



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

пусть 1-ый член прогрессии = a, разность между 2-ми соседними членами прогрессии b.

тогда:

$$\begin{cases} a + 2b = 3x + 3 \\ a + 4b = (x^2 + 2x)^2 \\ a + 8b = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a + 8b) - (a + 4b) = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 2(a + 4b) - (a + 2b) = 2((x^2 + 2x)^2 - (3x + 3)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2 \\ 4b = 2((x^2 + 2x)^2 - (3x + 3)) \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^2 + 2x)^2 = 2(x^2 + 2x)^2 - (6x + 6) \Rightarrow$$

$$3(x^2 + 2x)^2 - 3x^2 - (6x + 6) = 0 \quad | : 3$$

$$(x^2 + 2x)^2 - x^2 - (2x + 2) = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$ - одно из решений
 \Rightarrow вынесем $(x+1)$ за скобки (сл. произведение)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 продолжение

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$ одно из решений этого уравнения

$$x^3(x+1) + (x+1) \cdot 3x^2 - 2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

Это мы хотим разложить на множители $x = -1$ одно из решений уравнения $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$ вынесем $(x+1)$ за скобки

$$(x+1) \cdot (x^2(x+1) + 2x(x+1) - 2(x+1)) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

решим это уравнение $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$(x+1)^2(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3}) = 0$$

решая это x в которых представленные скобки "превращаются" в 0:

$$x = -1$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ: $x = -1, x = -1 \pm \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

max $4y - 8x$

Построим график у-ий. Для этого мы сначала построим графически $x-3y=0$ и $3x-y=0$ а затем построим графики для возможных раскрытий

модулей соединив области зависимости от себя
денный нерав-е (предварительно отметив области

$$x-3y \geq 0, 3x-y \geq 0, x-3y \leq 0 \text{ и } 3x-y \leq 0$$

$$x-3y-3 \leq 0 \quad y \geq \frac{x}{3} - 1$$

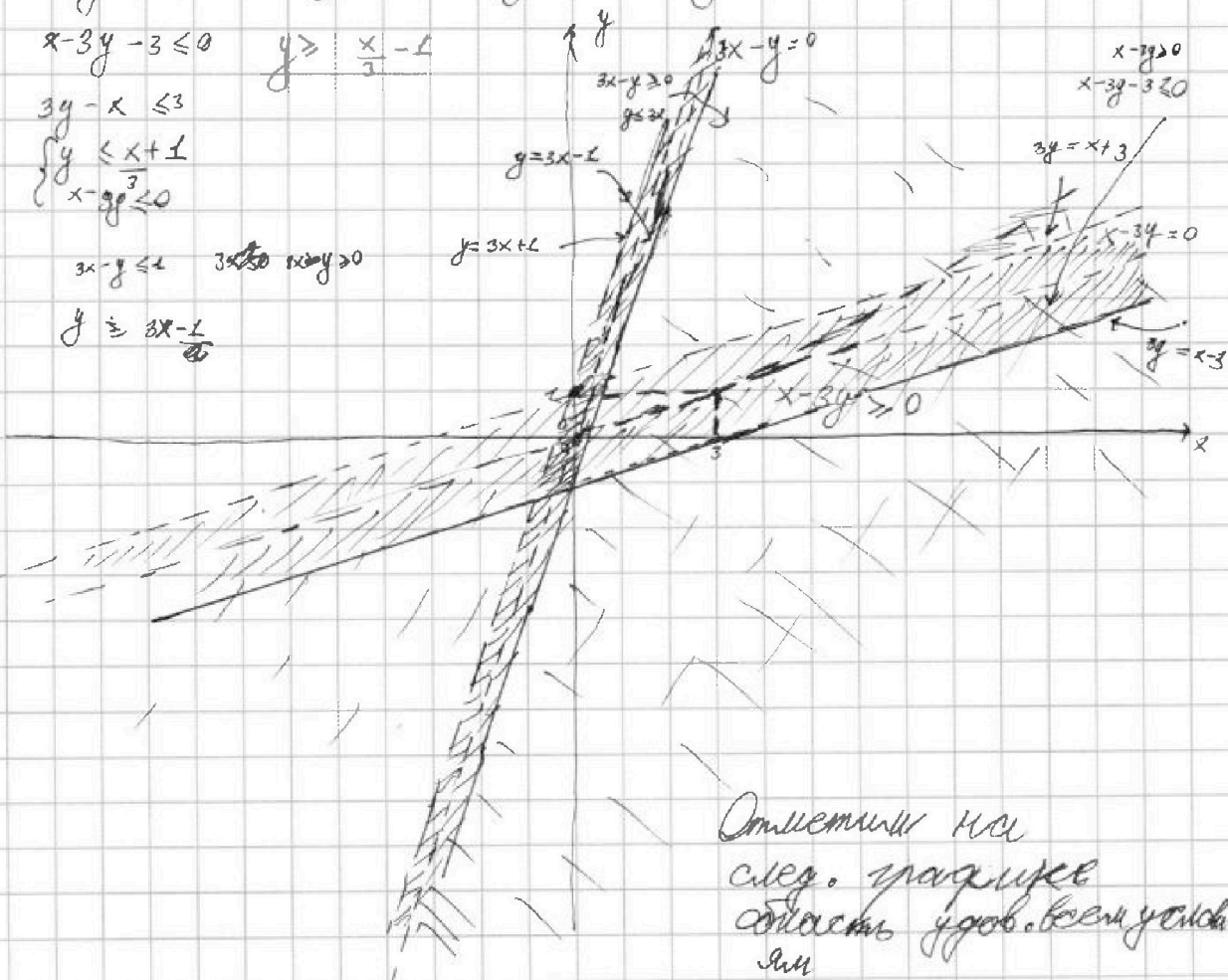
$$3y-x \leq 3$$

$$y \leq \frac{x+1}{3}$$

$$x-3y \leq 0$$

$$3x-y \leq 1 \quad 3x \leq 1+y \quad x \leq \frac{1+y}{3}$$

$$y \geq \frac{3x-1}{3}$$



Отметили на
след. графике
область удов. всем условиям



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

неч - нечетное
чет - четное

Пусть m чет и n нечетное или наоборот.

тогда $A = 4 + 4 + 4m + 4 - 2m - 4n = \text{неч.}$

если m чет и n чет то A чет

если m неч и n неч то $A = 4m + 4n + 4 - 4m - 4n = \text{чет}$

$\rightarrow A$ четное $A = 13p^2$ или $45q^2$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn \equiv m^2n + mn^2 \pmod{3}$$

Если одно из чисел m или $n \equiv 0 \pmod{3}$ (если

оба то $A \equiv 0 \pmod{3}$ и $B \equiv 0 \pmod{3}$) то $B \equiv 0 \pmod{3}$. и $A \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow A \text{ не дел. } 13p^2$

но A чет $\rightarrow A = 52$

~~B не может быть чет. иначе $p=q=2 \Rightarrow m, n, p, q$~~

то: $A = (m+n)(m+n-3) = (m+n)^2 - 3(m+n)$

Есть два случая

$$A = 13p^2 \quad \text{и} \quad A = 45q^2$$

1) $A = 13p^2 \quad m+n=k$

$13p^2 = k(k-3) \rightarrow k, p \in \mathbb{N}$ м.к.р
полное \downarrow но $A \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow p \equiv 2 \pmod{4}$

Шаги \Rightarrow $\begin{cases} k=13 \Rightarrow k-3=p^2=10 \checkmark \\ k=p \times \quad k-3 < 0 \times \\ k=13p \quad k-3=12 \times \\ k=p^2 \quad k-3 < 0 \times \end{cases}$

2) $A = 45q^2 \quad A \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow q \equiv 2 \pmod{4}$
 $k(k-3) = 4 \cdot 45 \quad k^2 - 3k - 30 = 0$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{1281}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ИЗБІ $\notin \mathbb{Z}$ ~~также~~ $k = m + n$, $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$
противоречие $\Rightarrow mn = 13$

$$D = 45q^2$$

$$mn \underbrace{(m+n-3)}_{10} = 45q^2 \Rightarrow 45q^2 \text{ дел} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow$$

$$mn = \frac{45}{2} q^2 \quad m, n, q$$

$$\Rightarrow mn = 30 \quad mn - 10 = 300 \Rightarrow mn = 30$$

рассм кв. ур-ие $x^2 - \cancel{13} - 13x + 30 = 0$
его решение и будет есть возможная пара m, n

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2}$$

$$(m, n) = 10, 3$$

Ответ: 10, 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\angle Z \in (ZM) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi M \parallel AX \Rightarrow \angle XAC = \angle MYC$$

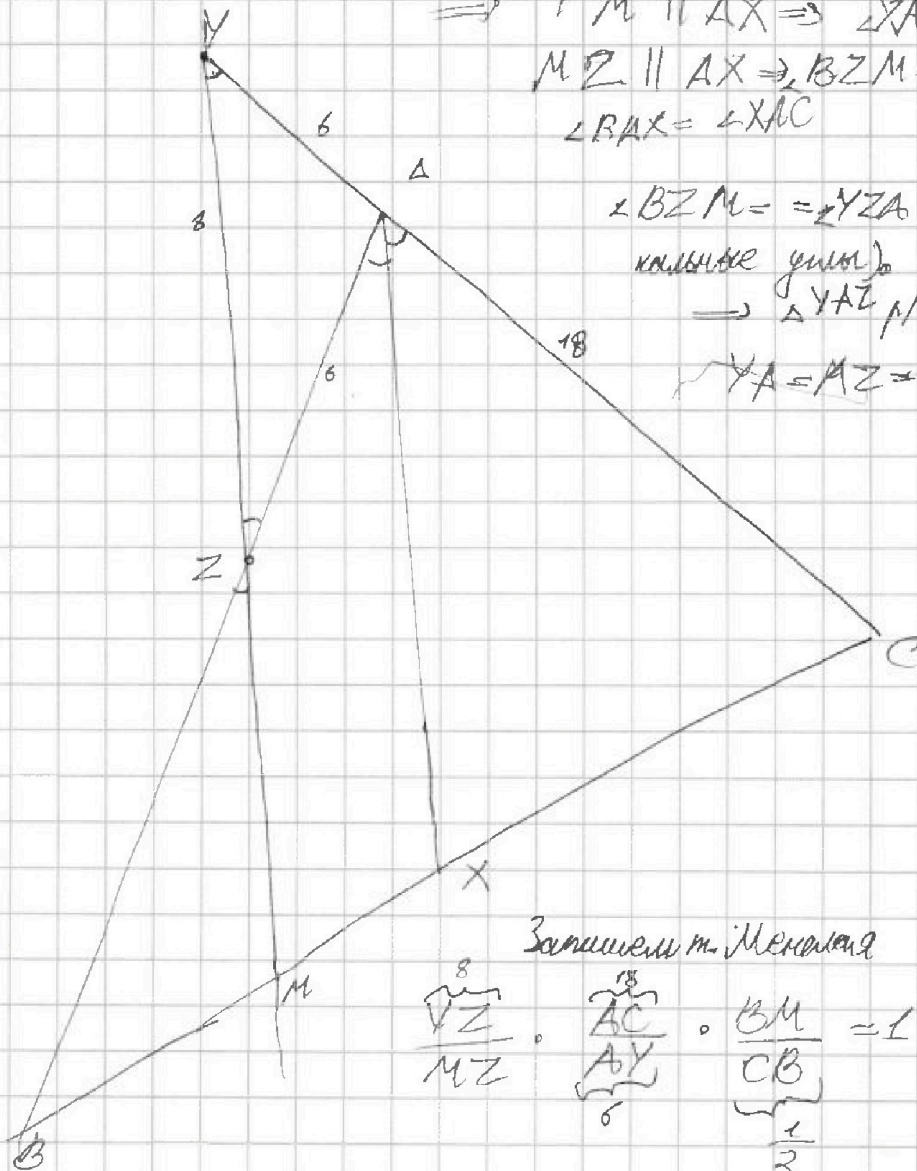
$$MZ \parallel AX \Rightarrow \angle BZM = \angle BAX$$

$$\angle BAX = \angle XAC$$

$$\angle BZM = \angle YZA \text{ (вертикальные углы)}$$

$$\rightarrow \triangle YAZ \text{ } \sphericalangle \Rightarrow$$

$$YA = AZ = 6$$



Запишем т. Менелая

$$\frac{AZ}{MZ} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{BM}{CB} = 1 \quad MZ = 12$$

$$\frac{BZ}{AZ} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{AY}{CY} = 1 \quad BZ = \frac{2}{3}$$

Запишем т. косинусов $\triangle ZAY$

$$= \angle BZM$$

$$36 = 36 + 36 - 36 \cos \alpha$$

см. угол α .

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{т.к. } \alpha = \angle YZA =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ продолжение

Затем найдем м. кос. в $\triangle BZM$

$$BM^2 = BZ^2 + MZ^2 - 2 \cdot BZ \cdot MZ \cdot \cos \alpha$$

\uparrow
 $\frac{BC^2}{4}$

$$\frac{BC^2}{4} = \frac{4}{9} + 144 - 16 \cos \alpha$$

$$BC^2 = \frac{16 + 9 \cdot 144 \cdot 9 - 16 \cdot 6}{9} = \frac{1216}{9}$$

$$BC = \frac{8}{3} \sqrt{19}$$

$$\text{Ответ: } BC = \frac{8}{3} \sqrt{19}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



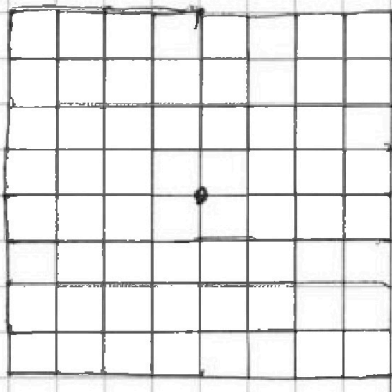
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

узлов $9 \times 9 = 81$



Сначала подсчитаем кол-во способов выбрать два узла

как будто совместимые поворотом раскраски различны. Но среди двух выбранных узлов не должны быть центрально симметричными или переводимыми поворотом на 90 и не должны содержать центральный узел.

по принципу комбинаторного замка кол-во таких пар C_2^1

равно:

$$C_2^1 = C_2^1 = \frac{\text{кол-во узлов} \cdot \text{кол-во узлов без центрального узла}}{2} = \frac{81 \cdot (81 - 1)}{2} = 40 \cdot 40 = 3120$$

наименее интересный кол-во сочетаний

Среди C_2^1 подобных способов выбрать клетки

существует 4 совместимых поворота \Rightarrow кол-во соотв им раскрасок $C_2 = \frac{C_2^1}{4} = 480$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 49 \\ \hline 40 \\ 3120 \end{array}$$

Подсчитаем кол-во способов выбрать

C_2^2 два узла: один из них будет центральным $C_2^2 = 1 \cdot (81 - 1) = 80$ C_2^2 - кол-во соотв комбинаций

$$\begin{array}{r} 2 \\ 44 \\ \hline 308 \end{array}$$

итого C_2^1 раскрасок = $480 + C_2^2$ см. выше. $C_2 = 40$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6
рассчитаем C_3' - кол-во способов выбрать два узла: они будут смежными
но симметричны друг другу относительно ц. узла. ~~и~~
каждая клетка задается однозначно

$$C_3' = \frac{(81-1) \cdot 1}{2} = 40$$

среди них не может быть ц. узла кол-во сочетаний

C_3 - кол-во раскрасок ~~отв~~ соотв. C_3' : $C_3 = \frac{C_3'}{2}$
т.к. один из поворотов ~~на 180°~~ мы учли при расчете
кол-ва сочетаний поделив элемент на 2
и остался 1 поворот дающий независимую раскраску

$$C_3 = 20$$

$$C_2 = ~~80~~ 20$$

$$C_1 = 780$$

C - ~~кол-во комбинаций~~ ^{кол-во} способов

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = ~~80~~ 820$$

Ответ: 820.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

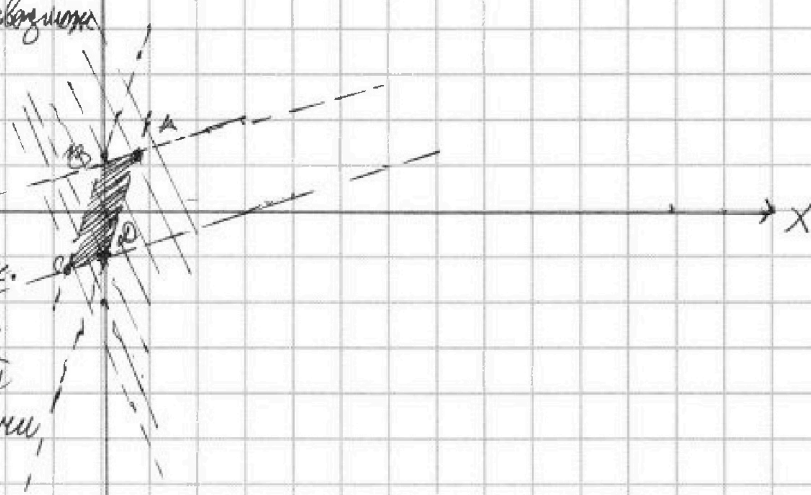
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

Пусть $4y + 8x = k$ $k \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{k}{4} - 2x$$

Нарисуем на графике множество прямых со всевозможными k . Заметим, что при каком-то k прямая пересекает область только



в одной точке т.к. эта прямая не параллельна. Не одной из сторон образующей области обложившись, у данной прямой

на коэф. угла наклона прямой меньше чем у любой из сторон

⇒ прямая проходит через т. P см. рис.

$$\begin{cases} y = \frac{k}{4} - 2x \\ y = 3x - 1 \\ y = \frac{5}{3} + 1 \end{cases}$$

$$3x - 1 = \frac{5}{3} + 1$$

$$\frac{8}{3}x = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} \Rightarrow k = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right)4 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

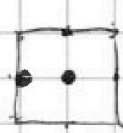
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

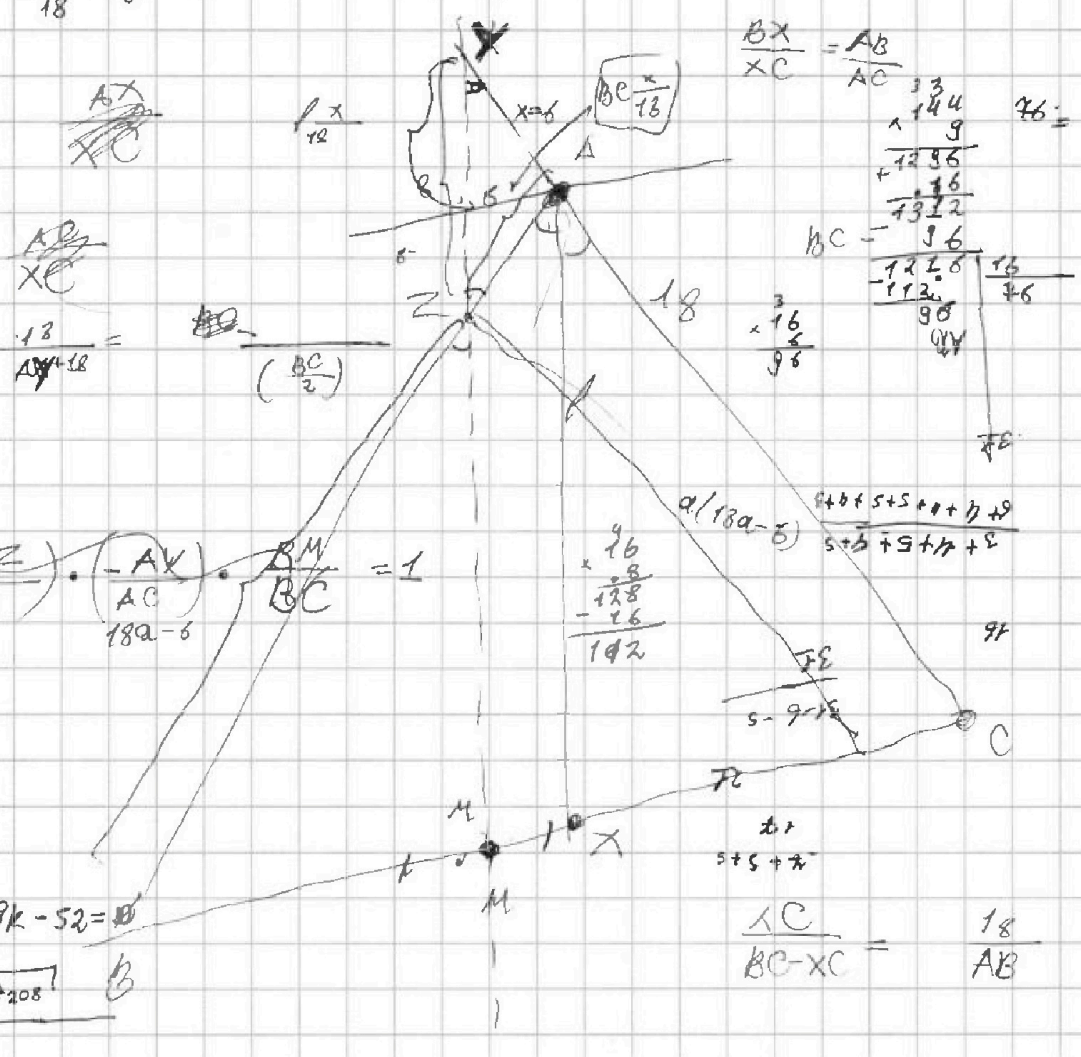
Черновик

$$f - (8 - \frac{1x}{18})$$

$$f \frac{18+x}{18} - 8$$



$$T = \frac{10}{1x} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{28}$$



$$\left(\frac{AZ}{ZX}\right) \cdot \left(\frac{AY}{AC}\right) \cdot \frac{BM}{BC} = 1$$

$$k^2 - 9k - 52 = 0$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{81+208}}{2}$$

$$\frac{YZ}{MZ} \cdot \frac{AC}{AY} \cdot \frac{BM}{CB} = 1$$

$$\frac{8}{MC} \cdot \frac{18}{AY} = 2$$

$$\frac{18 \cdot \frac{8 \cdot 18}{AY}}{AY} = BC$$

$$AY = \frac{8 \cdot 18}{BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 9 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

н н нн

Черновик

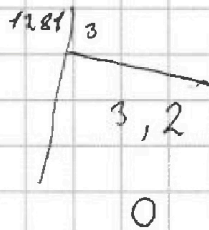
$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n \equiv 1$$

$mn \times 1$
 $mn \times 1$
 11×1

0 1 2 3 4 5
0 1 1 1 1 0

$$m^2 + mn^2 - 3mn$$

нч ч
нн н



-2

-3

$$m^2 n + \dots$$

$$mn(m+n-3) = 759^2$$

15 20
12 25

$$mn(m+n-3)$$

- 3✓
- 1✓
- 2✓
- 4✓
- 6✓

| |
|---|
| 5 |
| 5 |
| 3 |
| 2 |
| 2 |

$$k^2 - 9k - 300 = 0$$

0 1 2 3
0 1 1 0

$$A = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = (mn)(m+n-3)$$

$$k = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1200}}{2}$$

1 + 1

$$k = 13$$

1

0

$m+n$

$m^2 n + mn^2$

1, 1

2, 2

$$2+2 = 1$$

$$1+2+1$$



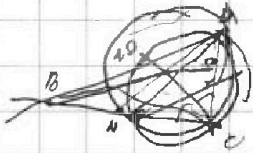
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

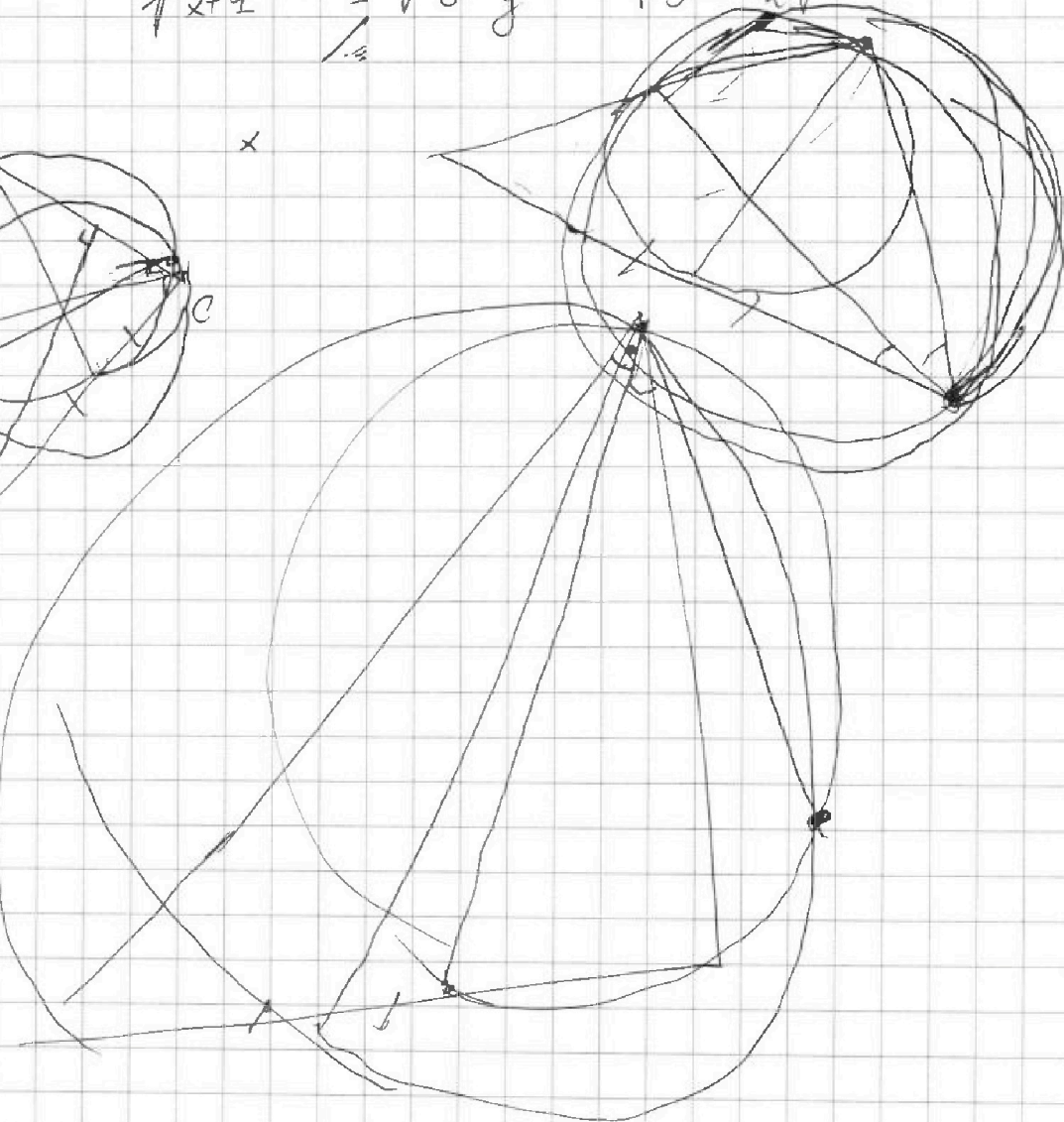
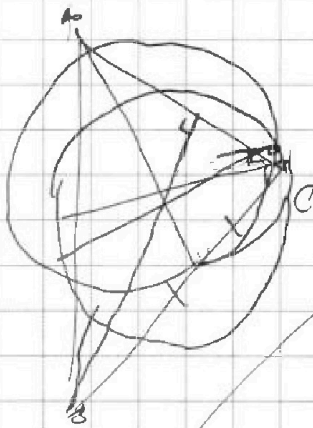
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 27$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

