



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть мал диаметр прогр-ии равен a

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 - 9x + 2a = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ 6 - 9x + 6a = 9x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6 = 3x^2 + 3x - 2$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0; D = 2^2 + 4 \cdot 4 = 20 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Ответ: } x = 1; 1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x-2y \leq 2 \\ -1 \leq 2x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2y-2 \\ x \leq 2y+2 \\ y \geq 2x-1 \\ y \leq 2x+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq 2y-2 \geq 4x-4 \Rightarrow 3x \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow y \leq \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2y-2 \\ x \leq 2y+2 \\ 4x \geq 2y-2 \\ 4x \leq 2y+2 \end{cases} \quad \begin{aligned} -x &\leq -2y+2 \Rightarrow 4x+0 \leq 2y+2+4(-2y+2) \Rightarrow \text{cancel} \\ \Rightarrow 0 &\leq 10y-6 \Rightarrow y \geq \frac{3}{5} \quad 0 \leq -6y+10 \Rightarrow y \leq \frac{5}{3} \\ \Rightarrow 4x &\leq 2 \cdot \frac{5}{3} + 2 \Rightarrow 4x \leq \frac{16}{3} \Rightarrow x \leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3y + 6x \leq 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow 3y + 6x \leq \frac{23}{1} = 23$$

Ответ: $3y + 6x \leq 23$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$A = m^2 + 4mn + 2n^2 - 4m - 14n = (m+2n)(m+2n) - 4(m+n) = (m+2n)(m+2n-4)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Пусть $B = 11p^2$; ~~$m+2n+9 = 11$, $m+2n+9 = 11$ не подходит $m=2$~~

$m+2n+9 \neq 11$, т.к. $m, n \geq 1 \Rightarrow m+2n+9 \geq 12$

~~$m+2n+9 = 11p$~~ если $m+2n+9 = p$, то $m+n \leq p$, но тогда $m \neq p$

$\Rightarrow m+2n+9 = 11p$, если $m=p, n=1 \Rightarrow m+2n+9 =$

$= p+2+9 = p+11 = 11p \Rightarrow 10p=11 \Rightarrow$ противоречие

если $n=p \Rightarrow m=1 \Rightarrow m+2n+9 = 1+2p+9 = 11p \Rightarrow 9p=10 \Rightarrow$ противоречие

Пусть $A = 11p^2$; если $m+2n = 11p^2$, то $m+2n-4 = 1 \Rightarrow m+2n = 5 \Rightarrow$ противоречие

если $m+2n = 11p$, а $m+2n-4 = p$, то $p+4 = 11p \Rightarrow p = \frac{4}{10} \Rightarrow$ противоречие

если $m+2n = 11$, то $m+2n-4 = p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$

если $m+2n-4 = 11$, то $m+2n = p^2 = 18 \Rightarrow p = \sqrt{18} \Rightarrow$ противоречие

\Rightarrow Единственное реш.-е при $p=2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n=11 \\ mn(m+2n+9) = 75 \cdot 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2n=11 \\ 20mn = 75 \cdot 2^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 4mn = 15 \cdot 2^2 = 60$ ~~иногда бывает, что и возрастают пары~~

$(m;n) = (1;5), (3;4), (5;3), (7;1), (9;1)$, из которых подходит только $(5;3)$

ответ: все при $q=2$

Ответ: $n=5; m=3$

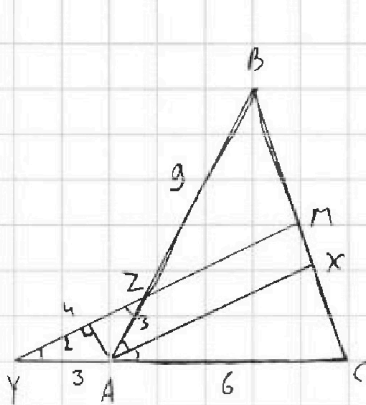


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



\sphericalangle
 $YM \parallel AX \Rightarrow \sphericalangle MYA =$
 $\sphericalangle YMA = \sphericalangle DAC = 2\alpha$
 $\sphericalangle YAZ = \alpha$
 $YM \parallel AX \Rightarrow \sphericalangle MYA = \sphericalangle BZM = \alpha$

$\sphericalangle BZM = \sphericalangle YZA = \alpha \Rightarrow \triangle YZA - \text{равноб.} \Rightarrow AY = AZ = 3$

\Rightarrow по теореме Фалеса $\frac{CX}{MX} = \frac{AC}{AY} = \frac{2}{1} \Rightarrow MX = \frac{CM}{3} = \frac{BM}{3}$

\Rightarrow по т. Фалеса $\frac{BZ}{AZ} = \frac{BM}{MX} = 3 \Rightarrow BZ = 3AZ = 9 \Rightarrow AB = 9 \cdot 12$

$\triangle YAZ - \text{равноб.} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha} = \sqrt{6^2 + 12^2 + 16 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}} = 6 \sqrt{1 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9}} = \\ &= 6 \sqrt{5 + \frac{1}{9}} = 6 \sqrt{\frac{49}{9}} = 6 \cdot \frac{7}{3} = 14 \end{aligned}$$

Ответ: $BC = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
^ ИЗ ^

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^2+3x-\sqrt{2}y = y^2-\sqrt{2}x+3y \end{cases}$$

$$(x^2-y^2) + (3x-3y) + (\sqrt{2}x-\sqrt{2}y) = (x-y)(x^2+xy+y^2+3) + \sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = 0$$

$$x^2+xy+y^2 - \text{целый квадрат всегда } > 0 \Rightarrow \sqrt{2} + (\sqrt{x}-\sqrt{y}) / (x^2+xy+y^2+3) > 0 = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y} = 0 \Rightarrow x=y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2} = 2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2 - 2\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = 4(14+5x-x^2) - 14\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} + 49$$

$$9 + 12\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = 56 + 20x - 4x^2 + 49 \Rightarrow 12\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = 96 + 20x - 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x+2}\sqrt{7-x} = 24 + 5x - x^2 = (x+3)(8-x)$$

п.к. $0 \leq x \leq 7$ мы можем видеть, что на этом интервале

левая часть всегда меньше правой $\Rightarrow x, y \in \emptyset$

Ответ: $x \in \emptyset; y \in \emptyset$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате 10×10 121 узел, \Rightarrow выбрать из них 2 узла для перекрашивания C_{121}^2 , но так как при проверке совпадающие варианты не считаются, то каждый вариант считается по 4 раза \Rightarrow итоговое кол-во узлов $\frac{C_{121}^2}{4}$
Ответ: $\frac{C_{121}^2}{4}$



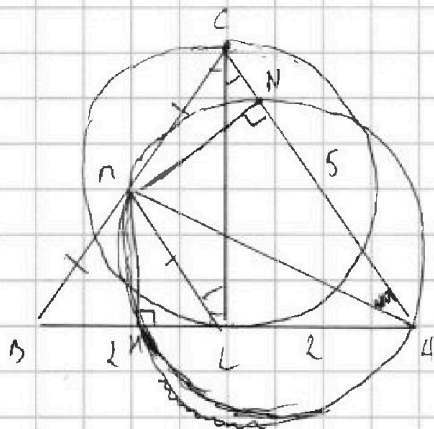
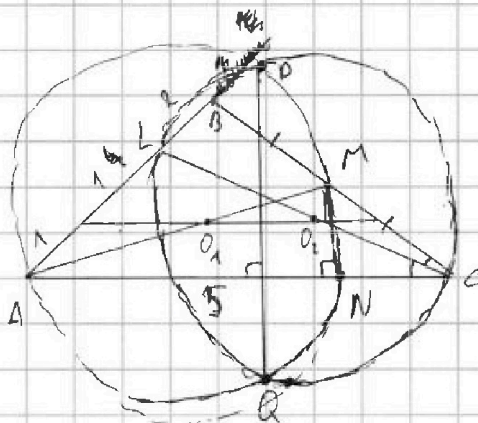
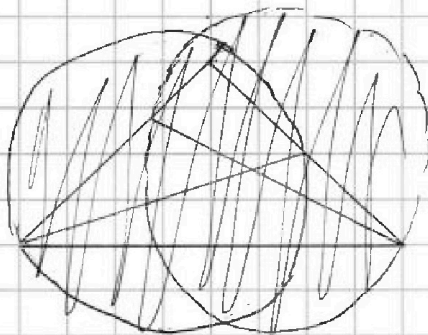
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1



$PQ \perp AC \parallel$ высоте из $B \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ \perp AC \Rightarrow$ диаметр окружности

Прямая через центры окружностей

касает O_1 и $O_2 \parallel AC$;

Прямая QO_1O_2 - сред. линия

$\triangle ABC \Rightarrow$ она делит MC в отношении 1:1 \Rightarrow делит BC в отн-ии 3:1

\Rightarrow делит AB в отн-ии 3:1, но так же O_1O_2 - сред. линия $\triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow L$ - серед. $AB \Rightarrow$ в $\triangle ABC$ медиана совпадает с высотой \Rightarrow

$\rightarrow \triangle ABC$ - равноб ($AC=BC$). $\triangle BCL$ - прямо $\Rightarrow BM=MC=ML$;

N - серед. диаметр $PA \Rightarrow \angle MNA = 90^\circ$; пусть $MB = x \in \mathbb{R}$,

$\angle BCL = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MN = MB \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x}$; $\text{гд } MN^2 + AN^2 = ML^2 + AL^2 = MA^2 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{4(x^2-1)}{x^2} + 5^2 = x^2 - 1 + 9 \Rightarrow 4 - \frac{4}{x^2} + 25 = x^2 + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 24 = 0 \Rightarrow x^4 - 24x^2 + 4 = 0$$

$$= 0 \Rightarrow \text{можно считать } x \Rightarrow AC = BC = 2x$$

$$D = 21^2 - 16 \Rightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 16}}{2} \Rightarrow AC = BC = 21 + \sqrt{21^2 - 16}$$

$$\text{Ответ: } AC = BC = 21 + \sqrt{21^2 - 16}$$

Это решение



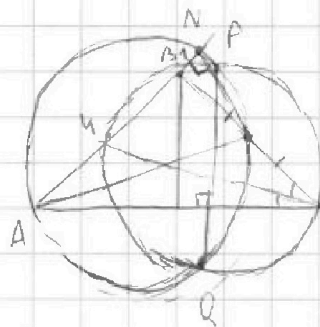
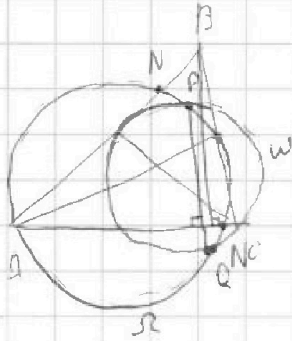
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2) \leq 0 \Rightarrow x \in [-2; 7]$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{x}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$$

$$\sin 2\alpha \cdot y = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+3)$$

$$-x \geq -2y - 2$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x} + 2 = 2\sqrt{4+5x+2x^2}$$

$$0 \geq 2y - 2 - 4(-2y - 2) = 10y - 6 \Rightarrow y \leq \frac{6}{10}$$

$$4x \leq \frac{6}{5} + 2 \Rightarrow 4x \leq \frac{16}{5} \Rightarrow x \leq \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} - 2 = \frac{4-10}{5} = -\frac{6}{5} \quad \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+3)$$

$$= 2\sqrt{(1+5x-x^2-2)^2} =$$

$$= 4(1+5x-x^2) + 4 =$$

$$4 + 20x - 4x^2 + 4 = 8 + 20x - 4x^2$$

$$4(1+5x-x^2) = 4(1+6x-x^2)$$

$$\frac{4}{5} + \frac{24}{5} = \frac{28}{5}$$

$$45 = 3 \cdot 5 \cdot 3$$

$$25 + \frac{2(x^2-1)}{x^2} = \frac{4}{x^2}$$

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 4m - 14n$$

$$P^2(P^2 + 2 \cdot 9)$$

$$P^2(P^2 + 1 \cdot 9)$$

$$P^2(3P + 9)$$

$$m(m+2n+9) - 2(m+2n) = (m+2n)(m+2n-4)$$

$$11(11+2+9)$$

$$11(1+22+9)$$

$$32$$

$$y \leq \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

$$2\sqrt{2} - 2 + 2 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$(m+2n)(m+2n) - 2(m+2n) = (m+2n)(m+2n-4)$$

$$3\sqrt{2} - 2 = 3\sqrt{2} - 2$$

$$3\sqrt{2} - 2 = 6 - 5$$

$$x^2 + 3x + 4\sqrt{2}x = y^2 + 3y + 5\sqrt{2}y$$

$$(x^2 + 3x + 4\sqrt{2}x) + 3(x-y) + 5\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = (x-y)(x^2 + 3xy + y^2) + 3(x-y) + 5\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})/\sqrt{x} + 5\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})/\sqrt{x} = 5\sqrt{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})/\sqrt{x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 - 9x \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 \quad 9x^2$$

$$6 - 9x + 2a = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$6 - 9x + 6a = 9x^2 \Rightarrow 2a = 3x^2 + 3x - 2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$x \geq 2y - 2$$

$$-x \geq 2y - 2$$

$$x \leq 2y + 2$$

$$D - 4 + 44 = 20$$

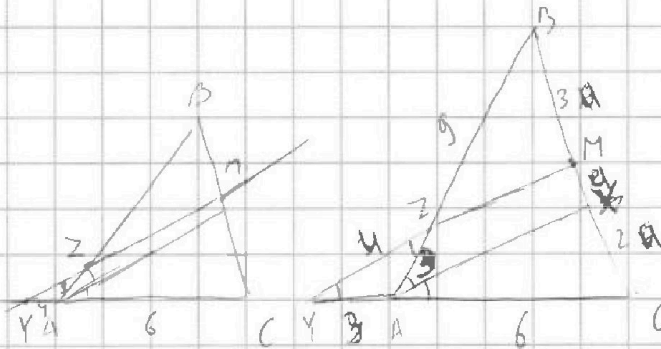
$$x \geq \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \quad 4x \geq 2y - 2$$

$$x \leq \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \quad 4x \leq 2y + 2$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = a$$

$$4x = a$$



$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{4 - 5} \quad 0 \geq 2y - 2 - 8y + 8$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \cos \alpha = \frac{2}{3} \quad 0 \geq -6y + 6$$

$$DC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$x - 2y \geq 2$$

$$x \geq 2y - 2$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$2x - y \leq 1$$

$$3x - 3y \geq -3$$

$$2x - y \geq -1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 2x - 1$$

$$x \geq 2y + 2 \text{ and } x$$

$$y \geq 1x - 1$$

$$6x \geq 12y - 12 \geq 24x - 24$$

$$18x \leq 24 \Rightarrow x \leq \frac{24}{18} \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow y \leq \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow y \leq -\frac{1}{3}$$

$$2(x-1) \geq 4x - 4$$

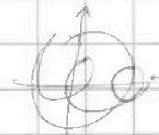
$$\Rightarrow 3y + 6x \leq -1 + 4 \Leftrightarrow 3$$

$$1 + 2x = \frac{11}{3}$$

$$\frac{4}{3} \geq \frac{11}{3} = \frac{4 - 22}{3} = \frac{-18}{3} = -6$$

$$\frac{2 + 21}{4}$$

$$\sqrt{2^2 + 1^2} + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}$$



$$6\sqrt{1+4+2 \cdot \frac{1}{9}} = 6\sqrt{5+\frac{4}{9}} = 6\sqrt{\frac{49}{9}} = 6 \cdot \frac{7}{3} = 14$$

$$= 14$$