



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N1. \quad a_5 = 6X + 18 = a_4 + 4d \quad a_4 = (X^2 - 4X)^2 = a_3 + 6d$$

$$a_{11} = -3X^2; \quad a_{11} = a_0 + 10d \Rightarrow \frac{a_5 + a_{11}}{2} = a_4 + 7d = \frac{-3X^2 + 6X + 18}{2}$$

$$a_{11} - a_5 = -3X^2 - 6X - 18 = 6d \Rightarrow d = -\frac{X^2 + 2X + 6}{2}$$

Где a_1 - первый член арифм. прогрессии, а d - шаг.

Тогда $a_4 + d = \frac{a_5 + a_{11}}{2}$

$$(X^2 - 4X)^2 - \frac{X^2 + 2X + 6}{2} = \frac{-3X^2 + 6X + 18}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2(X^2 - 4X)^2 - X^2 - 2X - 6 = -3X^2 + 6X + 18$$

$$2(X^2 - 4X)^2 + 2X^2 - 8X - 24 = 0$$

Замена $t = X^2 - 4X$: $2t^2 + 2t - 24 = 0$

$$t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}$$

Обратная замена: $t = -4 \Rightarrow X^2 - 4X + 4 = 0 \quad (X-2)^2 = 0 \Rightarrow X = 2$

$$t = 3 \Rightarrow X^2 - 4X - 3 = 0$$

$$D = 16 + 3 \cdot 4 = 4 \cdot 7$$

$$X = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Проверка:

	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	
$X = 2$:	30	23	16	9	2	-5	-12	+ верно $\Rightarrow X = 2$
$X = 2 + \sqrt{7}$	$30 + 6\sqrt{7}$	$19,5 + 3\sqrt{7}$	9	$-1,5 - 3\sqrt{7}$	$-12 - 6\sqrt{7}$	$-33 - 12\sqrt{7}$	$-33 - 12\sqrt{7}$	+ верно $\Rightarrow X = 2 + \sqrt{7}$
$X = 2 - \sqrt{7}$	$30 - 6\sqrt{7}$	$19,5 - 3\sqrt{7}$	9	$-1,5 + 3\sqrt{7}$	$-12 + 6\sqrt{7}$	$-22,5 + 9\sqrt{7}$	$-33 + 12\sqrt{7}$	+ верно

Проверка: $X = 2$: $a_5 = 30$; $a_7 = 16$; $a_{11} = -12$ можно проверить, но

$$a_7 = 58; d = -7 \text{ задает прогр.} \Rightarrow X = 2$$

$$X = 2 + \sqrt{7}: a_5 = 30 + 6\sqrt{7}; a_7 = 9; a_{11} = -33 - 12\sqrt{7} \text{ можно}$$

проверить, но прогр. задана: $d = -10,5 - 3\sqrt{7}$; $a_7 = 72 + 18\sqrt{7}$

$$X = 2 - \sqrt{7}: a_5 = 30 - 6\sqrt{7}; a_7 = 9; a_{11} = -33 + 12\sqrt{7} \text{ можно проверить, но}$$

$$a_7 = 72 - 18\sqrt{7}; d = -10,5 + 3\sqrt{7} \text{ задает прогр.} \Rightarrow X = 2 - \sqrt{7}$$

Ответ: $\{2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}\}$



1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \quad (+1) \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \quad (+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 3y-4x \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x-2 \leq y \leq \frac{4}{3}x+2 \\ \frac{3}{4}x-2 \leq y \leq \frac{3}{4}x+2 \end{cases} \quad \text{построить границы } l_{11}: y = \frac{4}{3}x-2; \\ l_{12}: y = \frac{4}{3}x+2; \quad l_{21}: y = \frac{3}{4}x-2; \\ l_{22}: y = \frac{3}{4}x+2$$

Таким образом реш системы
кер. в. будет пересечение областей
между l_{11} и l_{12} и l_{21} , l_{22} , т.е.

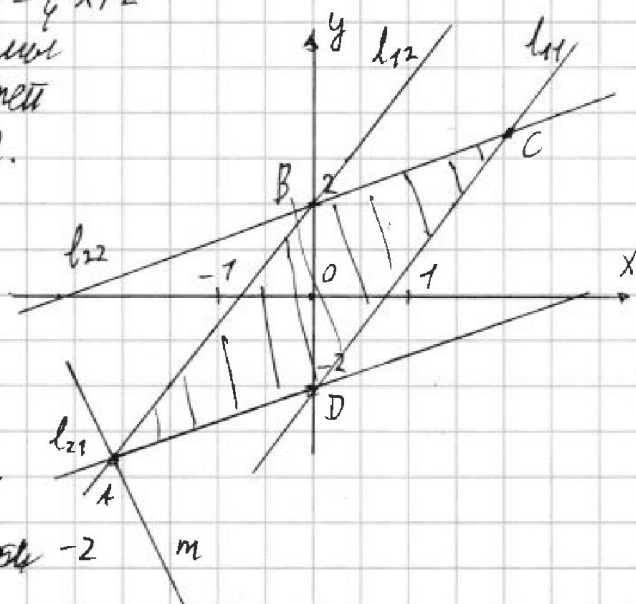
ABCD, т.е. кер. в. нестрогие, но
границы включ.

Пусть $14x+7y=7 \cdot m$

$\Rightarrow y = m-2x$, требуется

миним. $7m$, то есть минимиз. m ,

$y = m-2x$ — прямая
параллельная с угловым коэффициентом -2



и проводящую через $T(0; m)$, для нахождения мин m можно
просто постепенно ее увелич. до первого пересеч. ABCD, т.е.
то, что удовлетв. кер. в. По графику можно понять, то
 $y = m-2x$ проходит чрез т. А. возьмем т. А:

$$l_{12} \cap l_{21} = A \Rightarrow \begin{cases} y_A = \frac{4}{3}x_A + 2 \\ y_A = \frac{3}{4}x_A - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x_A + 2 = \frac{3}{4}x_A - 2 \\ y_A = \frac{3}{4}x_A - 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1): \frac{16-9}{12}x_A = -4 \quad \frac{7}{12}x_A = -4 \quad x_A = \frac{-48}{7} \Rightarrow y_A = -\frac{36}{7} - 2 = -\frac{50}{7}$$

$$\Rightarrow \text{т. А. } A\left(-\frac{48}{7}; -\frac{50}{7}\right) \Rightarrow -\frac{50}{7} = m - 2 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) \Rightarrow m = 2 \cdot \frac{-48}{7} - \frac{50}{7} =$$

$$= -\frac{96+50}{7} = -\frac{146}{7} = m \Rightarrow 14x+7y=7 \cdot m = -146 \text{ — мин. значение } 14x+7y \text{ удовл. системе кер. в.}$$

Ответ: -146 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\textcircled{1}: \begin{cases} A = 3q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \textcircled{2}: \begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 3q^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{1}: A = 3q^2 = (m-n)(m-n+9) \Rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{3} \\ a_1 b_1 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow a_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow m-n = 3k; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3q^2 = 3k(3k+9) \Rightarrow q^2 = 3k(k+3) \Rightarrow q^2 : 3$$

$$\Rightarrow q^2 = 3k$$

$$\text{м.к. } q - \text{ простое то } q = 3 \Rightarrow 9 = 3k(k+3)$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k = 3$$

$$k^2 + 3k - 3 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 3 = 3 \cdot 7 - \text{не полн. квадрат} \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ противоречие, м.к.

м.к. $n \notin \mathbb{N} \Rightarrow k = m-n, \text{ но } k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \textcircled{1}$ - вариант ~~не~~ - нет решений $\Rightarrow \emptyset$

$$\textcircled{2}: \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} (*)$$

$$\begin{cases} mn(m-n+3) = 3q^2 > 0 \\ m-n+3 > 0 \Rightarrow m-n+9 > 0 \end{cases} \text{ м.к. } m > 0 \text{ и } n > 0, \text{ м.к. } n, m \notin \mathbb{N}$$

$$(*): (m-n)(m-n+9) = 13p^2;$$

$$\text{м.к. } 13p^2 > 0 \text{ и } m-n+9 > 0 \Rightarrow m-n > 0 \Rightarrow m > n$$

$$\text{пусть } d = m-n, \text{ тогда } d \in \mathbb{N} \text{ и } d > 0 \Rightarrow d \in \mathbb{N}$$

$$d(d+9) = 13p^2, 0 < d < d+9; p - \text{ простое, тогда все}$$

$$\text{случаи: } \begin{cases} d = 1 \\ d+9 = 13p^2 \end{cases} \text{ но тогда } 13p^2 = 10 \text{ нет натур. реш. } \Rightarrow \text{нет реш.}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} d = p \\ d+9 = 13p \end{cases} \Rightarrow 13p - p = 9 = 12p, \text{ тоже нет реш.}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} d = p^2 \\ d+9 = 13 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} d = 13p \\ d+9 = p \end{cases} \text{ но тогда } 13p \leq p \Rightarrow 13 \leq 1 - \text{нет реш.}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} d = 13p^2 \\ d+9 = 1 \end{cases} \text{ но тогда } 13p^2 \leq 1 \Rightarrow \text{нет реш.}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} d = 13 \\ d+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 22, \text{ нет цел. реш. } \Rightarrow \text{нет реш.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом у (1), (2), (4), (5), (6) нет реш., решим (3):

$$\begin{cases} a = p^2 \\ a + q = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = q \\ a = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \text{ м.к. } p - \text{простое} \\ a = 4 = m - n \end{cases}$$

вернемся в систему:
$$\begin{cases} mn(m-n+3) = 3q^2 \\ m-n=4 \\ p=2 \end{cases} \Rightarrow mn \cdot 7 = 3q^2$$

м.к. q - простое и $m \cdot n \cdot 7 : 7$, а 3 не кратно $7 \Rightarrow q = 7$

$$\Rightarrow m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow m \cdot n = 21 \Rightarrow \begin{cases} m \cdot n = 21 \\ m - n = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(n+4) = 21 \Rightarrow n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 21 = 4 \cdot 25$$
$$n = \frac{-4 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = -7 \\ n = 3 \Rightarrow m = 7 \end{cases}$$

неуд. усл, м.к. $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (n=3; m=7), \text{ проверим: } \begin{cases} 3 \cdot 7(7-3+3) = 3 \cdot 7^2 \\ (7-3)(7-3+9) = 13 \cdot 2^2 \end{cases}$$

верно $\Rightarrow (7; 3)$
ед. пары

Ответ: (7; 3).



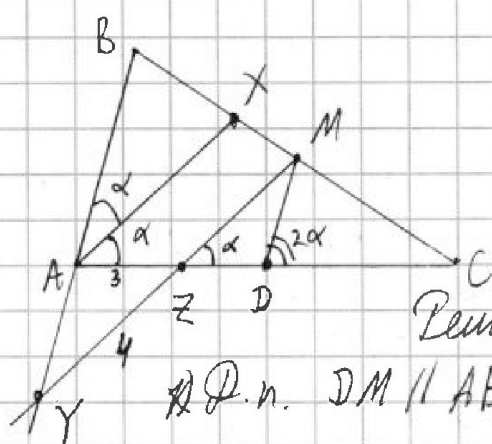
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$; AX - биссектриса;
M - ср. BC; $ZM \parallel AX$; $ZM \cap AC = Z$
 $ZM \cap AB = Y$; $AC = 12$; $AZ = 3$; $YZ = 4$

Найти: BC - ?

Решение:

Доп. н. $DM \parallel AB$; $D \in AC \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha = \angle MDC$ как углы при паралл. пр. пр. пр. пр.
 $AX \parallel ZM \Rightarrow \angle XAC = \alpha \Rightarrow \angle MZC = \alpha = \angle XAC$
(как соотв. углы при паралл. пр. пр.)

$\angle MDC = 2\alpha$ - внешний угол $\triangle ZDM$; $\Rightarrow \angle MZD + \angle ZMD = \angle MDC = 2\alpha$
 $\Rightarrow \angle ZMD = \alpha \Rightarrow \triangle ZMD$ - $\triangle$ $\Rightarrow ZD = DM$.

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$ (по 2 равн. углам и общ. стороне)

$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{MC}$ (по ср. пропорц.); $\frac{BC}{MC} = 2$, т.к. M - ср. BC $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2 \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{AC}{2} = 6 \Rightarrow$ т.к. $AZ + ZD + DC = AC \Rightarrow ZD = AC - AZ - DC = 12 - 3 - 6 = 3$

$\Rightarrow DM = ZD$ (как см. в $\triangle$ пр. пр.) $\Rightarrow DM = 3$

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$ $k=2 \Rightarrow AB = 2 \cdot DM = 6$.

$\triangle AZY \sim \triangle DZM$: ($\angle AZY = \angle MZD$ как верт.)

($AZ = 3$; $ZD = 3$; $\angle YAZ = \angle ZDM = 180^\circ - 2\alpha$)

$YZ = ZM = 4$. В $\triangle ZMD$: $ZD^2 + ZM^2 - 2 \cdot ZD \cdot ZM \cos \alpha = MD^2$

$\Rightarrow 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha = 9 \Rightarrow 16 = 8 \cdot 3 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9}$
(по т. косинусов)

$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9} = \cos 2\alpha$

В $\triangle ABC$: $AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 2\alpha = BC^2$

$AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 2\alpha = BC^2$
 $36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot (-\frac{1}{9}) = 180 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 196 = BC^2 \Rightarrow BC = \pm 14$

$BC = -14$ - негод.
 $\Rightarrow BC = 14$ - ответ.

Ответ: $BC = 14$



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ 4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y & (2) \end{cases}$$

Введем $f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$, т.к. каждая из слагаемых функции опред. на $x \geq 0$, т.к. каждая из слагаемых на интервале $x \in [0; +\infty)$ — возраст. функциями, то $f(x)$ также возраст. на $x \in [0; +\infty)$, т.е. обильно опред.

Тогда (2) имеет вид: $f(x) = f(y)$, если

$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ — не удовл. усл.
по стр. монотон. возраст. ф. $\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = y \end{cases}$ — удовл. условие (2) ур.

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ — тоже не удовл. из-за возраст. ф.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2} & (1) \\ x=y; x \geq 0 \end{cases}$$

Решим (1): пусть $a = \sqrt{x+6}$; $b = \sqrt{5-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = x+6+5-x-2\sqrt{x+6}\sqrt{5-x} = 11-2\sqrt{x+6}\sqrt{5-x}$$

$(x+6)(5-x) = 30-x-x^2$

$$\Rightarrow (1): a-b+5+(a-b)^2-11=0$$

$$\text{Заменим } t = a-b \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

$$t=2 \Rightarrow a-b=2 \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{5-x}$$

$$x+6 = 4 + 5 - x + 4\sqrt{5-x} \Rightarrow 2x+2 = 4\sqrt{5-x} \Rightarrow x+1 = 2\sqrt{5-x}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1 = 20-4x \Rightarrow x^2+6x-19=0$$

$$\Rightarrow 2x-3 = 4\sqrt{5-x} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-12x+9 = 20-4x \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-8x-11=0$$

$D = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 11 = 16 \cdot 15$

$$\Rightarrow x = \frac{0 \pm 4\sqrt{15}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2}, \text{ единств. неотрицат. корни}$$

$$t=-3 \Rightarrow \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x} \quad \begin{aligned} x+6+9+6\sqrt{x+6} &= 5-x \\ 6\sqrt{x+6} &= -2x-10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$t=-3 \Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} = -3 \quad \sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+6+9+6\sqrt{x+6}=5-x$$

$$6\sqrt{x+6}=-2x-10$$

$$\begin{cases} 9x+54=x^2+25+10x \\ -x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+25+10x=9x+54 \\ x-5 \end{cases}$$

$x-5$ не удовлетв. т.к. из ур(2)
ограничение $x \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \\ x \geq 0 \\ x=y \end{cases} \rightarrow \text{верно} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{15}}{2} \\ y=1+\frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}; 1+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е. $\frac{3n^2}{8} \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right)$ и каждая из этих ушкальных раскр-пов. даст 4 раскр-без-поворота, т.е.

$$\frac{3n^2}{8} \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right) \text{ из } \frac{3n^2}{8} \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right)$$

Тогда

Пусть остальных x , тогда т.к. все предыдущие были симметричные, эти несимм., каждая даст по 4 пов. раскр-без-поворота; тогда из $\sum d_i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ следу-

$$2 \cdot \frac{n}{2} + n^2 - 2n + n^2 + 4x = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$4x = \frac{n^4}{2} + \frac{n^2}{2} - 2n^2 + n \Rightarrow x = \frac{n^4}{8} - \frac{3n^2}{8} + \frac{n}{4}$$

$$\text{Тогда всего раскр-пов: } \frac{n^4}{8} - \frac{3n^2}{8} + \frac{n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{n^4}{8} - \frac{5n^2}{8} + \frac{n}{2} = \frac{10000}{8} - \frac{500}{8} - 50 = 1250$$

$$\text{Остальными } \frac{3n^2}{8} \text{ на } \frac{n^2}{4} \cdot \frac{(n^2-3)}{2} = \frac{n^2}{8} \cdot \frac{(n^2-3)}{2}$$

где $\frac{n^2}{4}$ выбрать первую т. в верх. лев. углу;

~~$\frac{n^2}{4}$~~ выбрать из оставшихся т. не симм. и не совп. этой

и $\frac{1}{2}$ для избежания от порядка точек

$$\text{Всего: } \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - n + \frac{n^2}{8} (n^2 - 4) = 25 + 50 - 10 + 50 \cdot 23 =$$

$$=$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нет поворота, тогда всего $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ способов покрасить два узла в белый, где $n=10$.

Пусть есть m уник. раскрасок, попарно которые различны ~~до~~ с учетом поворота, т.е. если одна поворотом переходит в другую, то они равны) тогда m и есть ответ на вопрос.

Пусть есть числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ - кол-во раскрасок, вернувшись к которым можно получить очередную из m раскрасок, тогда $\sum_{i=1}^m a_i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, т.к. любая раскраска перейдет в какую-то из m раскрасок с поворотом. т.к. так были выбраны раскраски с поворотом.

Разобьем раскр. с поворотом на группы: 5 групп

1^я 2 точки (покраш. узлы) лежат на диагонали и симметр. относительно центра квадрата (т.к. квадр. 9×9 , то всего 100 т.) и ~~можно на диаг. узлах на пр.~~

Такие раскр. задаются одной пар. координат, удал. от центра, всего их может быть 5 различных.

на рис. 1 изображены все 5 т. задающих раскр. в группе 1^я, остальные раскр. этой группы получаются поворотом, поэтому всего 5.

Каждая раскр. такой группы даст по 2 раскр. без поворота, причем уникальные, т.к. одна раскр. без поворота не может перейти к другой раскр. с поворотом, т.е. эта группа даст 10 раскр. без-п и ее размер $\frac{1}{2}$ 5 раскр. с-пов.

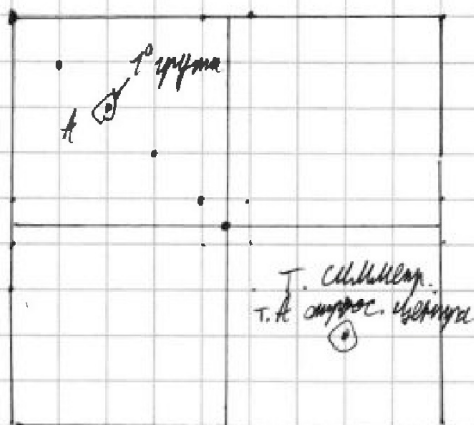


рис 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$5 \geq x \geq 0$$

$$x+6+5-y-2\sqrt{(x+6)(y-4)} \quad a=\sqrt{x+6}, b=\sqrt{y-4}$$

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{y-4}+5=2\sqrt{30-x-x^2} \quad x=3: \quad 3-1+5=2\sqrt{27-9-9} \quad 7=2\sqrt{9} \quad 7=6$$

$$\sqrt{x+6}+5=2\sqrt{30-x-x^2}+\sqrt{y-4} \quad (x+6)+25=4(30-x-x^2)+y-4$$

$$\sqrt{k}-\sqrt{b} \quad k \cdot b = 30 - x^2 - x$$

$$\sqrt{k}-\sqrt{b} = 2\sqrt{kt}+k+b$$

$$-6 \quad (\sqrt{k}+\sqrt{b})^2$$

$$2ab=5+a-b$$

$$(\sqrt{k}-\sqrt{b})^2-11=5+\sqrt{k}-\sqrt{b}$$

$$(a+b)^2-11=5+a-b$$

$$2ab-a+b-5=0$$

$$a(2b-1)$$

$$\sqrt{2b-1} \cdot \sqrt{4-2b}+5=$$

$$(a-b)^2=11-2\sqrt{10-x-x^2}$$

$$a-b+5+(a-b)^2-11=0 \quad \sqrt{x+6}=\sqrt{y-4}+2$$

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a-b=-3 \end{cases}$$

$$\sqrt{b}=\sqrt{5}+2$$

$$x+6=5-x+4+4\sqrt{5-x}$$

$$2x-3$$

$$4x^2+9-12x=20-4x$$

$$4x^2-8x-11=0$$

$$64+4 \cdot 4 \cdot 11=16(15)$$

$$(m-n)^2+9(m-n)$$

$$x=\frac{8 \pm 4\sqrt{15}}{2}=1 \pm \sqrt{15}$$

$$A=m^2-2mn+n^2+9m-9n=13p^2$$

$$p, q - \text{простые}$$

$$B=m^2n-mn^2+3nm=3q^2$$

$$B=mn(m-n+3)=13p^2$$

$$a^2+9a-13p^2=0$$

$$A=(m-n)(m-n+9)=3q^2=27$$

$$a^2+3a-3=0$$

$$p=8+4 \cdot 13p^2$$

$$a(a+3)=3$$

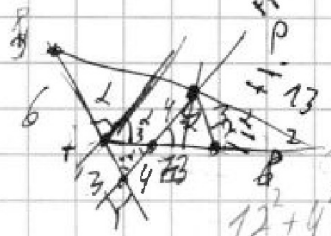
$$9+3 \cdot 4=3 \cdot 7$$

$$mn(m-n+3)=13p^2 \quad 3a(3a+9)=27$$

$$(m-n)(m-n+9)=13p^2$$

$$n=1: m(m+2)=30^2$$

$$3k(3k+2)=0^2 \rightarrow 3k+2=0^2$$



$$m-n=p \quad m-n=4$$

$$m-n+9=13$$

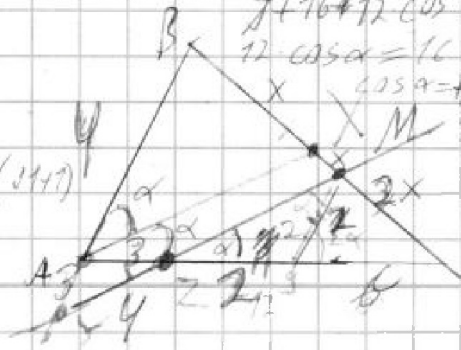
$$9+16+12 \cos \alpha = 16$$

$$12 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{3}$$

$$2 \cos^2 \alpha = \frac{16}{9}$$

$$12+4^2-2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 12 = -144+16+12 = -144+4 = -140$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$a_5 = 6x + 18;$$

$$a_0 \text{ and } a_0 + 3d$$

$$a_0 + 6d$$

$$a_8 = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2}$$

$$a_{11} = (x^2 - 4x)^2$$

$$d_{11} = -3x^2$$

$$6d = \frac{-3x^2 - 6x - 18}{2}$$

$$d = -\frac{x}{2} - x - 3$$

$$(x^2 - 4x)^2 - \frac{x}{2} - x - 3 = \frac{-3x^2 + 6x + 18}{2}$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - x^2 - 2x - 6 = -3x^2 + 6x + 18$$

$$2(x^2 - 4x)^2 + 2x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t = 3 = x^2 - 4x$$

$$2t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$t = -4 = x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$4x - 3y = 6^2 \quad y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$|4x - 3y| \leq 6$$

$$\frac{10}{3}x - 2 \leq \frac{14}{3}x + 2$$

$$\frac{40 - 33}{12}x \leq \frac{4}{3}$$

$$x \leq \frac{48}{7}$$

$$|4x - 3m + 6x| \leq 6$$

$$|3x - 4m + 8x| \leq 8$$

$$\frac{11}{4}x + 2 \geq m \geq \frac{11}{4}x - 2$$

$$\frac{10}{3}x + 2 \geq m \geq \frac{10}{3}x - 2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + 8$$

$$4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$x+6+5-y+5-2\sqrt{(x+6)\cdot(5-y)} = 4(30-x-y^2)$$

$$5x - y - 4y^2 - 104 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y}$$

$$25 - 5 - 4 - 104 = 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}$$

$$-79$$

$$-79$$

$$-79$$

$$\begin{aligned} & 4x - 3y = 6^2 \quad y = \frac{4}{3}x + 2 \\ & |4x - 3y| \leq 6 \\ & \frac{10}{3}x - 2 \leq \frac{14}{3}x + 2 \\ & \frac{40 - 33}{12}x \leq \frac{4}{3} \\ & x \leq \frac{48}{7} \\ & |4x - 3m + 6x| \leq 6 \\ & |3x - 4m + 8x| \leq 8 \\ & \frac{11}{4}x + 2 \geq m \geq \frac{11}{4}x - 2 \\ & \frac{10}{3}x + 2 \geq m \geq \frac{10}{3}x - 2 \\ & \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ & 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + 8 \\ & 4x^4 + 5\sqrt{x} + x = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y \\ & \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ & x+6+5-y+5-2\sqrt{(x+6)\cdot(5-y)} = 4(30-x-y^2) \\ & 5x - y - 4y^2 - 104 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-y} \\ & 25 - 5 - 4 - 104 = 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5} \\ & -79 \end{aligned}$$