ по т. Фалеса: $\frac{AC}{YA} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow \frac{CX}{XM} = \frac{18}{6} \Rightarrow$

\Rightarrow Пусть $CX = 18x$, $XM = 6x$.

3) Т.к. $CM=MB \Rightarrow MB = 18x + 6x = 24x$

4) Т.к. $AX \parallel BM$ по т. Фалеса: $\frac{XM}{MB} = \frac{AZ}{ZB} \Rightarrow ZB = \frac{MB \cdot AZ}{XM} = \frac{24x \cdot 6}{6x} = 24$

5) по т. кос. для $\triangle AYZ$ найдем $\cos \angle YAZ$.

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \angle YAZ \cdot AY \cdot AZ$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cos \angle YAZ \cdot 36$$

$$2 \cos \angle YAZ \cdot 36 = 36 \cdot 2 - 64 = 8$$

$$\cos \angle YAZ = \frac{8}{2 \cdot 36} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \angle CAB = \cos(180^\circ - \angle YAZ) = -\frac{1}{9}$$

6) по т. кос. для $\triangle ABC$ найдем BC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle CAB \cdot AC \cdot AB$$

$$BC^2 = 18^2 + 30^2 + \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{9}$$

$$BC^2 = 18^2 + 30^2 + 4 \cdot 30 = 324 + 900 + 120 = 1344 = 64 \cdot 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 8\sqrt{21} \quad \text{Ответ: } BC = 8\sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ -x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x^2+5y^2} \end{cases}$$

1) Заметим, что $x, y > 0$, т.к. есть \sqrt{x} и \sqrt{y}

2) $x^4 + 5x^2 - y^4 - 5y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$
 $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$
 ~~$(x+y)(x-y)(x^2+y^2) + 5(x^2-y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$~~

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x+y)(x-y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

Если $\sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = -1 \Rightarrow$ ~~н.п.~~

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0 \\ x+y > 0 \\ x^2 + y^2 + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x=y$$

3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+1} + 2$$

Пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t \Rightarrow t^2 = t + 2$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

1 случай $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2$. Возведем в квадрат.

$$(x+1) + (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \quad . \text{ Возведем в кв. (не забудем про ограничение!)}$$

$$4(x+1)(6-x) = 9$$

$$4(-x^2 + 5x + 6) = 9$$

$$-4x^2 + 20x + 24 = 9$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 20^2 + 16 \cdot 15 = 400 + 240 = 640 \Rightarrow x = \frac{20 \pm 8\sqrt{10}}{8} = 2,5 \pm \sqrt{10}$$

Т.к. $x > 0 \Rightarrow$ нам подойдет только $x = 2,5 + \sqrt{10}$

(также заметим, что $6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow 2,5 + \sqrt{10} \leq 6$, т.к.

$$\sqrt{10} \leq 3,5)$$

2 случай $t = -1 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -1$

$$\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{6-x}$$

~~$\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{6-x}$~~ Возведем в квадрат

~~$$(x+1) + 1 + 2\sqrt{x+1} = 6-x$$~~

$$(x+1) + (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$4 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \Rightarrow \sqrt{(x+1)(6-x)} = 1,5 \Rightarrow (x+1)(6-x) = 2,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x + 6 = 2,25 \Rightarrow x^2 - 5x + 3,75 = 0 \Rightarrow D = 25 - 15 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{2} \quad \text{Оба } x \text{ подходят по ограничению } \Rightarrow$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = 2,5 + \sqrt{10} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$



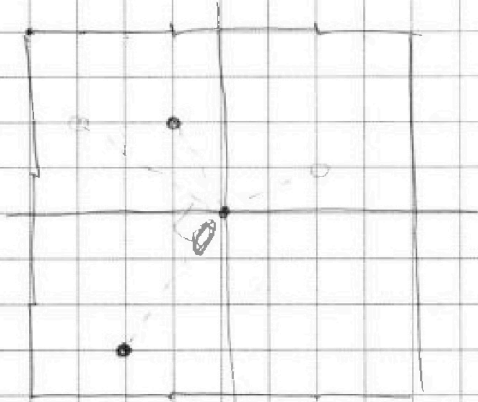
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



~~Всегда~~
~~С~~
~~Всегда~~

1) Всего узлов сетки $9 \cdot 9 = 81$

2) $C_{81}^1 \rightarrow$ кол-во способов выбрать 1-го перекрашиваемого узла

$C_{80}^1 \rightarrow$ кол-во способов выбрать второй узел

3) Заметим, что каждую раскраску мы посчитали 8 раз, т.к. покрутим раскраску на 45° и получим такую же (то же самое считается одинаковым). Повернуть мы можем 4 раза. А также мы должны учесть порядок выбора точек \Rightarrow каждую посчитали еще 2!

раз \rightarrow каждую раскраску посчитали $4 \cdot 2! = 8$ раз \Rightarrow

\Rightarrow всего способов $N = \frac{C_{81}^1 \cdot C_{80}^1}{8} = \frac{81 \cdot 80}{8} = 81 \cdot 10 = 810$

Ответ: 810

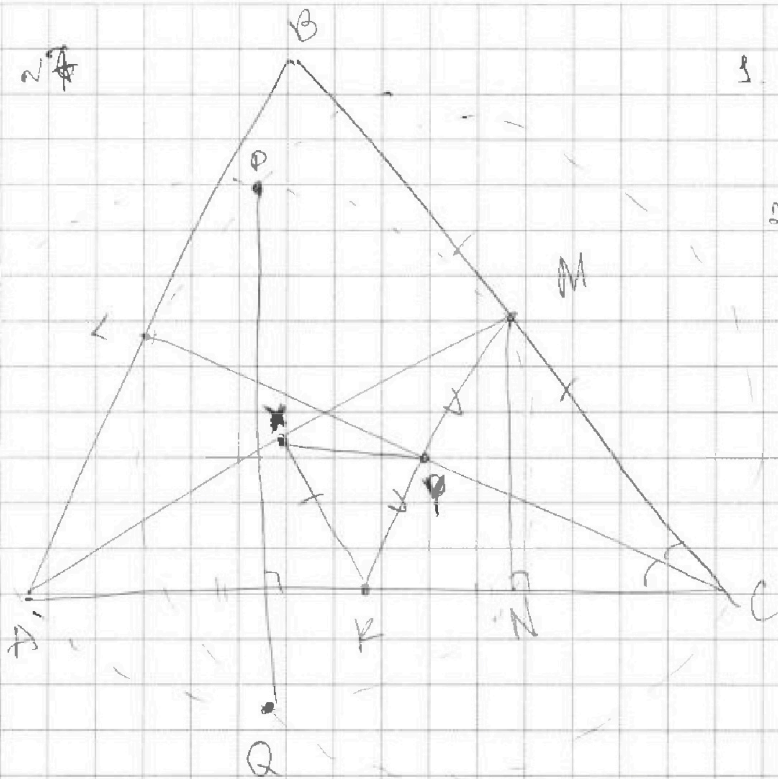


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



3. $\angle MNA = 90^\circ$ - т.к. отрезается
на диаметре.

2. X, Y - середины
AM и CN

Заметим, что XY \parallel AC,
т.к. XY - линия центров \rightarrow
 \rightarrow XY \perp PQ, а PQ \perp h,
а h \perp AC \rightarrow XY \parallel AC

3) XK - ср. линия $\triangle AXK \Rightarrow XK \parallel MC$ и $XK = \frac{MC}{2}$
MK - ср. линия $\triangle ABK \Rightarrow MK \parallel AB$ и $MK = \frac{1}{2} AB = 5$

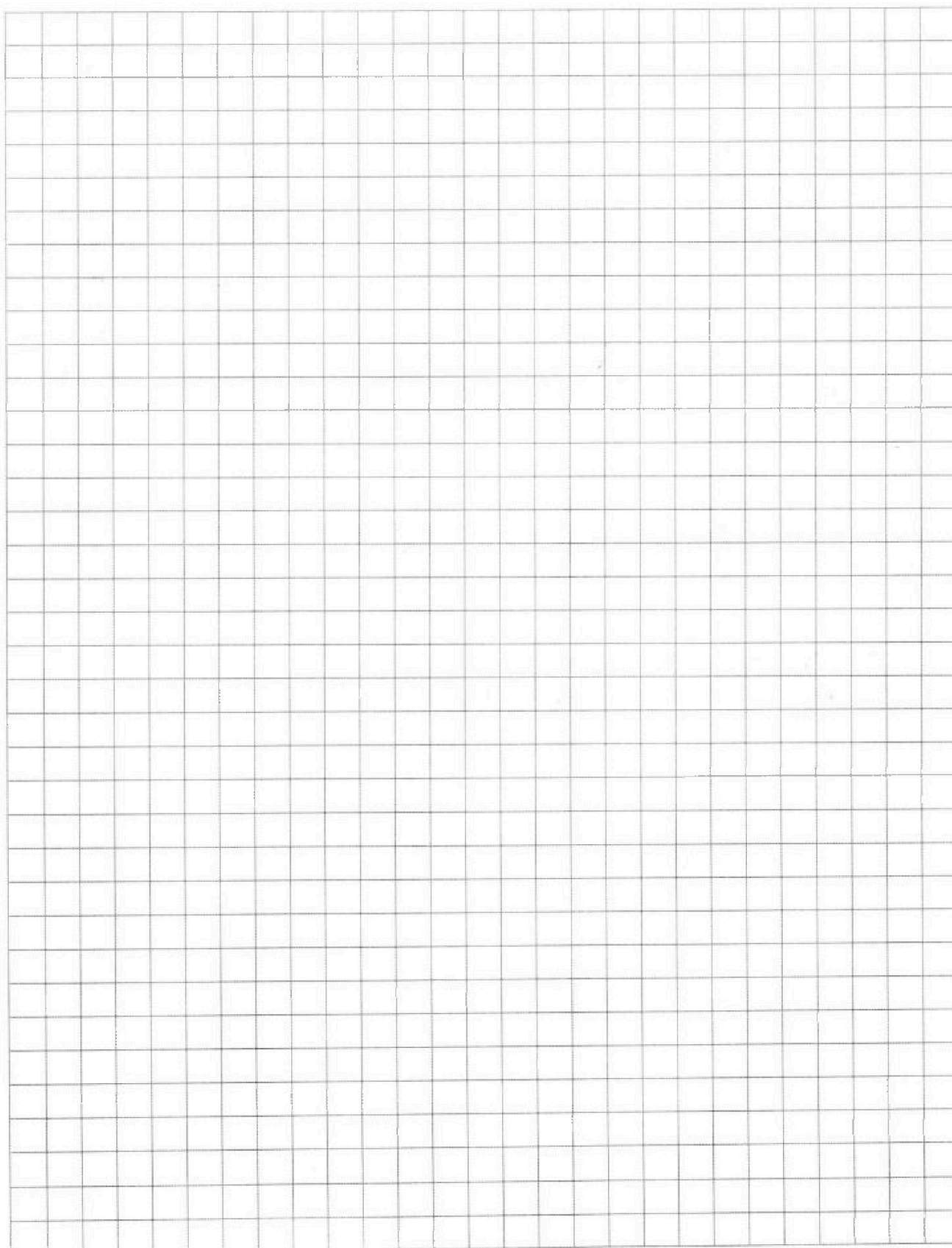


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3 = 3(x+1) \cdot a_1 \cdot 2^6$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = x^2(x+2)^2 \Rightarrow 2(x^2(x+2)^2 - 3(x+1)) = 3x^2 - x^2(x+2)^2$$

$$a_9 = 3x^2 \quad \begin{matrix} 1188 \\ 1188 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x^2(x+2)^2 - 6(x+1) - 3x^2 = 0 \\ x^2(x+2)^2 - 2(x+1) - x^2 = 0 \\ x^2(x^2 + 2x + 4) - 2(x+1) - x^2 = 0 \\ x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$x^2(x+2)^2 - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 2x + 4) - 2(x+1) - x^2 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ x^4 + x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline -2x - 2 \\ - \frac{-2x - 2}{0} \end{array}$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x(x^2 + x - 1) = 2$$

$$\left(\begin{array}{l} x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \\ 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \end{array} \right) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2) = (x+1)(x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 2$$

$$+ 2x^3 + 2x^2 = 2x(x+1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0 \\ (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0 \end{array} \right.$$

$$(x+1)(x-1)(x^2 + 2x + 2) - 2x = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - 2x - 2 - 2x) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x^2(x+1) = 2(x+1)$$

$$(x+1)^2(x^2 - 2) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 + 2x^3 - 4x + x^2 - 2 = x^4$$

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 4x + x^2 + 2x - 2}{x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2}$$

$$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-2) = 0$$

$$1) x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 3x + 3 = 0$$

$$3x^2 \neq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$(x^2 + 5y^2 - \sqrt{y}) = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$6-y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 6$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$(x^2+2x+1)(y^2+2y+2)$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4y^2 - 4y + y^2 + 2y - 2$$

$$y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y - 2$$

$$6+5x-y^2 \geq 0$$

$$(1-2\sqrt{3}) \cdot (4+2\sqrt{3})$$

BN || PQ

$$-x^2 + 5x + 6 \geq 0$$

$$AB=10$$

$$AN=8$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$$4+9\sqrt{3}$$

$$(x-6)(x+3) \leq 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$4-9\sqrt{3}$$

$$(x-6)(x+3) \leq 0$$



$$5-7 = -2$$

$$(5-7)^2 = 4$$

$$t=2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = 2$$

$$\frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 (x+1) + (6-x) - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 5$$

$$4(x+1)(6-x) = 25$$

$$(x+1)(6-x) = 6,25$$

$$-x^2 + 5x + 6 = 6,25$$

$$x^2 - 5x + 0,25 = 0 \quad D = 25 - 4 \cdot 0,25 = 24$$

$$(1+\sqrt{3})^2 = (1+3+2\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3}$$

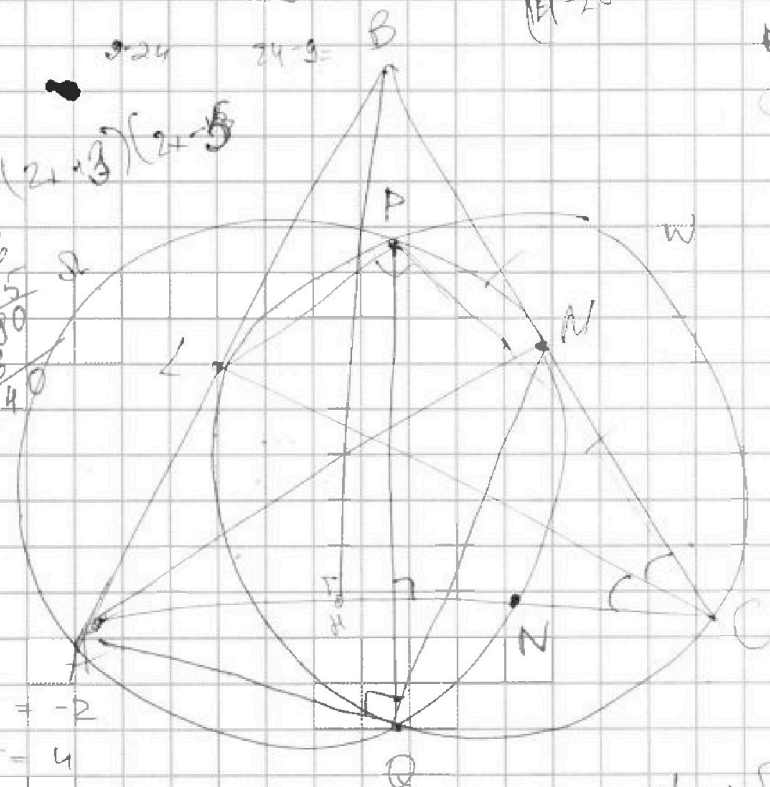
$$(1-\sqrt{3})^2 = (1+3-2\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}$$

$$16 - 4 \cdot 8 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm 2}{2} \in \left\{ \frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$(2+3)(2-5)$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 15 \\ \hline 80 \\ \times 16 \\ \hline 240 \end{array}$$



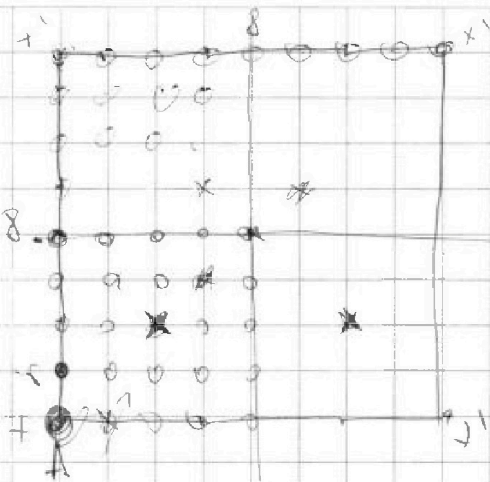


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

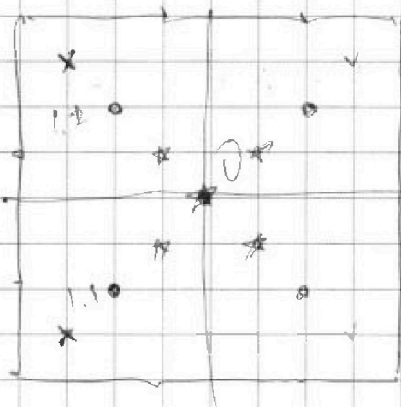


Узлов: $3 \cdot 3 = 9$

Посмотрим на пары узлов и точки которые есть в зоне A

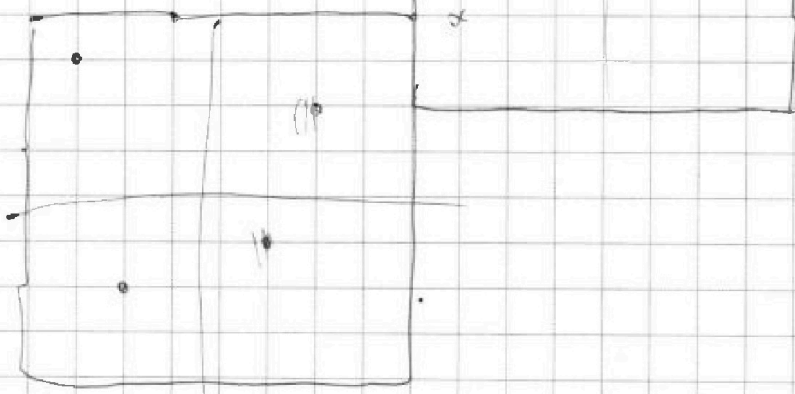
1) Узлы сами не подходят.

C_{11} ← первый узел
 C_{20} ← второй узел



Каждую раскраску
рассчитаем в раз

Сколько их





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - y^4 + 5x^2y^2 = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x} \quad , x, y > 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y)(x^2 + y^2 + 5) = -1$$

Такое невозможно, т.к.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0 \\ x + y > 0 \\ x^2 + y^2 + 5 > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow x = y$$

$$x \in [0; 6]$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$2\sqrt{5} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$A \quad y = 2+2$$

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+1} + 2$$

$$\cancel{x+1} + \cancel{6-x} - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+1} + 2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$$

$$t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \quad D = 1+4$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

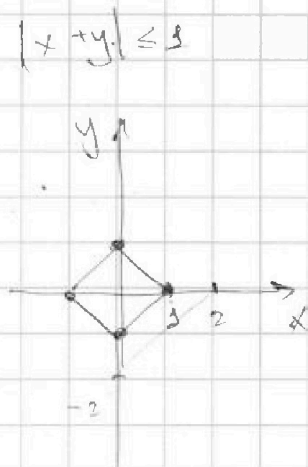


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$|x+y| = 3$$

№2

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 3$$

~~$$|x-3y| + |3x-y| \geq |x+3x-3y-y|$$~~

$$|x-3y| + |3x-y| = |x-3y| + |y-3x| \geq |-2x-2y|$$

$$4 \geq |x-3y| + |3x-y| \geq |4x-4y|$$

$$1 \geq |x-y|$$

~~$$4 \geq |x-3y| + |y-3x-y| = |3y-x| + |3x-y| \geq |2|$$~~

$$4 \geq |x-3y| + |3x-y| = |3y-x| + |y-3x| \geq |4y-4x|$$

$$11 = 2 \geq |x-y| + |3x-y| \geq |4x-2y|$$

$$1 \geq |2x-y|$$

$$\frac{9 \cdot 8^2}{4}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{15}{4} = -3$$

$$\frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$

~~$$4 \geq |3y-x| + |3x-y| \geq |2x+2y|$$~~

$$2 \geq |x+y| \rightarrow 8 \geq |4x+4y|$$

$$2 \cdot 1 = 3 \geq |x+y| + |3x-y| \geq |4x|$$

~~$$\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$~~

$$11 = 3 + 8 \geq |4x+4y| + |4x| = |8x+4y|$$

(11)

$$y = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_2 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_3 = a_1 + 2b$$

$$a_5 = a_1 + 4b$$

$$a_9 = a_1 + 8b$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x)^2 - 3x + 3 = 2b$$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 4b$$

$$\begin{cases} x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 3x + 3 = 2b \\ 3x^2 - x^4 - 4x^2 - 4x^3 = 4b \end{cases}$$

(*)

$$(x^2 + 2x)^2 > 0$$

$$3x^2 > 0$$

$$x^2 > 0$$

$$3x^2 - 3x + 3 = 6b$$

$$x^2 - x + 1 = 2b$$

$$(x^2 + 2x)^2 = x^2(x+2)^2$$

$$x^4 + 3x^2 + 4x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$(x^2 + 2x)(x^2 + x)$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x^2 + 2x^3 - 2x + 2 = 0$$

$$(x^2 + x)^2 - (x+1)^2$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 1)$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 - (x^2 + 2x + 1)$$

$$4y + 8x = 4(y + 2x)$$

$$x - 3y = 3$$

$$3y = x - 3$$

$$-3 \leq x - 3y \leq 3$$

$$y = \frac{x}{3} - 1$$

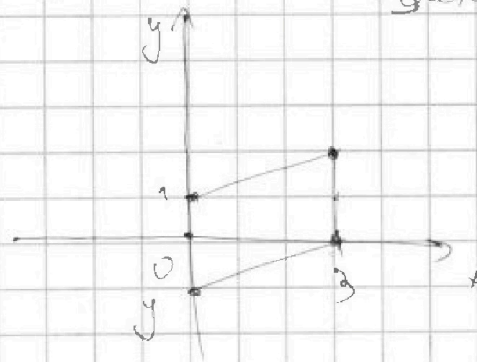
$$N2 \int |x - 3y| \leq 3$$

$$\int |3x - y| \leq 3$$

$$x - 3y = -3$$

$$3y = x + 3$$

$$y = \frac{x}{3} + 1$$



$$x + 3y = -3$$

$$3y = -x - 3$$

$$y = -\frac{x}{3} - 1$$

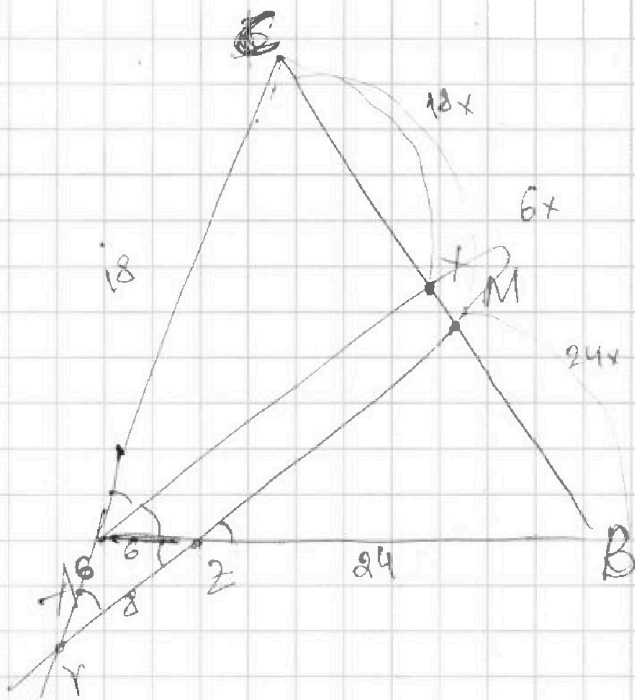


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$18 \cdot 6 = 72$$

$$AC = 18$$

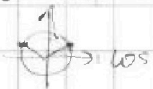
$$\frac{BZ}{ZA}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 21 \\ \hline 128 \\ + 64 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$\triangle AZY$ - равнобедренный

$$\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} = \frac{18}{30} \sin$$

$$\frac{18x}{30x}$$



по $\cos \angle YAZ$:

$$64 = 36 + 36 - 2 \cos \angle YAZ \cdot 36$$

$$2 \cos \angle YAZ \cdot 36 = 72 - 64 = 8$$

$$\cos \angle YAZ = \frac{8}{2 \cdot 36} = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 30$$

$$324 + 900 + 4 \cdot 30 = 324 + 900 + 120 = 324 + 1020 =$$

$$1344$$

$$BC = \sqrt{1344}$$

$$\frac{90}{24} = \frac{A \cdot 6}{A}$$

$$30A = 24A + 6$$

$$6A = 6$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ + 1140 \\ \hline 1444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 900 \\ \hline 1224 \\ + 120 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 900 \\ + 120 \\ \hline 1020 \\ + 324 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1344 \cdot 4 \\ - 12 \cdot 36 \\ \hline 14 \cdot 36 \\ - 12 \cdot 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 336 \cdot 4 \\ - 32 \cdot 84 \\ \hline 16 \cdot 84 \\ - 16 \cdot 121 \\ \hline 8 \cdot 121 \\ - 8 \cdot 21 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 2 \\ \hline 72 \\ - 69 \\ \hline 3 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n^2 + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$1) A = 13p^2 = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = 75q^2 = mn(m+n-3)$$

$$p^2 \cdot 3$$

$$mn \cdot 3 \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 4 \\ \hline 300 \end{array}$$

Заметим, что A бодж. четное, т.к. либо $m+n$, либо $m+n-9$ - четное $\Rightarrow p=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4 = 52$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 13 = 26 \\ 4 \cdot 13 = 52 \end{array}$$

$$\begin{cases} m+n=4 \\ m+n-9=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=4 \\ m+n=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=4 \end{cases} \Rightarrow \checkmark$$

при этом \Rightarrow т.к. $mn = \text{неч}$, то одна из них чет \Rightarrow
 $\Rightarrow mn = \text{чет} \Rightarrow B = 75 \cdot 4 = 300$

но кто суш. ер. остатки по mod. 4, 13 = 52

$$m+n \equiv 48 \pmod{52} \Rightarrow m+n = 48 \Rightarrow$$

$$m+n-3=10$$

$$2) \begin{cases} m+n=52 \\ m+n-9=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ + 35 \\ \hline 130 \\ \times 105 \\ \hline 1285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ + 96 \\ \hline 176 \\ \times 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{cases} mn=80 \\ m+n=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$$

и наоборот

$$2) A = 75q^2 = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = 73p^2 = mn(m+n-3)$$

$$\text{Аналог } q=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 300$$

$$3 \cdot 5 \cdot 2^2$$

$$m+n=6$$

$$4(4-9) = 300$$

$$4^2 - 9 \cdot 4 = 300 = 0$$

$$d = 81 - 1200 = 1119$$

3	100
6	50
4	75
12	25
30	10
20	15

$$\begin{array}{l} 50-50=2500 \\ 30-30=900 \\ 10-10=1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ + 1020 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 34 \\ 34 \\ \hline 93 \\ + 340 \\ \hline 1156 \end{array}$$

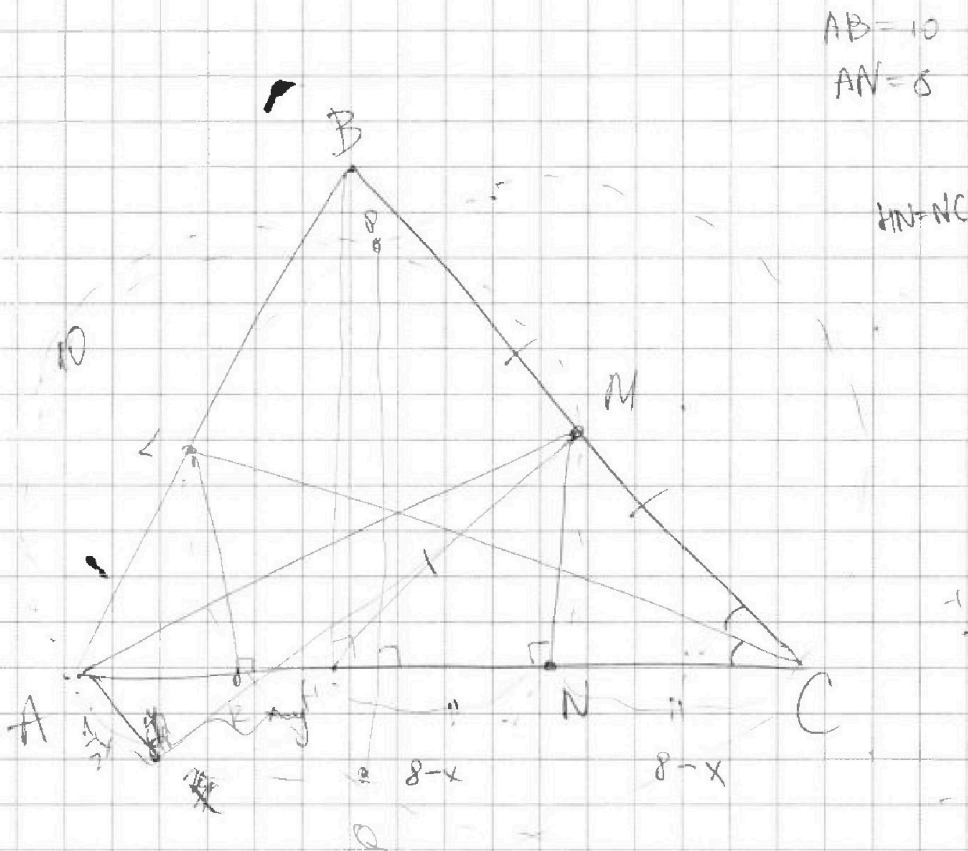
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ - 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 356 \overline{) 4} \\ - 32 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$AM^2 - MC^2 = 64 - (8-x)^2 = 64 - (64 + x^2 - 16x) = 16x - x^2$$

$$MC^2 = AM^2 + x^2 - 16x$$

$$100 - x^2 = BC^2 - (16 - 2x)^2$$

$$100 - x^2 = 4MC^2 - (16^2 + 4x^2 - 64x)$$

$$100 - x^2 = 4MC^2 - 16^2 - 4x^2 + 64x$$

$$4MC^2 = \frac{21}{100 - x^2 + 16^2 + 4x^2 - 64x} = 356 + 3x^2 - 64x$$

$$\frac{3x^2}{4} - 16x + 89 = MC^2$$

$$\frac{3x^2}{4} - 16x + 89 = x^2 - 16x \Rightarrow 89 = \frac{1}{4}x^2 + AM^2$$