МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $(x^2-2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии

$$\begin{cases}|x-2y| \leqslant 2\\ |2x-y| \leqslant 1.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2},\\ x^3+3x-\sqrt{2y}=y^3-\sqrt{2x}+3y.\end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=4$, $AN=5$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1: $\{a_n\}$ – ар. прогр, шаг = 6

$a_4 = 6 - 9x$

$a_6 = (x^2-2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$a_{10} = 9x^2$

$a_6 = a_4 + 2d$

$a_{10} = a_6 + 4d$

$\Rightarrow 2d = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$

$\Rightarrow 9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6)$

$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 18x - 12 = 9x^2$

$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$

корень $x = 1$ подходит

$$\begin{array}{l|l} x^4-4x^3+x^2+6x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} x^4-x^3 & x^3-3x^2-2x+4 \\ \quad -3x^3+x^2 & \\ \quad -3x^3+3x^2 & \\ \qquad -2x^2+6x & \\ \qquad -2x^2+2x & \\ \qquad\quad 4x-4 & \\ \qquad\quad 4x-4 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$

$x = 1$ тоже подходит

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-2x+4 & x-1 \\ \cline{2-2} x^3-x^2 & x^2-2x-4 \\ \quad -2x^2-2x & \\ \quad -2x^2+2x & \\ \qquad -4x+4 & \\ \qquad -4x+4 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2 - 2x - 4 = 0$

~~$D = 4+4 = 8 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$~~

~~Ответ: $x = 1$, $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$~~

$D = 4 + 16 = 20 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

Ответ: $x = 1$; $1+\sqrt{5}$; $1-\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

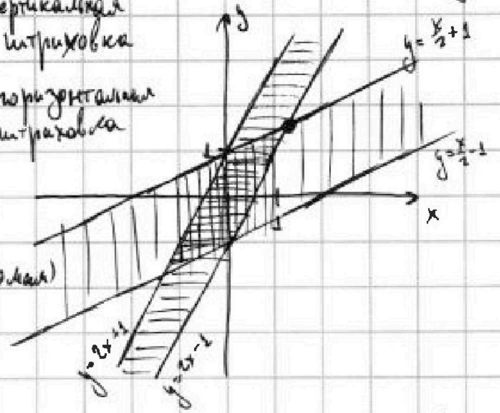
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Найти наиб. знач. $6x+3y$, при $\begin{cases}|x-2y|\le 2\\ |2x-y|\le 1\end{cases}$ раскроем нер-ва с модулем как систему

$\begin{cases}x-2y\le 2\\ x-2y\ge -2\\ 2x-y\le 1\\ 2x-y\ge -1\end{cases}$ $\begin{cases}y\ge \frac{x}{2}-1\\ y\le \frac{x}{2}+1\\ y\ge 2x-1\\ y\le 2x+1\end{cases}$ $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right)$ вертикальная штриховка; $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right)$ горизонтальная штриховка

изобразим это на графике



$y=2x-1$ (прямая)

x	0	1
y	-1	1

$y=2x+1$ (прямая)

x	0	-1
y	1	-1

$y=\frac{x}{2}-1$ (прямая)

x	0	2
y	-1	0

$y=\frac{x}{2}+1$ (прямая)

x	0	-2
y	1	0

Место пересечения штриховки является множеством решений системы

$6x+3y$ будет наибольшим, когда x и y принимают наибольшие значения. Из графика видно, что среди решений системы существует точка с наибольшим возможным знач. x и y. Это точка пересечения $y=2x-1$ и $y=\frac{x}{2}+1$. Найдем ее.

$2x-1=\frac{x}{2}+1$

$4x-2=x+2$

$3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+1=\frac{5}{3}$. Это точка $\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x+3y=6\cdot\frac{4}{3}+3\cdot\frac{5}{3}=8+5=13$

Ответ: 13.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (m, n) – натуральные числа

$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n-7)(m+2n)$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$

Одно из них $11p^2$, а другое $75q^2$, где p и q – простые числа

1\) Пусть $A = 11p^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+2n-7 \vdots 11 \\ m+2n \vdots 11 \end{array}\right.$

Одновременно они делиться на 11 не могут, т.к. тогда их разность $\vdots 11 \Rightarrow 7 \vdots 11$, что неправда

1\. $m+2n \vdots 11$

$\Rightarrow$ рассмотрим, какая из скобок $\vdots p$ и p^2

1\. $m+2n \vdots p^2 \Rightarrow m+2n = 11p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 1$ (иначе $A \neq 11p^2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow m+2n = 8 \Rightarrow m+2n \not\vdots 11 \Rightarrow$ ↯

2\. $\left.\begin{array}{l} m+2n \vdots p \\ m+2n-7 \vdots p \end{array}\right| \Rightarrow m-2n-(m-2n-7) \vdots p$

$\Rightarrow 7 \vdots p \Rightarrow p = 7$ (p простое число) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $A = 11p^2$, то $\begin{array}{l} m+2n = 11p \\ m+2n-7 = p \\ p = 7 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m+2n = 77 \\ m+2n = 14 \end{array}\right| \Rightarrow$ ↯

3\. $\left.\begin{array}{l} m+2n-7 \vdots p^2 \\ (m+2n \not\vdots p) \end{array}\right| \Rightarrow m+2n = 11$

$\Rightarrow m+2n-7 = p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow A = 44$

$\Rightarrow$ при $m+2n = 11$ число A удовл. усл. подберём все пары натуральных m и n : $m+2n = 11$ и проверим подходит ли B под усл.

$(1; 5) \Rightarrow B = 1 \cdot 5 \cdot (1+10+9) = 100 \Rightarrow \not\vdots 75$

$(3; 4) \Rightarrow B = 3 \cdot 4 \cdot (3+8+9) = 20 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow \not\vdots 75$

$(5; 3) \Rightarrow B = 5 \cdot 3 \cdot (5+6+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow B = 75 \cdot 4$ → подходит

$(7; 2) \Rightarrow B = 7 \cdot 2 \cdot (7+4+9) = 7 \cdot 2 \cdot 20 \Rightarrow \not\vdots 75$

$(9; 1) \Rightarrow B = 9 \cdot 1 \cdot 20 \Rightarrow \not\vdots 75$

2\. $m+2n-7 \vdots 11$

1\. $m+2n-7 \vdots p^2 \Rightarrow m+2n = 1 \Rightarrow m+2n-7 = -6 \Rightarrow$ ↯

2\. $\left.\begin{array}{l} m+2n-7 \vdots p \\ m+2n \vdots p \end{array}\right. \Rightarrow p = 7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m+2n-7 = 77 \\ m+2n = 7 \end{array}\right| \Rightarrow$ ↯

3\. $m+2n \vdots p^2 \Rightarrow m+2n-7 = 11 \Rightarrow m+2n = p^2 = 18 = 2 \cdot 9 \Rightarrow$ ↯

Первый случай разобран

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

2) Пусть $k = 11p^2$

$k = m \cdot n \cdot (m+2n+9)$

1. $m=1$: $n(2n+10) = 11p^2$

$2n(n+5) = 11p^2 \Rightarrow p^2 \vdots 2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow p^2=4$

$\Rightarrow n(n+5) = 22$; $n^2+5n-22=0$; $D = 25+88 = 113$

Очевидно, что натуральных корней нет

2. $n=1$: $m(m+11) = 11p^2$

пусть $m \not\vdots 11 \Rightarrow m+11 \not\vdots 11 \Rightarrow k \not\vdots 11 \Rightarrow$ ↯

пусть $m \vdots 11 \Rightarrow m+11 \vdots 11 \Rightarrow k \vdots 11^2 \Rightarrow k = 11^3$ $(p=11)$

$m(m+11) = 11^3$ решим в натуральных числах

1	11^3
11	11^2
11^2	11
11^3	1

Очевидно, что ни в одном случае решений нет

3. $m+2n+9 = 1$ — это невозможно, т.к. $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ все множители $> 1 \Rightarrow \forall$ из них это или 11, p или p

т.к. $n, m \in \mathbb{N}$, то $m+2n+9 > m, n \Rightarrow m+2n+9 = 11$

$m+2n = 2$

но при $m=1, n=1$: $m+2n=3$, что уже $>2 \Rightarrow$ нет решений

Случай разобран.

Ответ: $(5; 3)$

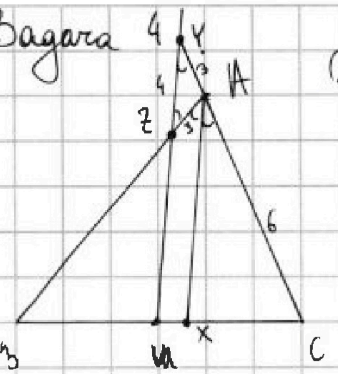
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$; AX – бис-а; (·) M – ср. BC; $ZM \parallel AX$; (·) $Z \in AB$; (·) $Y \in AC$; $AC = 6$; $AZ = 3$; $YZ = 4$

Найти: BC

Решение: 1) AX – бис-а $\angle BAC$ (усл.) $\Rightarrow$ $\angle BAX = \angle XAC$

$AX \parallel YM$ (усл.) $\Rightarrow$ $\angle MYC = \angle XAC$ (соотв.; YA – секущая) (св-во $\parallel$ прям.) $\Rightarrow$

$\angle YZA = \angle ZAX$ (накрест. леж.; ZA – секущая)

$\Rightarrow \angle AYZ = \angle YZA \Rightarrow \triangle AYZ$ – р/б (по призн.) $\Rightarrow AZ = AY = 3$ (усл. и опр.)

2) $AX \parallel YM$ (усл.) $\Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AC}{YA} = \frac{XC}{XM} = \frac{2}{1} \Rightarrow XC = 2XM; \quad XC + XM = CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow 3XM = CM = \frac{1}{2}BC = BM$$

$$\circledast\ \frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{XM} \Rightarrow \frac{BZ}{3} = \frac{3XM}{XM} \Rightarrow BZ = 9 \Rightarrow AB = 12$$

3) Пусть $XM = y \Rightarrow$ (из п. 2) $XC = 2y$; $BX = 4y$; $BC = 6y$

Уравнение биссектрисы: $AX^2 = AB \cdot AC - BX \cdot XC = 72 - 8y^2$

4) $AX \parallel YM$ (усл.) $\Rightarrow$ $\triangle MBZ \sim \triangle XBA$; $\triangle AXC \sim \triangle YMC$ (по лемме о подобии) $\Rightarrow$ $\frac{AX}{ZM} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; $\frac{AX}{(ZM+4)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ из подоб. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ZM+4}{ZM} = 2 \Rightarrow ZM + 4 = 2ZM$$

$$ZM = 4 \Rightarrow AX = \frac{16}{3}$$

5) $AX^2 = 72 - 8y^2$ (п. 3); $AX = \frac{16}{3}$ (п. 4) $\Rightarrow$ $72 - 8y^2 = \frac{256}{9}$; $8(9 - y^2) = \frac{256}{9} \Rightarrow 9 - y^2 = \frac{32}{9}$; $9y^2 = 81 - 32$; $9y^2 = 49 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{49}{9} \Rightarrow y = \left[\begin{array}{l} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \text{ – не уд. усл.} \end{array}\right. \Rightarrow BC = 6y = \frac{6 \cdot 7}{3} = 14$$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 $\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2} & (1) \\ x^3+3x-\sqrt{2y}=y^3-\sqrt{2x}+3y & (2) \end{cases}$

Рассмотрим ограничения: В системе есть $\sqrt{2x}, \sqrt{2y}; \sqrt{7-y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 0\leq y\leq 7 \end{cases}$

(2) $x^3+3x+\sqrt{2x}=y^3+3y+\sqrt{2y}$ Очевидно, что $f(x)=x^3+3x+\sqrt{2x}$ строго

$x, y\geq 0$ (из ограничений) возрастает на $x\in[0;+\infty)$

$\begin{cases} f(x)=f(y) \\ x\in[0;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x=y$ (т.к. ∀ знач. аргумента соотв. ровно одно знач. ф-ции)

(1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}+7=2\sqrt{14+5x-x^2}$ $(0\leq x\leq 7)$

1) Пусть $\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}=t \Rightarrow t^2=\cancel{x}+2+7-\cancel{x}-2\sqrt{14+5x-x^2}$

$2\sqrt{14+5x-x^2}=9-t^2$

2) $t+7=9-t^2$; $t^2+t-2=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

~~3. Обр замена~~

$\cancel{\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}=1 \\ 0\leq x\leq 7 \\ 9- \end{cases}}$

3) Обратная замена: 1. $2\sqrt{14+5x-x^2}=9-1=8$ $(0\leq x\leq 7)$

$14+5x-x^2=16$

$x^2-5x+2=0$; $D=25-8=17$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \quad (x>0; \sqrt{17}<\sqrt{25}=5 \Rightarrow x<\frac{5+5}{2}=5<7) \\ x=\frac{5-\sqrt{17}}{2} \quad (5>\sqrt{17}\Rightarrow x>0;\ 5<7\Rightarrow x<7) \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ решения $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

2. $2\sqrt{14+5x-x^2}=5$ $(0\leq x\leq 7)$

$4(14+5x-x^2)=25$

$4x^2-20x-31=0$; $D=400+496=896=16\cdot 56 \Rightarrow x=\frac{20\pm 4\sqrt{56}}{8}=\frac{5\pm \cancel{\sqrt{56}}\ 2\sqrt{14}}{2}$ $\left(\frac{5\pm\sqrt{56}}{2}\right)$

$x=\frac{5+\sqrt{56}}{2}$; $\sqrt{56}<\sqrt{64}=8 \Rightarrow x<\frac{5+8}{2}=6{,}5<7$ ~~$5>0\Rightarrow x>$~~ $5+\sqrt{56}>0\Rightarrow x>0$

$x=\frac{5-\sqrt{56}}{2}$; $5=\sqrt{25}<\sqrt{56}\Rightarrow x<0 \Rightarrow$ не подходит

$\Rightarrow$ Решения: $\left(\frac{5+\sqrt{56}}{2}; \frac{5+\sqrt{56}}{2}\right)$

$\left(\frac{5+2\sqrt{14}}{2}; \frac{5-2\sqrt{14}}{2}\right)$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$; $\cancel{\left(\frac{5+\sqrt{57}}{2}; \frac{5+\sqrt{57}}{2}\right)}$ $\cancel{\left(\frac{5+2\sqrt{14}}{2}; \frac{5-2\sqrt{14}}{2}\right)}$

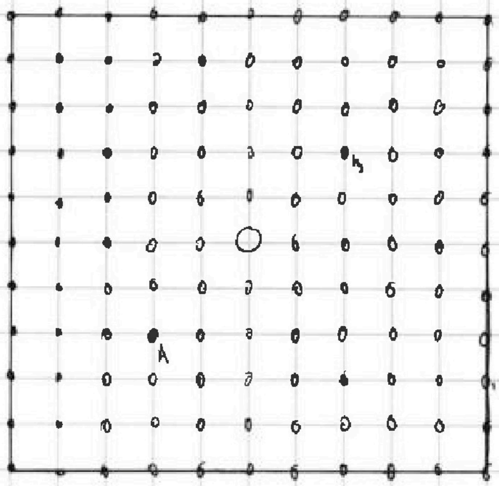
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

⑥



Всего узлов (10+1)(10+1) = 121 штука

=> всего способов выбрать 2 узла из них

$C^2_{121} = \frac{121 \cdot 120}{2}$ – это количество раскрасок, которые могут отличаться друг от друга на поворот, но не совпадают изначально

Если 2 узла сетки лежат на одинаковом расстоянии до центрального узла (отмечен большим кружком) и ~~весь соединить~~ на одной прямой с ним (все три точки на одной прямой) – например как точки A и B на рисунке – то при повороте на 180° A перейдет в B, ~~во всех остальных расположениях A и B, и не переходят~~ а B – в A. Если A и B не подходят под описанные выше условия, то нет такого поворота, при котором узлы переходят друг в друга (для этого нужен поворот на 180° и симметричность отн. центра вращения, т.е. центрального узла.)

=> Точки, симметричные отн. центра вращения при подсчёте C^2_{121} дают по 2 раскраски в общ. число (ост. 2 с ними совпадают; всего раскрасок, которые дают 2 точки – 4, т.к. 4 поворота: на 0°, 90°, 180°, 270°). Остальные пары точек дают по 4 раскр. в общее число. Ответом будет суммарное кол-во пар.

Посчитаем количество пар, которые дают по 2 раскраски. Это несложно сделать по рисунку (различными парами считаются пары, у которых хотя бы один узел различен) => их 36

Но если любую из них повернуть на 90°, то получится пара, которая тоже входит в эти 36, => в соотв. с усл. задачи эти 36 пар дадут 18 различных раскрасок.

=> $C^2_{121} - 36 = 7224$ пар, которые дают по 4 раскраски => различных из них $\frac{7224}{4} = 1806$ => всего раскр. 1806 + 18 = 1824 Ответ: 1824 разл. раскрасок

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик ①

$a_4 = 6 - 9x$

$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$a_{10} = 9x^2$

$\frac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2} = a_5 = 6-9x+d$

$2d = x^6-4x^3+4x^2+9x-6$

$a_4 > a_6 > a_{10}$

$6-9x > 9x^2$

$9x^2+9x-6<0$

$3x^2+3x-2<0$

$x \in$

$\begin{cases} 6-9x > x^4-4x^3+4x^2 \\ x^4-4x^3+4x^2 > 9x^2 \end{cases}$

$x^2(x-5)(x+1) > 0$

$\sqrt{33} < 6$

$D = 9+2\cdot4\cdot3 = 33$

$x \neq 0$; $x \in$ ~~$[-1;5]$~~

$(-\infty;-1)\cup[5;+\infty)$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$

$x \in [-1;\frac{1}{2}]$

-3

1

9

$\Rightarrow d = 2$

$d<0$; но $a_{10} > 0$

$\Rightarrow 6-9x+6d = 9x^2$

$6-9x>0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$

$x=-1$: $a_4 = 15$

$a_6 = 9$

$a_{10} = 9$

~~$x^4-4x^3+4x^2$~~

$x^4-4x^3+4x^2+2(x^4-4x^3+4x^2+9x-6) = 9x^2$

$3x^4-12x^3+12x^2+18x-12 = 9x^2$

$x^4-4x^3+x^2+6x-4=0$

$x=1$: $1-4+1+6-4$

$(x-1)^2 = x^2-2x+1$

~~$x^4-4x^3+4x^2$~~

$$\begin{array}{r|l} -x^4-4x^3+x^2+6x-4 & x^2-2x+1 \\ \hline x^4-2x^3+x^2 & x^2-2x-4 \\ -2x^3 \quad +6x & \\ -2x^3+4x^2-2x & \\ \hline -4x^2-8x-4 & \end{array}$$

$D = 4+16 = 20$

$\frac{56}{4} = 14$

$$\begin{array}{r|l} 896 & 57 \\ \hline -57 & 16 \\ \hline 326 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 896 & 16 \\ \hline 80 & 56 \\ \hline 96 & \\ -96 & \\ \hline \end{array}$$

$56 = 8\cdot7 =$

$16\cdot4 = 64 = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2}\\ x^3+3x-\sqrt{2y}=y^3-\sqrt{2x}+3y\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq 0\\ 0\leq y\leq 7\end{cases}$$

1
~~2~~
~~3~~
~~4~~
~~5~~
6
7

$x^3+3x+\sqrt{2x}=y^3+3y+\sqrt{2y}$

$f(x)=f(y)$

Это две строго возр. ф-ции $(x\geq 0;\ y\geq 0)$

$\Rightarrow x=y$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}+7=2\sqrt{14+5x-x^2}$ $\quad(x+2)(7-x)=14+5x-x^2$

121·60 =

$(\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x})^2=\cancel{x}+2+7-\cancel{x}-2\sqrt{14+5x-y^2}$

$2\sqrt{14+5x-x^2}=-(\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x})^2+9$

$\ldots=t$

$$\begin{array}{r}\times\ 121\\ 60\\ \hline 7260\end{array}\qquad \begin{array}{r}7260\\ -\ \ 36\\ \hline 7224\end{array}$$

$9-t^2=t+7\Rightarrow t^2+t-2=0$

$\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\end{array}\right.$

1) ~~$\sqrt{x+2}=1+\sqrt{7-x}$~~

~~$x+2=1+7-x+2\sqrt{7-x}$~~

$x+2+7-x-2\sqrt{14+5x-x^2}=1$

$2\sqrt{14+5x-x^2}=8$

$14+5x-x^2=16$

$x^2-5x+2=0$ $\quad 0\leq x\leq 7$

$D=25-8=17$

$\frac{7224}{4}=1806$

$$\begin{array}{r}1806\\ +\ \ 18\\ \hline 1824\end{array}$$

$\sqrt{7-x}$

Кур. [illegible]

② $a_4=6-9x$

$a_7=(x^2-2x)^2$

$a_{10}=9x^2$

$x=?$

$9x^2+9x-6\ \vdots\ 6$

$3x^2+3x-2\ \vdots\ 2$

$3x(x+1)\ \vdots\ 2\Rightarrow$

~~$9x^2-x^4+4x^3$~~

$x^4-4x^3-5x^2\ \vdots\ 4$

$x^2(x+1)(x-5)\ \vdots\ 4$

$D=9+4\cdot2\cdot3=24+9=33$

x^2-4x-5

$$\begin{cases}9x^2+9x-6=6d\\ x^4-4x^3-5x^2=4d\end{cases}$$

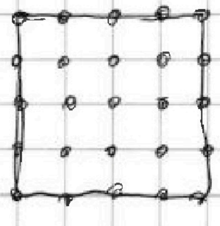
$3x^2+3x-2=2d$

$x^2(x+1)(x-5)\ \vdots\ 4$

$x_1^4-4x^3+4x^2+9x-6=2d$ $\quad$ 1) $x\vdots 2$; 2) $x\vdots 2$; 3) $x\vdots 4$

$$\begin{array}{r}\times\ 25\\ 12\\ \hline 50\\ +\ 250\\ \hline 300\end{array}$$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{33+24d}}{6}$



$(a+1)^2$ 1) [illegible] центральн[illegible] : 4 сп.

1) если точки переходят друг в друга (обе) при каком-то повороте, то получ 2 один раскр → таких пар 12

2) если нет, то 4

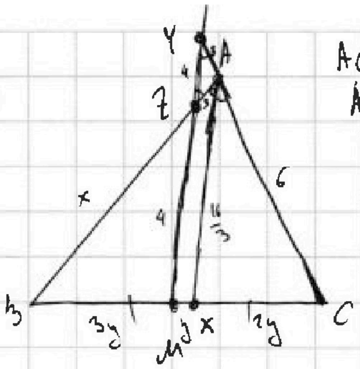
$C_{25}^2=\frac{25\cdot24}{2}$ сп. выбрать 2 точки из них (с повт. раскр)

$300-24=276$

$$\begin{array}{r}69\\ +\ 12\\ \hline 81\end{array}$$

$\frac{276}{4}=69$

④



$AC=6$

$AZ=3$

$YZ=4$

$\frac{BM}{MX}=\frac{x}{3}\Rightarrow$

$BM=xy;\ MX=3y\Rightarrow BX=(x+3)\cdot y$

$\frac{BX}{XC}=\frac{BA}{AC}=\frac{x+3}{6}$

$\overset{\cdot 10}{81}$
-32
49

$\frac{256}{y}=8(9-y^2)^{4}$

$32=81-9y^2;\ 9y^2=49;\ y=\frac{7}{3}$

$\Rightarrow BC=6y=7\cdot 2=14$

$6BX=(x+3)\cdot XC;\quad 6y(x+3)=(x+3)\cdot XC$

$\Rightarrow XC=6y$

$AX^2=\overset{72}{12\cdot 6}-8y^2=8(9-y^2)$

$BC=(x+9)\cdot y$

$\frac{AX}{ZM+4}=\frac{2}{3};\ \frac{AX}{ZM}=\frac{4}{3}$ $3AX=2ZM+8$ $\Rightarrow ZM=4$

$3AX=4ZM$ $\underset{\shortparallel}{6(x+3)}$ $\Rightarrow AX=\frac{16}{3}$

$AX^2=AB\cdot BC-BX\cdot XC=6x+18-y^2(6x+18)=6(x+3)(1-y^2)$

$BM=y$
$MX=z$

$\frac{AX}{YM}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ и $\frac{3AX}{2}=4+ZM$ $\frac{AX}{ZM}=\frac{x+3}{x}$

$AX=\frac{2ZM+8}{3}$

$p=\frac{6+4}{2}=5$

$S_{AZY}=\sqrt{5\cdot 2\cdot 2\cdot 1}=2\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h$

$\Rightarrow h=\sqrt{5}$

$AXYM:\ \frac{1}{2}(AX+ZM+4)\cdot h=\frac{1}{2}(AX+ZM)\cdot h+S_{AZY}$

$(AX+ZM+4)h=(AX+ZM)\cdot h+4\sqrt{5}$

$\frac{XC}{XC+XM}=\frac{2}{3};\ \frac{y-z}{y}=\frac{2}{3}$

$\frac{BM}{BM+XM}=\frac{3}{4}$ $\frac{y}{y+z}=\frac{3}{4}$

$\frac{y-z}{y+z}=\frac{1}{2}$

$\frac{2(ZM+4)}{3ZM}=\frac{x+3}{x}\Rightarrow 2x(ZM+4)=3ZM\cdot x+9ZM$

$\cancel{x\cdot ZM+8x-3ZM=0}$

$\cancel{ZM=\frac{8x}{8-x}}$

$ZM\cdot x+9ZM=8x$

$ZM=\frac{8x}{x+9}$

$AX=\frac{\frac{16x}{x+9}+8}{3}=\frac{24x+72}{3(x+9)}=\frac{8x+24}{x+9}=\frac{8(x+3)}{x+9}$

$x=9\Rightarrow AB=12$

$\frac{XC}{MX}=\frac{2}{1};\ \frac{BM}{MX}=\frac{3}{1}$

$6(x+3)(1-y^2)=\frac{64(x+3)^2}{(x+9)^2}$

$6(x+9)^2(1+y^2)=64(x+3)$

$3(x+9)^2(1+y^2)=32(x+3)$

$\frac{MX}{3}=\frac{XC}{6}$ $\frac{XC}{6}=\frac{BM}{x}$ $\frac{MX}{XC}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3MX=MC;\ MX=\frac{1}{3}BM$

$\frac{MX}{3}=\frac{BM}{x}$ $\cancel{\frac{MX}{XC}}=\frac{MX}{BM}=\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=9$

2) $m+2n-7 \vdots 11$

$(m+2n)(m+2n-7)=11p^2$

$m+2n-7 \vdots p^2 \to$ ↯ $(m+2n=1)$

$m+2n-7 \vdots p \Rightarrow p=7$ (оба $\vdots p \Rightarrow$ р-ть $\vdots p$) ↳ $7 \vdots p$

$\Rightarrow m+2n-7=77$ $\to$ ↯

$m+2n=7$

$m+2n \vdots p^2 \Rightarrow m+2n-7=11$

$m+2n=18=p^2 \to$ ↯

* $mn(m+2n+9)=11p^2$

~~м~~ 1) $m=1$: $n(2n+10)=11p^2$

$2(n+5)\cdot n=11p^2 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n(5+n)=22$

2 11 $\to$ ↯

$$\begin{array}{r} \times\, 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ +\,121\ \ \\ \hline 1331 \end{array}$$

2) $n=1$: $m(m+11)=11p^2$

~~м~~ $\Rightarrow$ оба $\vdots 11$ или оба $\not\vdots$ $\Rightarrow m \vdots 11 \Rightarrow m+11 \vdots 11$

$\Rightarrow m(m+11)=11^3 \to$ ↯

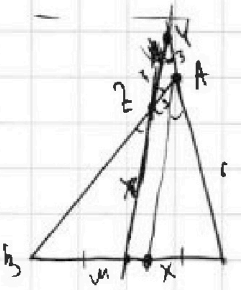
3) $m \neq 1; n \neq 1 \Rightarrow$ три ~~[illegible]~~ мн-ля $11, p^2, p$ $m+2n+9>m, n \Rightarrow$

$m+2n+9 \neq 1$ (числа N)

$\Rightarrow m+2n+9=11 \Rightarrow m+2n=2$

$m=n=p$ ↯

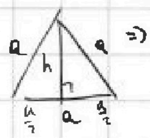
④



$AC=6$; $AZ=3$; $YZ=4$

$BC=?$ $YC=4$

~~$\frac{YC}{YM}=\frac{YA}{YZ}=\frac{3}{4} \Rightarrow YM=\frac{XC\cdot 4}{3}=\frac{9\cdot4}{3}=12 \Rightarrow ZM=8$~~



$h=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h^2=\frac{3a^2}{4}$

$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a}{4}$

~~$\frac{XC}{BX}=\frac{AC}{AB}$~~ ~~$\frac{AX}{ZM}$~~ $=$

$ZM=x$

$\frac{AC}{CY}=\frac{AX}{YM}$ $\frac{2}{3}=\frac{AX}{4+x}$

$AX=\frac{8+2x}{3}$

$\frac{BZ}{BZ+3}=\frac{ZM}{AX}=\frac{3x}{2(x+4)}=\frac{BM}{BX}$

$$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 4 \\ \hline 56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ -\,25 \\ \hline 31 \end{array}$$

896

~~$\frac{BM}{BA+y}$~~ $AX^2=AC\cdot AB-BX\cdot XC$

$2x\cdot BZ+8BZ=9x+3x\cdot BZ$

$x\cdot BZ-8BZ+9x=0$

$BZ=-\frac{9x}{x-8}=\frac{9x}{8-x} \Rightarrow AB=\frac{9x}{8-x}+3=\frac{6x+24}{8-x}$

$$\begin{array}{r} \times\, 31 \\ 16 \\ \hline +\,186 \\ 31\ \ \\ \hline 496 \end{array}$$

$AX=\frac{8+2x}{3}$

$AX^2=\frac{6\cdot(6x+24)}{8-x}$

$\frac{896}{4}=228$ $\frac{228}{4}=57$ $\frac{57}{3}=19$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

① Черновик

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

$a_4 = 6 - 9x$

$a_6 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$a_{10} = 9x^2$

$\frac{2\cancel{56}}{8} = 3^2$

$a_6 = a_4 + 2d$

$a_{10} = a_6 + 4d$

$a_{10} = a_4 + 6d$

$9x^2 = 6 - 9x + 6d$

$3x^2 + 3x - 2 - 2d = 0$

$D = 9 + \underbrace{3 \cdot 4 \cdot 2(1+d)}_{24+24} = 9 + 24 + 24d = 33 + 24d$

$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4d$

$x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 4d = 0$

$x^4 - 4x^3 + 4x^2$

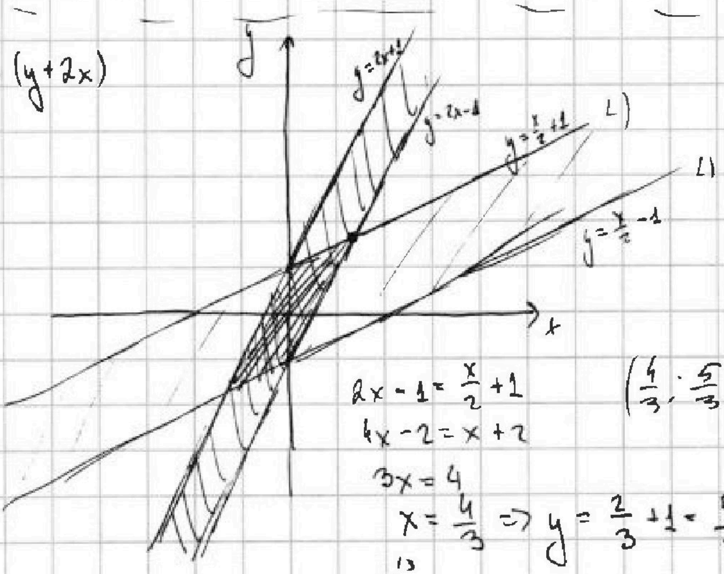
② $\max (3y + 6x) = 3(y + 2x)$

$\begin{cases} |x - 2y| \le 2 \\ |2x - y| \le 1 \end{cases}$

$-2 \le x - 2y \le 2$

$\begin{cases} -2 \le x - 2y \\ 2 \ge x - 2y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} y \le \frac{x}{2} + 1 \\ y \ge \frac{x}{2} - 1 \end{cases} \right.$

$\begin{cases} -1 \le 2x - y \\ 1 \ge 2x - y \end{cases}$ $\left[\begin{cases} y \le 2x + 1 \\ y \ge 2x - 1 \end{cases} \right.$



$2x - 1 = \frac{x}{2} + 1$

$4x - 2 = x + 2$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

$\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$

$3\left(\frac{5}{3} + \overset{13}{\frac{8}{3}}\right) = 13$

③ $(m, n) \in N$ $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m + 2n + 9)$

Одно $11p^2$, другое $75q^2$ $(p, q$ - простые$)$ $75 = 5 \cdot 15 = 25 \cdot 3$

1) $A = 11p^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m + 2n \vdots 11 \\ m + 2n - 7 \vdots 11 \end{array} \right.$ (оба дел не могут)

$m + 2n \vdots 11$ (надо проверить B, иначе неинтересно)

2) $m + 2n \vdots 11 \Rightarrow x = 11, 22, 33, 44, \ldots$

или $m + 2n \vdots p^2 \rightarrow$ ~~или~~ $m + 2n - 7 = 1 \Rightarrow ?$

$m + 2n \vdots p \Rightarrow p = 7$

$m + 2n = 77 \Rightarrow m + 2n - 7 = 70 \Rightarrow ?$

$m + 2n - 7 = p^2$ $m + 2n - 7 = 4 \Rightarrow p = 2$

$m + 2n = 11$