



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} a_5 = 6x + 18 \\ a_7 = (x^2 - 4x)^2 \\ a_{11} = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 + 4d = 6x + 18 \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \\ a_0 + 10d = -3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6d = -3x^2 - 6x - 18 \\ a_0 = 6x + 18 - 4d \\ a_0 + 6d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2d = -x^2 - 2x - 6 \\ a_0 = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 \\ 2x^2 + 10x + 30 - 30^2 - 6x - 18 = x^4 + 16x^2 - 8x^3 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \\ & (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0 \\ & (x-2)(x-2)(x^2 - 4x - 3) = 0 \\ & (x-2)^2(x-1)(x-3) = 0 \\ & \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Для $x=1$: $\begin{cases} a_5 = 24 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 36 \\ d = -3 \end{cases} \Rightarrow a_7 = 36 - 18 = 18 \neq 9$ - неверно

Для $x=2$: $\begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 58 \\ d = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 30 \\ a_7 = 16 \\ a_{11} = -12 \end{cases}$ - верно

Для $x=3$: $\begin{cases} a_5 = 36 \\ a_7 = 9 \\ a_{11} = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = -27 \\ 2d = -18 \end{cases}$ - неверно

Ответ 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 4y-3x \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -8 \leq 4x-3y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 \leq x+y \leq 12 \\ -6 \leq 4x-3y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -48 \leq 7x \leq 48 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -98 \leq 7x+7y \leq 98 \\ -48 \leq 7x \leq 48 \end{cases}$$

$$-146 \leq 14x+7y \leq 146$$

$$-146 \leq 14x+7y \leq 146 \Rightarrow \min(14x+7y) = -146$$

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$m-n+9 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 13, p^2\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=p^2 \\ m-n+9=13 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ p^2 = \frac{12}{10} \notin \mathbb{N} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=13 \\ 22 = p^2 \text{ не квадрат} \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} p^2=4 \\ m-n=p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=2 \\ m-n=4 \\ 7mn = 3q^2 \end{cases} \Rightarrow 9 \Rightarrow 19 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ 7mn = 3 \cdot 7 \cdot 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n=4 \\ mn=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4+h \\ n^2+4n-21=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h+7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=-7 \notin \mathbb{N} \\ h=0 \\ h=4+h \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=3 \\ m=7 \end{cases}$$

$$m-n+9 > m-n \Rightarrow m-n \in \{1, 13\}$$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \\ mn(m-n+3)=3q^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=3q^2 \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 = \frac{10}{3} \cdot \text{не квадрат} \\ mn(m-n+3)=13p^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} m-n=3 \\ q=2 \\ 6mn=13p^2; 6 \nmid 13p^2 \Rightarrow p \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

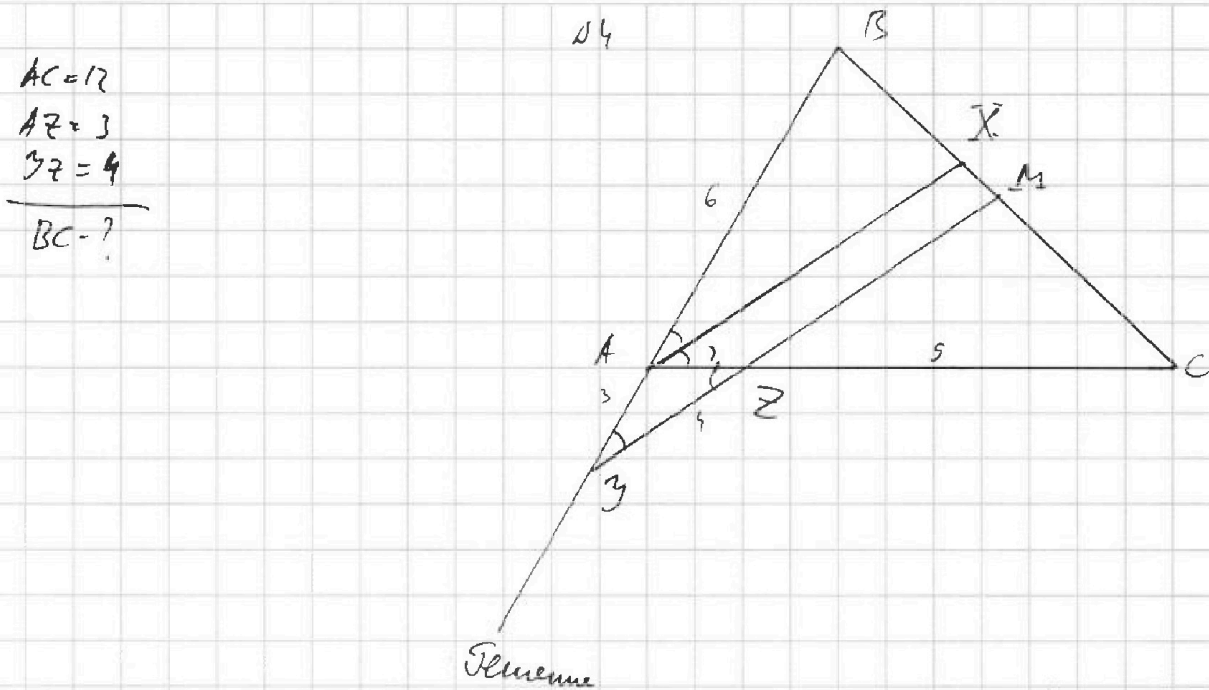
Ответ (7, 3)



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) $\angle XAZ = \angle ZAZ$ - накрест лежащие при $AX \parallel ZM$ и сек. AZ
- 2) $\angle BAX = \angle BZM$ - соответ. при $AX \parallel ZM$ и сек. BZ
- 3) $\angle BAX = \angle XAC$
 $\angle BZM = \angle ZCA \Rightarrow \angle BZM = \angle AZC \Rightarrow AZ \parallel ZC$ - ΔAZC - равнобедр. $\Rightarrow AZ = AC = 3$
- 4) $AC = AZ + ZC \Rightarrow ZC = 12 - 3 = 9$
- 5) $\angle ACX$
 $ZM \parallel AX \Rightarrow \frac{CM}{CX} = \frac{CZ}{CA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
 $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BX}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BX}{BM} = \frac{2}{3}$
- 6) $\angle ZBM$
 $AX \parallel ZM \Rightarrow \frac{BA}{BZ} = \frac{BX}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow BZ = \frac{3}{2} BA = 6 \Rightarrow BA = ZB = 6$
- 7) Также $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle ZAZ = 180^\circ - \alpha$
- 8) По теореме косинусов в ΔAZC
 $ZC^2 = AZ^2 + AC^2 - 2 \cdot AZ \cdot AC \cdot \cos \angle ZAZ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(\alpha) (180^\circ - \alpha)$$

$$16 = 18 + 18 \cos(\alpha)$$

$$18 \cos(\alpha) = -2$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{9}$$

5) По формуле косинусов в $\triangle ABC$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot BA \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos(\alpha)$$

$$BC^2 = 180 - 144 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC^2 = 196$$

$$BC = \pm 14 \quad \begin{matrix} BC > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad BC = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases} \quad (1)$$

(1) Пусть $x = a^4, y = b^4$ (можно так сделать, так как $x \geq 0$ и $y \geq 0$)

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^{16} - b^{16}) + (a^4 - b^4) + 5(a - b) = 0$$

$$4(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) + 5(a - b) = 0$$

$$(a - b) \underbrace{(4(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b) + (a^2 + b^2)(a + b) + 5)}_A = 0$$

$$\begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ a^2 + b^2 \geq 0 \\ a^4 + b^4 \geq 0 \\ a^2 + b^2 \geq 0 \\ a + b \geq 0 \\ 5 \geq 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow A \geq 5 \quad (a - b)A = 0 \quad \Rightarrow a - b \geq 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow x = y$$

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

Пусть $c = \sqrt{x+6}, d = \sqrt{5-x}$, тогда так $30 - x - x^2 = (x+6)(5-x)$

$$\begin{cases} c - d + 5 = 2cd \\ c^2 - d^2 + 25 = 20cd \end{cases}$$

$$c^2 + d^2 = 11$$

$$\begin{cases} c^2 + d^2 - 2cd = 4cd + 25 - 20cd \\ c^2 + d^2 = 11 \end{cases}$$

$$c^2 + d^2 = 11$$

$$\begin{cases} 11 = 4(cd)^2 + 25 - 18cd \\ c^2 + d^2 = 11 \end{cases} \quad (3)$$

$$c^2 + d^2 = 11$$

$$(3) \quad 4(cd)^2 - 18cd + 14 = 0$$

$$2(cd)^2 - 9cd + 7 = 0$$

$$2 = (cd - 1)(2cd - 7) = 0$$

$$\begin{cases} cd = 1 \\ cd = \frac{7}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} c^2+d^2=11 \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} c^2+d^2=11 \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2-2cd=11 \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} (c+d)^2-2cd=11 \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c+d)^2=13 \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} (c+d)^2=13 \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d=\sqrt{13} \\ cd=1 \end{cases} \vee \begin{cases} c+d=3\sqrt{2} \\ cd=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=\sqrt{13}-d \\ d\sqrt{13}-d^2=1(4) \end{cases} \vee \begin{cases} c=3\sqrt{2}-d \\ 6\sqrt{2}d-2d^2=7(5) \end{cases}$$

$$(4) d^2-d\sqrt{13}+1=0$$

$$D=13-4=9$$

$$d=\frac{\sqrt{13}\pm 3}{2}$$

$$c=\sqrt{13}-d$$

$$\begin{cases} c=\frac{\sqrt{13}-3}{2} \\ d=\frac{\sqrt{13}+3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} c=\frac{3\sqrt{2}-7}{2} \\ d=\frac{3\sqrt{2}+7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=\frac{\sqrt{13}+3}{2} \\ d=\frac{\sqrt{13}-3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} c=\frac{3\sqrt{2}+7}{2} \\ d=\frac{3\sqrt{2}-7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22-6\sqrt{13}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22+6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22+6\sqrt{13}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22-6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22-12\sqrt{2}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22+12\sqrt{2}) \end{cases} \vee \begin{cases} x+6=\frac{1}{4}(22+12\sqrt{2}) \\ 5-x=\frac{1}{4}(22-12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}(-3-6\sqrt{13}) \\ x=\frac{1}{4}(-1-6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4}(-7+6\sqrt{13}) \\ x=\frac{1}{4}(-1+6\sqrt{13}) \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4}(-24-12\sqrt{2}) \\ x=\frac{1}{4}(-2-12\sqrt{2}) \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{4}(-2+12\sqrt{2}) \\ x=\frac{1}{4}(2+12\sqrt{2}) \end{cases}$$

$x < 0$ - не верно $x < 0$ - не верно $x < 0$ - не верно $x > 0$ - верно

$$x = \frac{-2+12\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ $\left(\frac{-1+6\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56

И.И. Ваулин 9×9 , то у него всего 100 клеток покрашены
в чёрный. Способов покрасить два узла в белый всего $100 - 99 = 1$. И.И.
при повороте на $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ мы получаем ту же раскраску,
но все раскраски мы посчитали по 4 раза, но есть всего
 $\frac{100 - 99}{4} = 25 - 99 = 2475$ различных способов. Если же поворачивать на
углы не кратные 90° , то квадраты
не перейдут сам в себя.

Ответ 2475.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

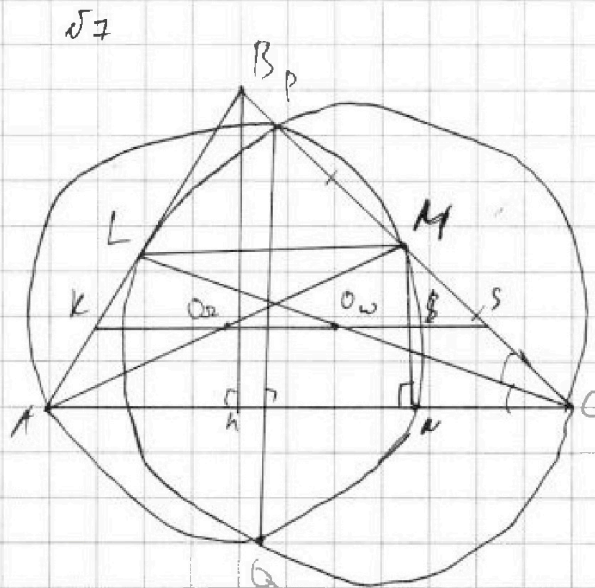


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AB=26$
 $AK=20$
Вн. касательн. к $\triangle ABC$



Решение

- 1) Пусть O_Ω и O_ω - центры окружностей Ω и ω соосн.
- 2) AK и LC - диаметры $\Rightarrow O_\Omega$ и O_ω - середины AK и LC соосн.
- 3) $P \in \Omega \cap \omega$
 $Q \in \Omega \cap \omega \Rightarrow PQ$ - радикальная ось Ω и $\omega \Rightarrow PQ \perp O_\Omega O_\omega$
 O_Ω и O_ω - центры
- 4) $PQ \parallel BH$
 $BH \perp AC \Rightarrow B, PQ \perp AC$
- 5) $PQ \perp AC$ (ч.4)
 $PQ \perp O_\Omega O_\omega$ (ч.3) $\Rightarrow O_\Omega O_\omega \parallel AC$
- 6) $O_\Omega O_\omega \parallel AC$ $\xrightarrow{\text{ч.}}$ $O_\Omega O_\omega$ - средняя линия в $\triangle AMC \Rightarrow MS = SC$,
 $AO_\Omega = O_\Omega M$ где $S = O_\Omega O_\omega \cap MC$
- 7) $LO_\omega = O_\omega C$ $\xrightarrow{\text{ч.}}$ $O_\omega S$ - средняя линия в $\triangle MC \Rightarrow SO_\omega \parallel LM \Rightarrow$
 $MS = SC \Rightarrow O_\omega O_\Omega \parallel LM$
- 8) $O_\Omega O_\omega \parallel LM$ (ч.7) $\xrightarrow{\text{ч.}}$ $LM \parallel AC \Rightarrow LM$ - средняя линия в $\triangle ABC \Rightarrow$
 $O_\Omega O_\omega \parallel AC$ (ч.5) $\xrightarrow{\text{ч.}}$ $BH = MC \Rightarrow BL = LA \Rightarrow CL$ - медиана

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9) CL-медиана (h.g) | h.
CL-бис-са (y.h.) $\Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедр. $\Rightarrow AC = BC$

10) AA-диагональ $\Omega \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow MN \perp BN$ / Т. Палеса
 $BM = MC \Rightarrow MN = NC$

11) Пусть $MN = NC = x \Rightarrow AN = 20 - x \Rightarrow AC = 20 + x = BC$

12) По Т. Пифагора в $\triangle ABM$ ($\angle AMB = 90^\circ$):

$$AM^2 + BM^2 = AB^2$$

13) По Т. Пифагора в $\triangle CBM$ ($\angle CMB = 90^\circ$):

$$BM^2 + CM^2 = BC^2$$

14) из 12) и 13)

$$AB^2 - AM^2 = BC^2 - CM^2$$

~~776~~
 $676 - (20-x)^2 = (20+x)^2 - 4x^2$

$$676 = 400 + x^2 - 40x + 400 + x^2 + 40x - 4x^2$$

$$676 = 800 - 2x^2$$

$$2x^2 = 124 \Rightarrow x^2 = 62 \Rightarrow x = \sqrt{62} \Rightarrow AC = BC = 20 + x = 20 + \sqrt{62}$$

Ответ $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$m, n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{3}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$$

$$B = m^2n - m^2 + 3mn$$

$$\begin{matrix} 13p^2 \\ 3q^2 \end{matrix}$$

$$(7; 3) \rightarrow \begin{cases} 4 - 13 = 13 \cdot 2^2 \\ 7 \cdot 3 = 3 \cdot 7^2 \end{cases}$$

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

$$\begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 13p^2 \\ mn(m-n+3) = 3q^2 \end{cases} \checkmark \begin{cases} (m-n)(m-n+9) = 3q^2 \\ mn(m-n+3) = 13p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13p \\ m-n = p \end{cases}$$

из 1-го

$$p^2 - 9 = 13$$

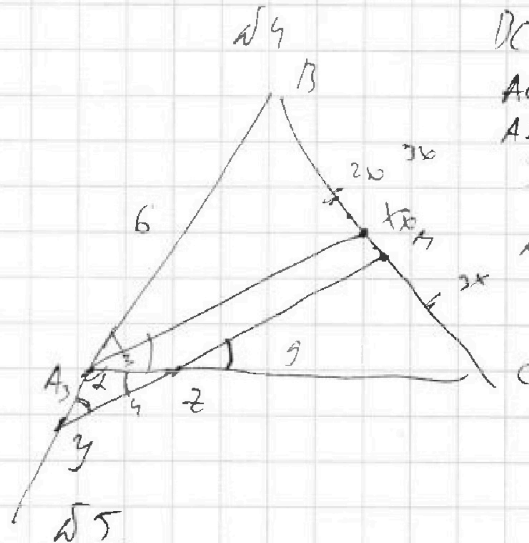
$$p^2 = 22 = 2 \cdot 11$$

$$(m-n) = p^2$$

$$m-n+9 = 13$$

$$\begin{matrix} p^2 = 4 \\ p = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m-n = 13 \\ mn \cdot 6 = 3q^2 \end{cases}$$



BC = ?

$$AC = 12$$

$$AZ = 3$$

$$3z = 4$$

$$AZ = AZ = 3$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{6} = 4y^4 - 5\sqrt{x} + y \end{cases}$$

$$\cancel{4x^4 + x + 5\sqrt{6}} = 4y^4 + y + 5\sqrt{x}$$

$$4x^4 - 4y^4 = y - x + 5\sqrt{6} - 5\sqrt{x}$$

$$(4x^4 - 4y^4) + (x - y) + 5(\sqrt{6} - \sqrt{x}) = 0$$

$$\begin{aligned} (x+6)(5-y) &= 20 - 6y + 5x - xy \\ 20 - x - y^2 &= 20 - 6y + 5x - xy + A \end{aligned}$$

$$A = -y^2 + 6y - 6x + xy =$$

$$= -y(y-x) + 6(y-x) =$$

$$= (y-x)(6-y)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_5 = 6x + 18$
 $a_7 = (x^2 - 4x)^2$
 $a_{11} = (-3x^2)$

x^2 d

$$\begin{cases} a_5 = a_0 + 4d \\ a_7 = a_0 + 6d \\ a_{11} = a_0 + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = x^4 + 16x^2 - 8x^3 - 6x - 18 \\ 4d = -3x^2 - x^4 - 16x^2 + 6x^3 \end{cases}$$

$$6d = -3x^2 - 6x - 18$$

$$2d = -x^2 - 2x - 6$$

$$a_0 = a_5 - 4d = 6x + 18 + 2x^2 + 4x + 12 = 2x^2 + 10x + 30$$

$$2x^2 + 10x + 30 - 3x^2 - 6x - 18 = (x^2 - 4x)^2$$

$x=1$

$$-x^2 + 4x + 12 = x^4 + 16x^2 - 8x^3$$

$$24 = -12 + a_0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$9 = -18 + a_0$$

$$x=2, 16 - 64 + 68 - 8 - 12 - 20 - 20 = 0$$

$$-3 =$$

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$x=21$$

$$(x-2)(x-2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} 30 \\ 6 \\ 16 \\ -12 \end{cases}$$

$$2d = -4$$

$$a_0 = 10 - 2d$$

$$(x-2)^2(x-1)(x-3) = 0$$

$$2d = -4$$

$$a_0 = 18$$

$$x=3$$

$$\begin{cases} 36 \\ 9 \\ -24 \end{cases}$$

$$2d = -27$$

$$2d = -18$$

d

with $14x + 7y = ?$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$14x + 7y = -162$$

$$2x + y =$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 14 + 4 = 18 \\ & 4x - 3y \leq 4x \leq 6 + 3y \Rightarrow 2 + 3y \leq x \leq \frac{6 + 3y}{4} \\ & -3 + 4y \leq 3x \leq 8 + 4y \Rightarrow -3 + 4y \leq x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14 \leq x + y \leq 14 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq 4x + 4y \leq 6 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -64 \leq 7x \leq 64 \\ -59 \leq 7x + 7y \leq 69 \end{cases}$$

$$\textcircled{162} \leq 14x + 7y \leq 162$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x-6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}$$

$$5x-6 + \sqrt{-y+25} + 10\sqrt{x-6} - 10\sqrt{5-y} - 2\sqrt{-20+6y+5x-y^2} =$$

$$= 4(30-x-y^2) - 10 - 4x - 4y^2$$

$$(x-6)(5-y)(y-x)(6-y) = (6y-y^2-6x+xy)(5x-xy-30+6y) =$$

$$= (30xy-6xy^2-180y+36y^2-5xy^2+xy^3+30y^2-6y^3-30x^2+6x^2y-30x-$$

$$-36xy+5x^2y-x^2y^2-30xy+6xy^2) =$$

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6 \\ 5-y \geq 0 \rightarrow y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ 30-x-y^2 \geq 0 \\ x+y^2 \leq 30 \end{cases} \rightarrow y \in [0; 5] \rightarrow y^2 \in [0; 25]$$

$$x \in [0; 30]$$

$$x = a^4 \quad y = b^4$$

$$4a^{16} + a^4 + 5a = 4b^{16} + b^4 + 5b$$

$$4(a^8+b^8)(a^8+b^8) + (a^8-b^8)(a^2+b^2) + 5(a-b) = 0$$

$$4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + (a^2+b^2)(a-b)(a+b) + 5(a-b) = 0$$

$$(a-b)(4(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b) + (a^2+b^2)(a+b) + 5) = 0$$

$$a=b \Rightarrow x=y$$

→ 0

$$(x+6)(5-x) = 30 - 6x + 5x^2 =$$

$$= 30 - x - x^2$$

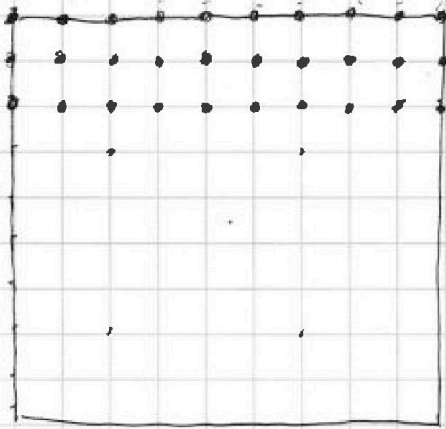


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{5}$

всего 100 узлов \Rightarrow 100 квадратов
перекрещивать два узла в белом?
все фиксированы по 4 пути в белом.

всего способов $\Rightarrow 100 \cdot 99$

тогда $\frac{100 \cdot 99}{4} = 99 \cdot 25 = 100 \cdot 25 - 25 = 2500 - 25 = 2475$



$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -6 \\ 3x - 4y &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y - 2 \\ 4x - 4y - 3y &= -6 \\ 4x - 7y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= -6 \\ 4x - 4y &= -9 \end{aligned}$$

$$-3y = 3 \Rightarrow y = -1$$

$$x = -1 - 2 = -3$$



$$\begin{aligned} x &= y \\ x &= (x+y) \\ 576 - 196 &= 400 \\ 400 + 144 &= 624 \end{aligned}$$

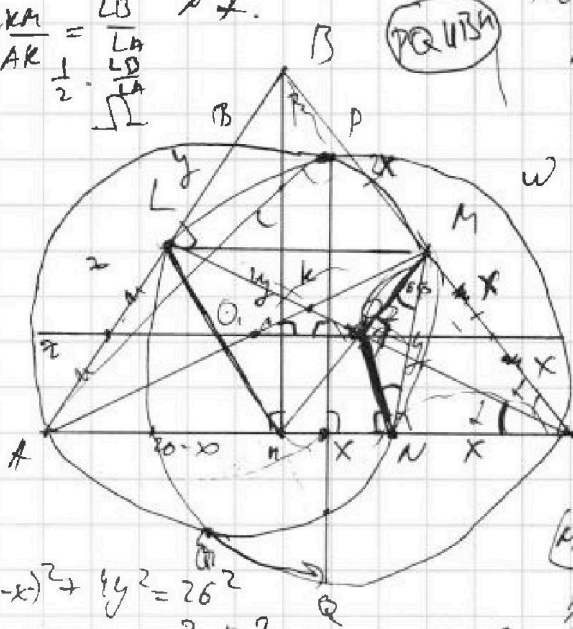
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{KM} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AK}{LB}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AK}{LB} \Rightarrow \frac{AK}{LB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{AK}{LB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{MK}{KA} = 1$$

$$\frac{AK}{LB} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{LB}{KA} = 1$$

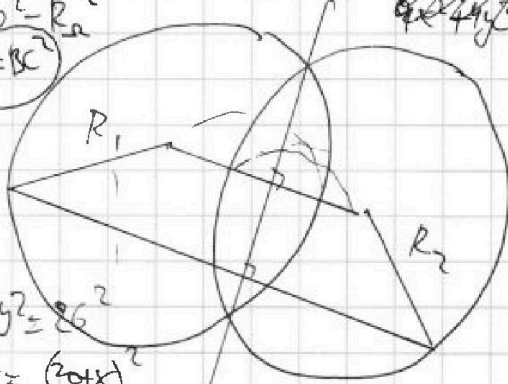
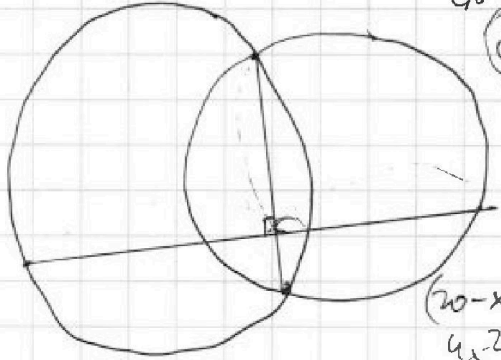
$$\frac{2KM}{AK} = \frac{LB}{\frac{1}{2} \cdot \frac{LA}{LB}} = \frac{2LB^2}{LA}$$



$AB = 26$
 $AN = 20$

$MN = \frac{1}{2} BH$
 $AN^2 + NM^2 = AM^2$

$AC = AM + 2x$
 $d_{KL}^2 = 20^2 + y^2$
 $AN = AM + x$
 $MN = y$



$$(20-x)^2 + y^2 = 26^2$$

$$d^2 + 13^2 = BC^2$$

$$(20-x)^2 + 4y^2 = 26^2$$

$$4x^2 + 4y^2 = (20-x)^2$$