



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - третий член арифм. прогрессии,
 d - разность арифм. прогрессии.

Тогда по урн.: $a = 3x + 3$, $a + 2d = (x^2 + 2x)^2$,

$$a + 0d = 3x^2 \Rightarrow 0d = 3x^2 - 3x - 3$$

$$\Rightarrow 2d = x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow 3x + 3 + x^2 - x - 1 = \cancel{\text{убраем}} (x^2 + 2x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2$$

Заметим, что это уравнение имеет вид $x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2$.

~~убраем~~ $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2 = 0$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

-1 - корень.

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \mid x+1 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ \underline{3x^3 + 3x^2} \\ -2x - 2 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0. \quad -1 - \text{корень}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \mid x+1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ 2x^2 - 2 \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$1 + 2 = 3$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$$

$$x = -1 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ: $\{-1; -1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x/3 - y| \leq 1 \\ |y - 3x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x/3 - y \leq 1 \\ -1 \leq y - 3x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq -\frac{8x}{3} \leq 2 \\ -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{8x \leq 6}$$

~~Handwritten work is crossed out with a large X.~~

$$\begin{cases} |3y - x| \leq 3 \\ |x - \frac{y}{3}| \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 3y - x \leq 3 \\ -\frac{1}{3} \leq x - \frac{y}{3} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{10}{3} \leq \frac{8y}{3} \leq \frac{10}{3} \\ -\frac{5}{4} \leq y \leq \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{4y \leq 5}$$

$\Rightarrow \boxed{8x + 4y \leq 11}$, т.е. ответ не больше 11
при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$

система $\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$ верна и равенство $8x + 4y = 11$ выполняется.

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } n=1 \quad m=p \Rightarrow p \cdot (1+p-3) = 13p^2$$

$$\Rightarrow p-2 = 13p \Rightarrow \cancel{p} \quad 12p = -2 \quad X$$

Аналогично при $m=1$

$$\text{Случай 2.4} \quad m+n-3 = 13p^2$$

$$\Rightarrow mn=1 \Rightarrow m=n=1 \Rightarrow 13p^2 = -1 \quad X$$

Ответ: $(3; 10), (10; 3)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Случай 1. $A = 13p^2$, $B = 75q^2$

$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$= 13p^2$. Случай 1.1. $m+n=13 \Rightarrow 13 \cdot 4 = 13p^2$

$\Rightarrow p=2$ - простое. $B = mn(m+n) - 3mn = 75q^2$

$\Rightarrow 10mn = 75q^2 \Rightarrow 2mn = 15q^2 = 3 \cdot 5 \cdot q \cdot q$

$m=1 \quad n=12 \quad X \quad m=2 \quad n=11 \quad X \quad \boxed{m=3 \quad n=10 \quad q=2}$

$m=4 \quad n=9 \quad X \quad m=5 \quad n=8 \quad X \quad m=6 \quad n=7 \quad X$

~~и еще~~ далее симметрично $\boxed{n=10 \quad m=3 \quad q=2}$

Получаем ответы $(3; 10)$; $(10; 3)$

Случай 1.2 $m+n=13p \Rightarrow 13p(13p-9) = 13p^2$

$\Rightarrow 159p^2 - 117p = 13p^2 \Rightarrow 156p = 117 \quad X$

Случай 1.3 $m+n=13p^2 \Rightarrow 13p^2(13p^2-9) = 13p^2$

$\Rightarrow 13p^2-9=1 \Rightarrow 13p^2=10 \quad X$ (10 не дел. на 13)

Случай 1.4 $m+n=1 \Rightarrow m+n-9=0 \quad X$

Случай 2 $A = 75q^2$, $B = 13p^2$

$B = mn(m+n-3) = 13p^2$. Случай 2.1 $m+n-3=13$

$\Rightarrow m+n=16$. $\Rightarrow mn=p^2 \Rightarrow m=n=p \Rightarrow p=8 \quad X$

Случай 2.2 $m+n-3=1 \Rightarrow m+n=4$

$m=1 \quad n=3 \quad X \quad m=2 \quad n=2 \quad X$ не подходит

Случай 2.3 $m+n-3=13p \Rightarrow mn=p$ ~~невозможно~~

\Rightarrow либо $m=1$ либо ~~и еще~~ $n=1$

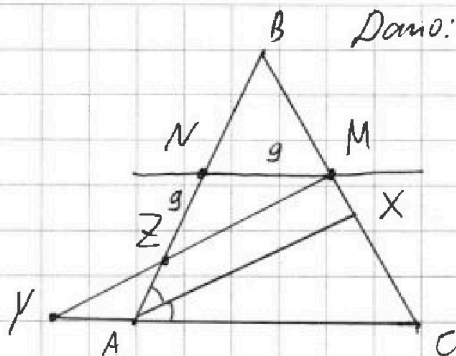


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

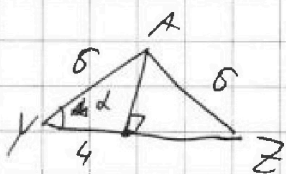


Дано: $\angle CAZ = \angle BAZ$
 $AC = 18, AZ = 5, YZ = 8$
 $BM = MC, ZM \parallel AX$

Решение: $\angle BZM = \alpha$ Пусть $\angle CAZ = \alpha$

$$\angle BZM = \alpha \Rightarrow \angle AZY = \alpha, \angle YAZ = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle ZYA = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow AY = AZ = 5$$



$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

Проложем $MN \parallel AC, N \in AB$. MN - ср. линия

$$\Rightarrow AN = NB, \angle BNM = 2\alpha \Rightarrow \angle ANM = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle NZM = \alpha \Rightarrow \angle NMZ = \alpha, NM = \frac{AC}{2} = 9 = NZ$$

$$\Rightarrow AN = 15$$

$$AN = NB \Rightarrow NB = AB = 30$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha = 324 + 900 -$$

$$+ 2 \cdot \frac{18 \cdot 30}{9} = 1224 + 4 \cdot 30 = 1344$$

$$\Rightarrow BC = 4\sqrt{84} \quad \text{Ответ: } 4\sqrt{84}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего получим $\frac{80 \cdot 79 + 80}{2} = \frac{80^2}{2}$ неупорядочен-

ных пар. Рассм. некоторую раскраску 2 типа, которая соответствует будет 1 из пар.

При повороте её на 90° получится другая

раскраска 2 типа, ~~которая~~ соответствует другой

паре. Аналогично при повороте на 180° и

270° , ~~а при повороте на 3 т. е.~~ 3 т. е. 3 раскраски

раскраски 2 типа соответствует 4 парам.

Значит всего раскрасок $\sqrt{\frac{80^2}{2} \cdot \frac{1}{4}} =$

$$= \frac{80^2}{8} = \frac{8^2 \cdot 10^2}{8} = 800$$

Р. Итого:

раскрасок 1 типа — 20

раскрасок 2 типа — 800

всего: 820

Ответ: 820.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

но в каждой раскраске 2 типа точек
тогда, значит получим 80 пар (неупорядоченных).
каждая пара соответствует раскраске 1 типа, но если рассмотреть её на 90° , получим раскраску 1 типа, которая также соответствует одной из пар, поэтому всего $\frac{40}{2} = 20$ раскрасок
Посчитаем раскраски 2 типа.

Если мы покрасим некоторую не центральную точку в черной, то мы можем покрасить одну из $81 - 2 = 79$

других точек чтобы получить раскраску 2 типа. Т.к. одна из 81 точек совпадает с другой и одна ещё одна другая точка образует с данной раскраску 1 типа).

Если мы покрасим центральную точку, то мы можем покрасить любую из оставшихся 80 чтобы получить раскраску 2 типа.

Всего получаем $80 \cdot 79 + 80 = 80^2$ пар.
Поскольку пар не вычитается, каждая пара учитывается дважды.
Рассмотрим некоторую раскраску 2 типа, образованную одной из этих пар. Проверим её на 90° , тогда получим раскраску 2 типа.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

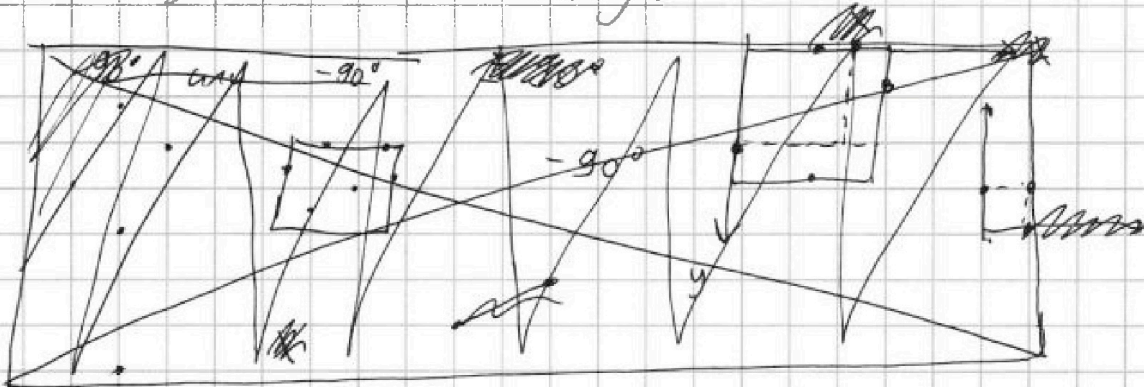
СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Разделим все раскрески на два типа:

1 тип: раскрески, которые совпадают сами с собой после поворота на 180° .

2 тип: ~~раскрески~~ все раскрески, не относящиеся к 1 типу.



Введём координаты для узлов сетки внутри квадрата:

точка $(0, 0)$ — левый нижний угол, ~~в~~ квадрата,

(d, d) — правый верхний.

при повороте на 90° точка (x, y) перейдет

в $(d-y, x)$, а при -90° $(x, y) \rightarrow (y, d-x)$

т.е. при повороте на 180° $(x, y) \rightarrow (d-x, d-y)$

при повороте раскрески 1 типа с

первыми точками $(a, b), (c, d)$ на $\pm 90^\circ$

эти первые точки перейдут в



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(b, s-a), (d, s-c)$ и $(s-b, a), (s-d, c)$
соответственно. При этом точка
 $(b, s-a)$ переходит в $(s-b, a)$ и точка
 $(d, s-c)$ переходит в $(s-d, c)$ при повороте
на 180° . Таким образом, раскраска 1
типа при повороте на $\pm 90^\circ$ даёт раскраску
1 типа a. Аналогично, раскраска 2
типа при повороте на $\pm 90^\circ$ даёт
раскраску 2 типа.

Рассчитаем раскраски 1 типа. Очевидно,
что \forall ^{для} (x, y) ^{или} точка кроме центральной $(4, 4)$
существует ~~раскраска~~ равно \forall ^д ~~очень~~ раскраске 1 типа,
где эта точка ~~переходит~~ ^{направлена} (т.к. каждая
точка при повороте на 180° переходит в одну
конкретную точку, ~~иногда~~ но только центральная
переходит сама в себя).

Всего 80 нецентральных точек. Каждая точка
соответствует 1 раскраске 1 типа,

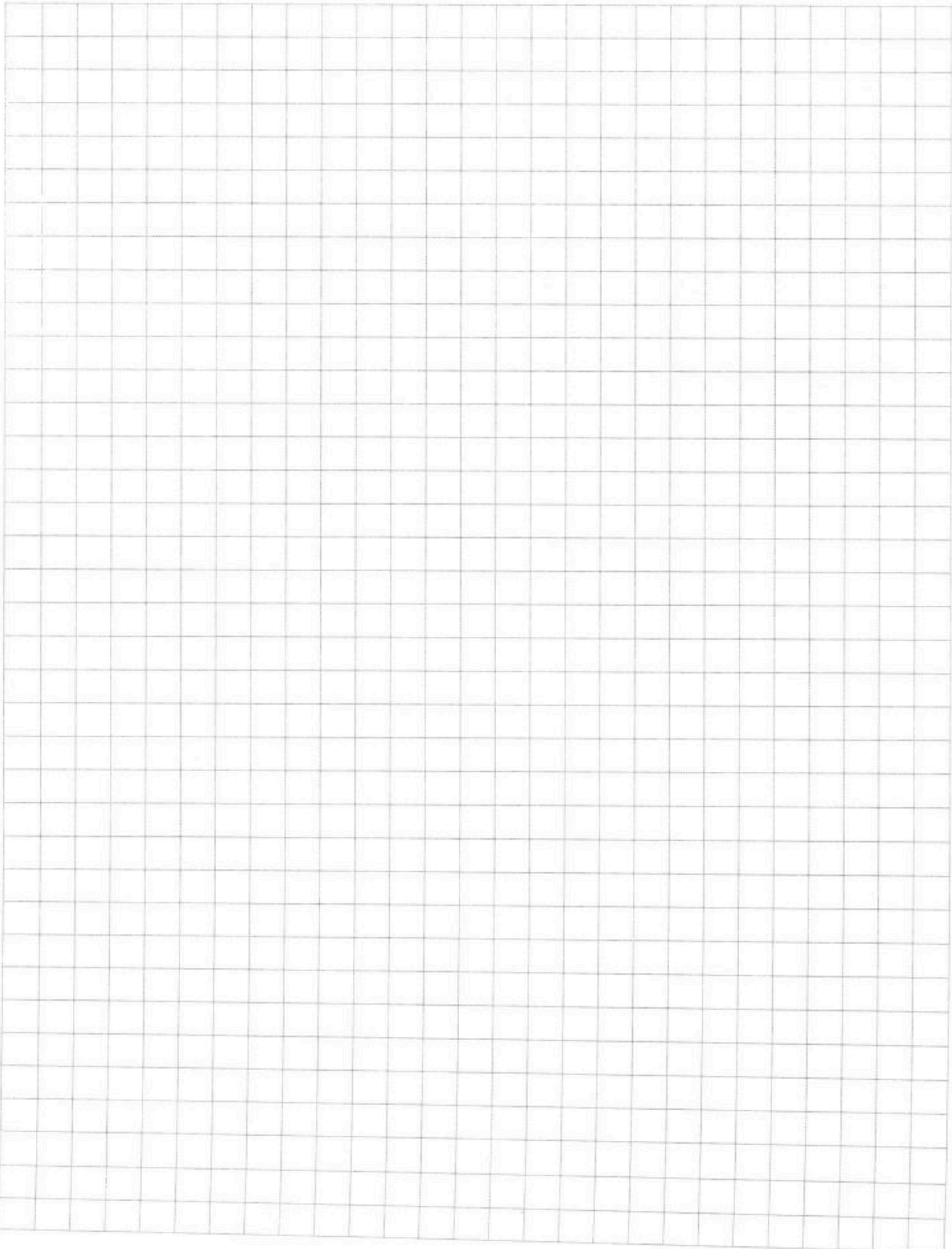


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____
ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(n+1)^2 - 1}{2} + \frac{((n+1)^2 - 1)^2}{2} = (n+1)^2 - 1 + \frac{((n+1)^2 - 1)^2}{4} =$$

$$= \frac{2((n+1)^2 - 1) + ((n+1)^2 - 1)^2}{4}$$

$n=2: (n+1)^2 - 1 = 8 \quad \frac{8 \cdot 8}{2}$

$$\frac{8}{2} + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 8 + 4^2 = \frac{16 + 8}{4} = 24$$

$n=0 \rightarrow$

$\frac{8}{2}$
 $\frac{(n+1)^2 - 1}{2}$
 $\frac{(n+1)^2 - 1}{2}$
 $\frac{(n+1)^2 - 1}{2}$
 $\frac{(n+1)^2 - 1}{2}$

$4 + 16 = 20$
 $\frac{16}{4} + \frac{8}{4} = 8$
 $2 + 4 = 10$

$8 \cdot 7$
 $8 \cdot 7$
 40

40
 40

40

$$\frac{(n+1)^2 - 1}{2} + \frac{((n+1)^2 - 1)^2}{2}$$

$$4 \cdot \frac{8^2 - 1}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$= 820$$

$$\frac{40}{2} + \frac{40^2}{2} = 20 + \frac{1600}{2} =$$

$a \quad a+d \quad a+2d$

$a+d = 3x^2$

$a+2d = 3x+3$

$a+4d = (x^2+2x)^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background. The work includes several diagrams and calculations:

- Top left: A 4x4 grid with a small square in the top-left corner. Calculations: $9-9=81$, $C_2^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 3 \cdot 2 = 6$.
- Top right: A square with a smaller square inside, and a diamond shape. Calculations: $\frac{4}{4} + \frac{2}{2} = 1+1=2$.
- Middle left: A 3x3 grid with a diagonal line. Calculations: $80 \cdot 79$, 4 , 2 .
- Middle right: A 3x3 grid with a diagonal line. Calculations: $8+7+6+\dots+1 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.
- Bottom left: A 3x3 grid with a diagonal line. Calculations: $36+4=40$, (40) , $80^2 + 40 = 15 \ 8400$, 5440 .
- Bottom right: A 3x3 grid with a diagonal line. Calculations: $80 \cdot 79$, $80 \cdot 79 + 80 \Rightarrow 80^2$, $(n+1)^2 - 1$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m(n)(m+n-3) = 13p^2$$

$$p(m+n)(m+n) = 3km$$

$\frac{x}{3} - y \leq 1$ $x - 3y \leq 3$

$-2 \leq \frac{10x}{3} \leq 2$ $-1.5 \leq 3x - y \leq 1$

$-0.6 \leq x \leq 0.6$ $x = 1$ $y = 0$

$y = 2$ $x = 3$

$-3.5 \leq -3y \leq 3$ $-2.5 \leq x - 3y \leq 1$ $-2.5 \leq 9y - 3x \leq 9$

$-10 \leq 6y \leq 10$ $-7.5 \leq 3x - y \leq 7$

$-1.25 \leq y \leq 1.25$ $4y = 5$ $8x = 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{24}{5}$

$\frac{24}{5} + 5 = \frac{49}{5} = 9.8$

$x = 0.6$ $|0.6 - 3y| \leq 3$ $-3 \leq 3y - 0.6 \leq 3$

1.2 0.6 1.2

$1.8 - 1.25 = 0.55$ $1.2 = [0.6 - 3.6]$

$x - 3$

$-3 \leq 3y - x \leq 3$ $3y \leq 3 + x$ $\frac{-0.6}{3} = -0.2$

$\frac{x}{3} - 1 \leq y \leq 1 + \frac{x}{3}$ $y \leq 1.2$

$4y \leq 4.8$ 4.8 $8x \leq 0.6 \cdot 8 = 4.8$

4.8 9.8 $x - 3y \leq 3$

$-\frac{8y}{3} \leq \frac{10}{3}$ $-\frac{10}{2} \leq \frac{8y}{2} \leq \frac{10}{2}$ $\frac{y}{3} - x \leq \frac{1}{3}$

$-2.25 \leq y \leq 1.25$ $x = 0.75$ $0.75 - 2.25 \cdot 3 = -3$

$2.25 - 1.25 = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. It includes several diagrams of squares and triangles, coordinate systems, and algebraic derivations.

Coordinate Transformations:

$$(x, y) \rightarrow (d-y, x) \rightarrow (d-x, d-y)$$

$$x_0 = y_0 = x \quad y_0 = d-x$$

Triangle Geometry:

Diagram of triangle ABC with points M, N, X on its sides. Side lengths are given as 18, 15, 9.

Diagram of triangle ABC with points Z, X on its sides. Side lengths are given as 18, 5, 5.

Algebraic Calculations:

$$\frac{d + \frac{ZM}{AX}}{AX} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{18}{a}$$

Final Calculations:

$$1344 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 118 = 2^4 \cdot 59$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\ast a = 3x + 3 \quad a + d = (x^2 + 2x)^2 \quad a + 3d = 3x^2$
 $a + d = x^4 + 4x^3 + 4x^2 \quad 3x = a - 3$
 ~~$3x^2 = x(a - 3) \quad a + 3d = x(a - 3)$~~
 $3d = 3x^2 - 3x - 3 \quad d = x^2 - x - 1$
 ~~$a + d \quad 3x + 3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x)^2$~~
 $x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$
 $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$
 $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \quad x = -1$
 $\frac{(a_3 + a_9)}{2} = a_6 \quad 3x^2 = 3 \quad a_3 = 0 \quad a_9 = 3$
 $\frac{3x^2 + 3x + 3 + 4}{2} = \frac{(x^2 + 2x)^2 + x^2 - x - 1}{2}$
 ~~$2x \rightarrow \frac{2x^2 + 4x + 4}{2} = x^2 + 2x + 2$~~
 $|x - 3y| \leq 3 \quad y + 2x \quad |x - y| \leq 1$
 $|3x - y| \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x - 3y \leq 3 \quad x = y + 1$
 $-1 \leq 3x - y \leq 1 \quad -1 \leq 3x - y \leq 1 \quad 4y + 8y + 8$
 $-1 \leq y - 3x \leq 1 \quad y - 1 \leq 3x \leq y + 1 \quad 12y + 8$
 $3 \leq 3y - 3x \leq 3 \quad 3y - 3 \leq x \leq 3y + 3 \quad 12y + 8$
 $4 \times 4 \leq 4(x - y) \leq 4$
 $-1 \leq x - y \leq 1$

$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$
 $x^2 - x - 1 = 0$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $d = x^2 - x - 1$
 $d = 1 + 4 = 5$
 $d = 1 + 4 = 5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a+2d=3x+3 \quad a_3 \quad a=3x+3 \quad \frac{f1. f0 = f1. 20 =}{4} \quad \frac{f0 f0^2}{4}$$

$$a+2d=(x^2+2x)^2 \quad a+3d=3x^2$$

$$3x \quad 3d=3x^2-3x-3 \Rightarrow 2d=x^2-x-1$$

$$\Rightarrow 3x+3+x^2-x-1=(x^2+2x)^2$$

$$x^2+2x+2=x^4+4x^3+4x^2$$

$$2x \quad x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$$

$$x=-1$$

$$\begin{array}{r} x^4+4x^3+3x^2-2x-2 \mid x+1 \\ x^4+x^3 \\ \hline 3x^3+3x^2-2x-2 \\ -3x^3+3x^2 \\ \hline -2x-2 \\ -2x-2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3+3x^2-2=0 \quad -8+3 \cdot 4-2=0$$

$$a=3x+3 \quad a+d=(x^2+2x)^2 \quad a+3d=3x^2$$

$$2d=3x^2-(x^2+2x)^2 = 3x^2(3-(x+2)^2)$$

$$3d=3x^2-3x-3 \Rightarrow d=x^2-x-1$$

$$3x+3+x^2-x-1=x^2(x+2)^2 \quad (x+2)^2(x-1)(x+1)=$$

$$x^2+2x+2=x^2(x+2)^2 \quad x^2(x+2)^2(x-1)(x+1)=-2(x+1) \mid x=-1$$

$$x^2(x+2)^2(x-1)(x+1)=-2(x+1)$$

$$4x^2+4x+4(x+2)^2(x-1)=-2$$

$$x^2(x^2+4x+4)=x^2+2x+2$$

for

$$\frac{x^2(x^2+4x+4)}{(x+2)^2(x^2-1)} = \frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2-1)} - 2x-2$$