



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у меня есть последовательность с разностью d . Тогда разница между 6 м и 4 м членом ариф. прогр. равна $2d$, а разница между 10 м и 6 м членом $4d$. Тогда справедлива запись:

$$2((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x)) = 9x^2 - (x^2 - 2x)$$

$$2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) = 9x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x - 1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\text{Значит: } \begin{cases} x - 1 = 0 & x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 & D = 2^2 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 5 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{5}$; $x = 1 - \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

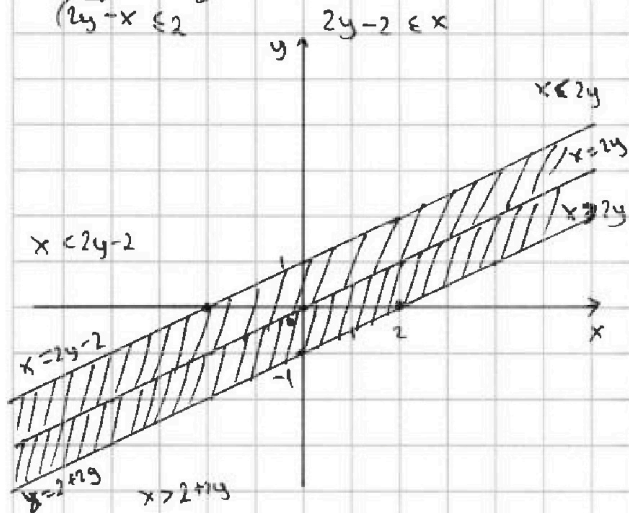
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сначала решим по очереди каждое из угр неравенств.

$$|x - 2y| \leq 2$$

$$a) \begin{cases} x \geq 2y \\ x - 2y \leq 2 \end{cases} \quad x \in 2 + 2y$$

$$b) \begin{cases} x \leq 2y \\ 2y - x \leq 2 \end{cases} \quad 2y - 2 \in x$$

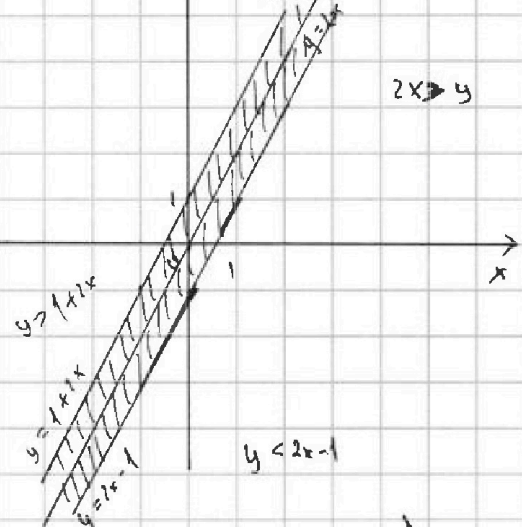


$$|2x - y| \leq 1$$

$$a) \begin{cases} 2x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \quad 2x - 1 \in y$$

$$b) \begin{cases} 2x < y \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$y \in 1 + 2x$$



Тогда решением этой системы является

пусть А точки пересечения $y = 2x - 1$ и $x = 2y - 2$.

Заметим что у точки А одновременно наибольшая ордината и абсцисса (у величилось одновременно и ордината и абсцисса меньше), а значит Наибольшее значение $3y + 6x$ будет если подставить координаты А.

Найдем координаты А:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \quad y = 2(2y - 2) - 1$$

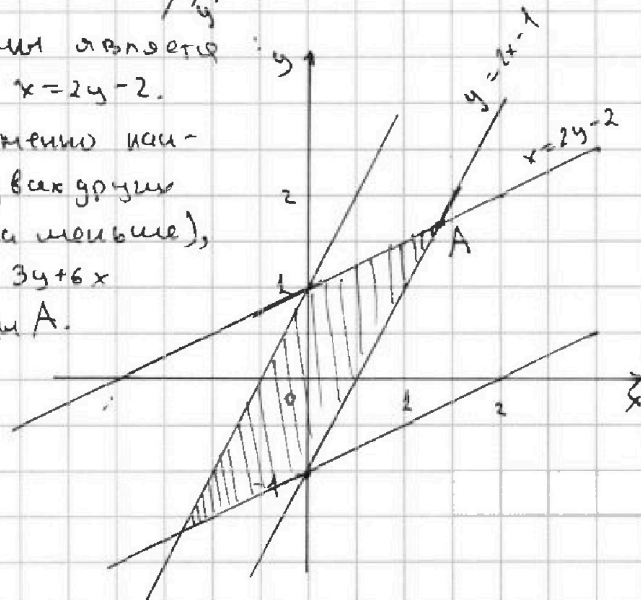
$$5 = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$x = 2(2y - 1) - 1 \Rightarrow 3y = 3x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$3y + 6x = 3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 7mn^2 + 9m^2n = mn(m+2n+9)$$

Ф₁) $m+2n$ и $m+2n-7$ разны по четности. Доказано:

$$a) m+2n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow m+2n-7 \equiv 0-1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$b) m+2n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow m+2n-7 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod{2}$$

Из Ф₁ следует, что $A=2 \Rightarrow$ при $A=11p^2$ или $A=75q^2$, то p или q четные, а другой равен 2.

$$f) (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 = 75 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$$

$$(m+2n; m+2n-7) = (m+2n; 7) \text{ тк } ((m+2n)(m+2n-7), 7) = 1$$

$$(m+2n; 7) = 1 \Leftrightarrow \text{если } 7, \text{ то } A:7$$

Значит, (тк $m+2n > m+2n-7$) $\begin{cases} m+2n = 5^2 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 19 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} m+2n = 10 \\ m+2n-7 = 3 \end{cases}$

$$2) (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot 2^2$$

Используя $(m+2n; m+2n-7) = 1$ / аксиома с п.1)

$$\begin{cases} m+2n = 11 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m+2n = 44 \\ m+2n-7 = 1 \end{cases}$$

Тогда $m+2n = 11$

и так $m, n \geq 1 \Rightarrow$

$$n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Переберем $n=1$, то $m=9 \Rightarrow B = 1 \cdot 9 \cdot (9+2 \cdot 9+9) =$

$$1 \cdot 9 \cdot 27 = 243 \neq 44 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$2) n=2, \text{ то } m=4-4=7 \Rightarrow B = 2 \cdot 7 \cdot (2+7) =$$

$$2 \cdot 7 \cdot 9 = 126 \neq 44 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$4mn = 15q^2 \Rightarrow q=2$$

$$mn = 15$$

$$1) n=3, m=5 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 2 + 5 = 11$$

возможно

$$2) n=5, m=3$$

$$2 \cdot 5 + 3 = 13 \neq 11$$

не возможно

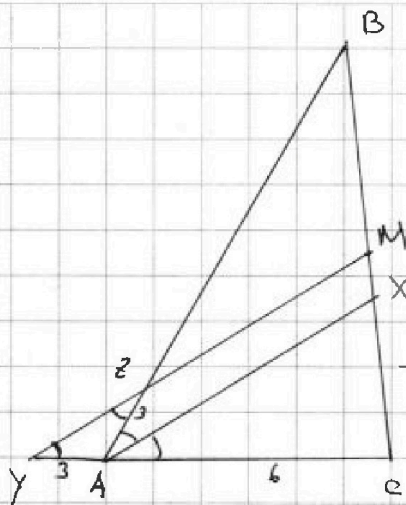
Ответ: $(5; 3)$ 1 такая пара.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

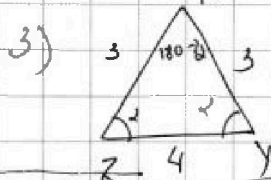
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Так $MZ \parallel AX \Rightarrow \angle YZA = \angle BAX$
 AZ - сек
 Пусть $\angle BAX = \alpha \Rightarrow \angle XAC = 2\alpha$
 $\angle YZA = \alpha$
 $\angle BAY = 180 - \angle BAC = 180 - 2\angle BAX = 180 - 2\alpha$
 $\angle ZYA = 180 - \angle YZA - \angle ZAY = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) = \alpha$
 $\angle YZA = \angle ZYA$
 $AZ = AY$

2) Так $YM \parallel AX \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{3} = 2$
 Пусть $CX = 2a$, тогда $XM = \frac{CX}{2} = \frac{2a}{2} = a$
 $CM = CX + XM = 3a$, так M - середина $\Rightarrow CM = MB = 3a$
 $BX = BM + MX = 3a + a = 4a$.

Так AX - бисс. $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2AC = 12$.



3) по т. косинусов в $\triangle AYZ$:
 $\cos \angle ZAY = \frac{3^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{18 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$

тогда $\cos \angle ZAY = -\cos \angle BAC$, так $\angle BAC + \angle ZAY = 180^\circ$
 $\cos \angle BAC = -\frac{1}{9}$

4) по т. косинусов в $\triangle BAC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$
 $\cos \angle BAC = \frac{6^2 + 12^2 - BC^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{1}{9}$
 $6^2 \cdot 5 + 16 = 4(3^2 \cdot 5 + 4) = 4 \cdot (45 + 4) = (2 \cdot 7)^2 = 14^2$
 $BC = 14$ так $BC > 6$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Реш. 1) $x=0$ $y=0$. Подставим в первое уравнение:

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 = 2\sqrt{14}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - 1 + \sqrt{7} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{7} = \sqrt{8} + 1, \text{ но } \sqrt{8} > \sqrt{7}$$

$$1 > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad (\Leftrightarrow \sqrt{7} > \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{8} + 1 > \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

↓

$(0; 0)$ является решением данной системы.

2) Поработаем со вторым уравнением:

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

тк $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ не может быть $\Rightarrow \sqrt{2}(x-y) > 0$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{2}(x-y) = 0$$

$$(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}}\right) = 0$$

тк $x^2 + xy + y^2 > 0$ при любых x, y ($D < 0$ и через x и через y и покр. иррац. положит.)

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ исп.

$x^2 + 3 > 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} > 0 \quad (\sqrt{2} > 0 \text{ и } \sqrt{x+y} > 0)$$

$$x^2 + xy + y^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} > 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = y$$

Значит, для решения второго уравнения достаточно $x=y$ и

$x=y \geq 0$, тк $\sqrt{2}x$ (или $\sqrt{2}y$) по корням x или y .

Подставим наши знания во второе уравнение.

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$ODB: 0 \leq x \leq 7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(2+x)} + 2+x - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}) + (\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t, \text{ тогда } t^2 + t - 2 = 0 \text{ по г. Виетта}$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$$

$$1) \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1 \quad (\sqrt{x+2} > \sqrt{7-x} \Rightarrow x+2 > 7-x)$$

$$x+2 + 7-x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 1$$

$$? x > 5 \Rightarrow x > 2,5$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$4 = \sqrt{14+5x-x^2}$$

$$16 = 14+5x-x^2 \Rightarrow x^2-5x+2=0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} > 0 \quad (5 > \sqrt{17})$$

$$\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2} > 2,5 \Leftrightarrow 5-\sqrt{17} > 5 \Leftrightarrow 0 > \sqrt{17} \text{ — противор.}\right)$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

~~возможна и в $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2$~~

$$2) \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \quad (\Rightarrow x < 2,5)$$

$$7-x+x+2 - 2\sqrt{14+5x-x^2} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$25 = 4(14+5x-x^2) \Rightarrow 25 = 40+16+10x-4x^2$$

$$4x^2 - 20x - 31 = 0$$

$$D = 20^2 + 4 \cdot 4 \cdot 31 = 4^2(5^2 + 31) = 4^2(25+31) = 4^2 \cdot 56 = 8^2 \cdot 14$$

$$x = \frac{20 \pm 8\sqrt{14}}{8} = 2,5 \pm \sqrt{14}, \text{ где } x < 2,5$$

$$x = 2,5 - \sqrt{14} < 0 \quad (\Leftrightarrow 2,5 < \sqrt{14} \Leftrightarrow 6,25 < 14)$$

не подходит из-за ОДЗ второго уравнения

Ответ: $x = y = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$

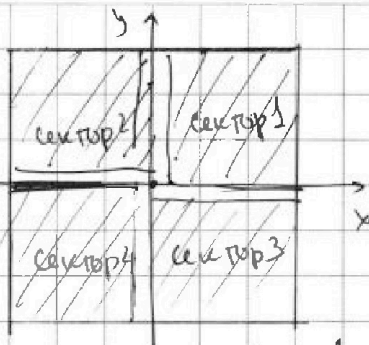
$$\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Центральная клетка переходит при повороте сама в себя.

Есть всего клетки $11^2 = 121$

Сектор это внутри и на оси от осей все углы (у сектора 1 и 4 это ось x, а у остальных ось y). Тогда из симметрии в каждом секторе равное число узлов =

$= \frac{1}{4} \cdot (121 - 1) = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30$. Заметим, что при повороте все сектора переходят друг в друга. Тогда если перекрасим центральную клетку, тогда перекрашивать можем все клетки одного сектора (остальные получим поворотом) $\Rightarrow 30$ вариантов.

Если красим 2 узла в центре 1 сектора, то достаточно рассмотреть так же 1 сектор, те остальные получим поворотом \Rightarrow вариантов $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29$

Если красим 2 узла в разных секторах, тогда

1) противоположные сектора. Тогда достаточно рассмотреть 1 пару например с.4 и с.1 вариантов выбрать узлы: $30 \cdot 30$

2) если соседние сектора, тогда так же все аналогично при повороте и достаточно рассмотреть 2 соседних (так: тогда вариантов выбрать 2 узла $30 \cdot 30$ (при поворотах мы получим ту же комбинацию покрашенных узлов))

Тогда всего вариантов $30 \cdot 30 + 30 \cdot 30 + 15 \cdot 29 + 30 =$
 $= 30 \cdot 61 + 15 \cdot 29 = 15 \cdot 122 + 15 = 15 \cdot 154 = 2265$

Ответ: 2265

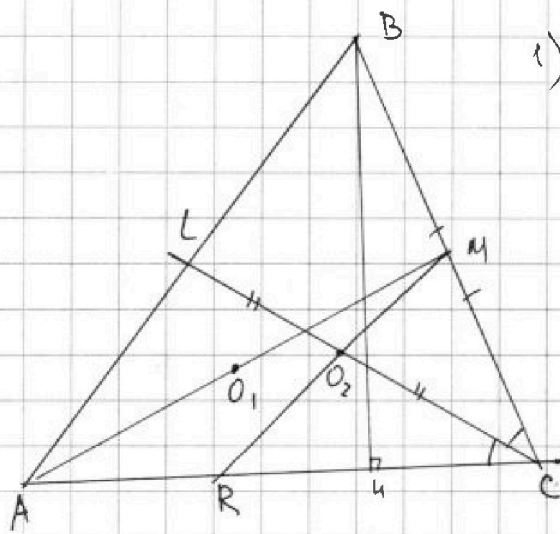


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) BH - высота
 O_1 и O_2 центры Ω_1 и Ω_2 соответствующих, т.к. Ω_1 и Ω_2 построены на AM и CL как и у диаметров $\Rightarrow O_1 \in AM$ и $AO_1 = O_1M$ и $O_2 \in CL$ и $CO_2 = O_2L$

2) P и Q - перес. Ω_1 и Ω_2
 PQ - рад. ось Ω_1 и Ω_2
 т.к. рад. ось перпен. касат. линии

центров $\Rightarrow O_1, O_2 \perp PQ$.

т.к. $PQ \parallel BH$ и $QP \perp AC \Rightarrow O_1, O_2 \parallel AC$
 и $O_1, O_2 \perp PQ$

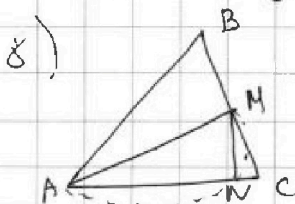
3) MO_2 - средняя линия $\triangle ABC$ (т.к. M - середина BC и O_2 - сев. CL)
 $MO_2 \parallel AC = R$

4) $O_1, O_2 \parallel AC$ (в частности AR) $\Rightarrow O_1, O_2$ - середины линий $\triangle AMR$
 $AO_1 = O_1M$
 $MO_2 = O_2R$

5) $MO_2 = O_2R$ и $\angle MO_2C = \angle O_2CR \Rightarrow \triangle MCR$: CO_2 бисс. и медиана $\Rightarrow \triangle KMC$ - равнобедр. и CO_2 - высота
 ($CO_2 \perp RM$)

6) $CO_2 \perp RM$ и $RM \parallel AB \Rightarrow CO_2 \perp AB$
 (т.к. средняя линия) (или $CL \perp AB$)

7) CL - высота ($CL \perp AB$) и бисс. $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедр. $\Rightarrow BC = AC$



$\angle MNA = 90^\circ$, т.к. AM - диам. окр. Ω
 и $\angle ANM$ опирается на диаметр.



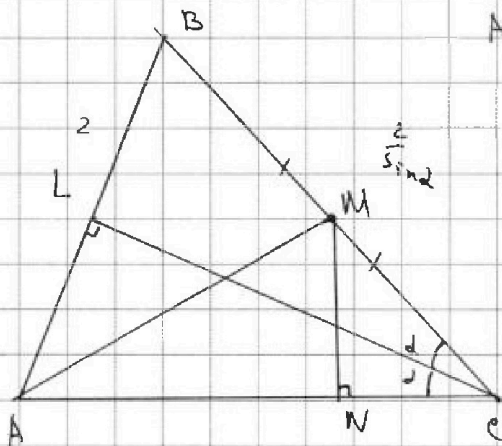
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

9)



$$AB = 4 \Rightarrow AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Пусть } \angle BCL = 2 \Rightarrow \angle LCA = d.$$

$$\triangle BCL: BC = \frac{BL}{\sin \angle BCL} = \frac{BL}{\sin d} = \frac{2}{\sin d}$$

$$\text{тк } AC = BC \Rightarrow AC = \frac{BL}{\sin d}$$

$$BM = MC = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2 \sin d} = \frac{1}{\sin d}$$

$$\triangle MNC: NC = \cos 2d \cdot MC = \frac{\cos 2d}{\sin d} = \frac{1 - 2 \sin^2 d}{\sin d}$$

$$AN = AC - NC = \frac{2}{\sin d} - \frac{1 - 2 \sin^2 d}{\sin d} = \frac{1 + 2 \sin^2 d}{\sin d} = 5$$

$$\text{тк } 0 < d < 90^\circ \Rightarrow \sin d \neq 0$$

$$\sin d = t \quad (\Rightarrow 0 < t < 1)$$

$$1 + 2t^2 = 5t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4} > 1 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{17} > 4 \right)$$

$$t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = \sin d$$

$$BC = AC = \frac{2}{\sin d} = \frac{2 \cdot 4}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{25 - 17} = 5 + \sqrt{17}$$

Ответ: $BC = AC = 5 + \sqrt{17}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

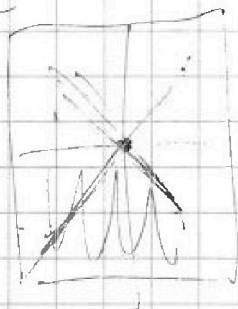
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умножение

30 +



30 · 30

$$\frac{30 \cdot 24}{2} = 15 \cdot 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 \\ \underline{-x^4 + 4x^3 - x^2 + x - 1} \\ 7x - 5 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \mid x - 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \\ \underline{-x^3 + 3x^2 - x + 1} \\ -x + 3 \end{array}$$

$$-2x^2 + 6x - 4 \mid -2x + 6$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 6x - 4 \\ \underline{2x^2 - 6x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 5x$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 4)$$

$$\frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} - 2\sin \alpha$$

$$2\sin \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} = 5$$

$$\sin \alpha = t \quad 1 - 5t + 2t^2 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t = 2 \text{ (не подходит)}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$(1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5}$$

$$(x - x_1 + x_2) \cdot 3 = 3(3x^2 + 3x - 2) = 9x^2 + 9x - 6$$

$$(5-x)(1+x) \cdot 2x = (5-x)(1+x) \cdot 2x = (5-x)(2x+x^2) = 10x + 5x^2 - 2x^2 - x^3 = -x^3 + 3x^2 + 4x - 5$$

$$9x^2 - x^3 + 4x - 5 = -x^3 + 9x^2 + 4x - 5$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

$$y = 4y - 4 - 1$$

$$5 = 3y \quad y = \frac{5}{3}$$

$$4x = 2 \cdot \frac{5}{3} - 2 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

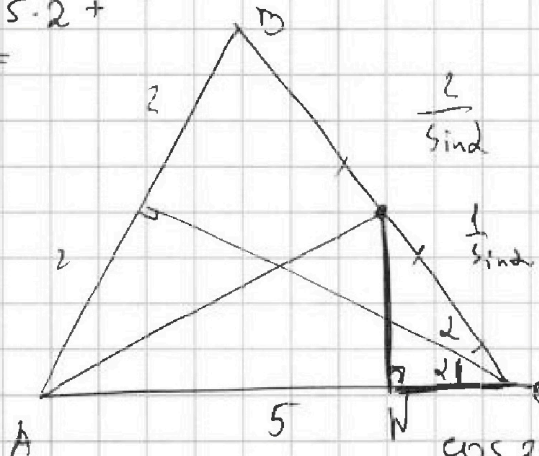
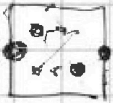
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$e^2 = 12^2 = \frac{12 \cdot 120}{2}$
 $1 \cdot 120 \cdot \frac{3}{4}$
 $120 \left(\frac{12}{2} + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{8} 60 \left(\frac{12 \cdot 12 \cdot 3}{4} \right)$
 $= 15 \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{4} \right) = 15 \cdot 239$

$\frac{12 \cdot 120}{2}$

$AB = BC =$
 $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{5 - \sqrt{17} \cdot 5 - \sqrt{17}} =$
 $= \frac{8(25 + \sqrt{17})}{8} =$
 $= 25 + \sqrt{17}$

$15 \cdot 24 + 15 \cdot 2 +$
 $+ 60 =$
 $= 15 \cdot 120$
 $15 \cdot 151$



$\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$
 $h \cdot r = 60$
 $\frac{60}{11 \cdot 19} = 0.8$

$\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$

$\frac{2}{\sin \alpha} - \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 - 1 + 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = 5$

$2\sin^2 \alpha + 1 - 5\sin \alpha = 0$
 $\sin \alpha = t$

$\frac{2\sin^2 \alpha + 1}{\sin \alpha} = 5$
 $2\sin^2 \alpha + 1 = 5\sin \alpha$

$2t^2 - 5t + 1 = 0$
 $D = 25 - 8 = 17$

$30 + 6 \cdot 11 \cdot 19 =$
 $120 \cdot 119 + 30$

$\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow t = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$
 $\sin \alpha = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$

$\frac{120 \cdot 119 + 30}{11 \cdot 19}$

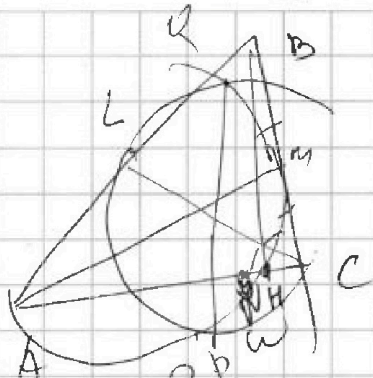


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
 ___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

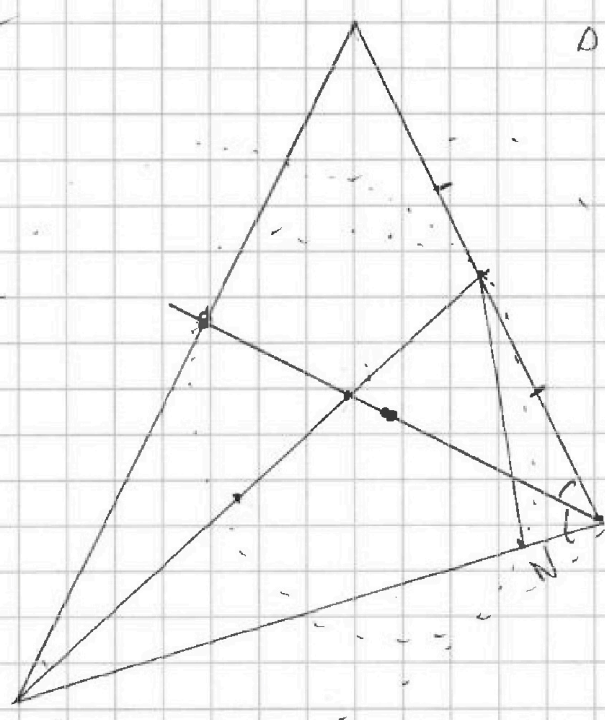
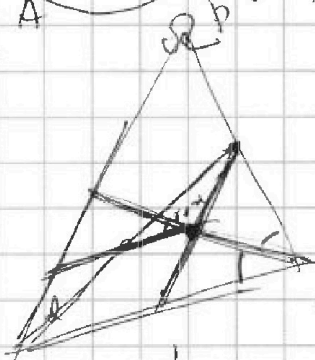


$PQ \parallel BN$

$AB = 4$

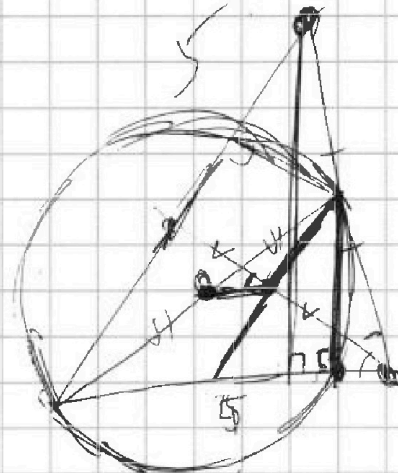
$AN = 5$

$\Rightarrow \angle C = \dots$
 $\angle BCF = \dots$

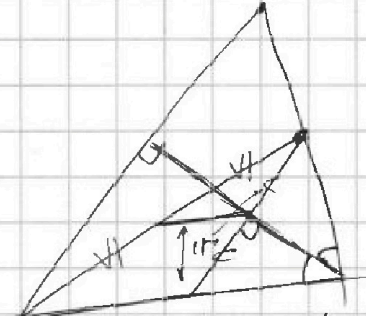


$(7-x)(x+2) = 7x - x^2 + 14x - 2x^2$

$AC = BC$



2
 $4 \cdot 14$
 25
 202
 $4 \sqrt{5}$
 $8 \cdot 14$



$7x$
 $8+3$
 $4x - 2x^2$
 $0 = 7x - x^2 - 5 - 2x$
 $2x - x^2 + 14 = 5 - 2x$
 $5 = \sqrt{4 + 5 - x^2}$
 $2 + x + 2 = 7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) + \sqrt{2} = \frac{(x-y)}{\sqrt{x+y}} = 0$$

$$(x-y) \left(x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{y} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+y}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$x=y$$

еще решение

$$\frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad 7$$

$$5 + \sqrt{14}$$

$$14$$

$$9$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 = 25 + 40 + 16 = 81 = 9^2$$

$$\frac{-5 \pm 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}}$$

$$2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{9 + \sqrt{17}} - \sqrt{9 - \sqrt{17}} \right)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 - x - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2 + x - 2 = 0$$

$$\left(\sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} \right)^2 = \frac{80-16}{64} \sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} = 1$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = t$$

$$9 + \sqrt{17} + 9 - \sqrt{17} - 2\sqrt{81-17}$$

$$80-16 \quad \sqrt{7-x} - \sqrt{2+x} = 1$$

$$7x+7-x-2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 1$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$1$$

$$-2$$

$$t = 1$$

$$A = 2$$

$$8 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$4 = \sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$16 = 14 + 5x - x^2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$t = -2$$

$$18 - 2 \cdot 8 = 2$$

$$\sqrt{7-x} + \sqrt{x+2} = 2$$

$$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 4$$

$$5 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$x=0 \quad y=0$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} + 7 =$$

$$2\sqrt{14}$$

~~11~~

$$\sqrt{8} \cdot 7 = 7$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{7} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{8} \cdot 11 = \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a

	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+5d$	$a+9d$
			$6-9x$	$(x^2-2x)^2$	$9x^2$

$$2 \left((x^2-2x)^2 - (6-9x) \right) = 9x^2 (x^2-2x)^2$$

$$x^2(x-2)^2 = x^2(x-2)^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 + 9x$$

$$x^2(9 - (x-2)^2) = x^2(9 - x^2 + 4x - 4) = x^2(5 - x^2 + 4x)$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 12 + 18x = 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$16 \quad 44 \quad 12 \quad 4 \quad 3 \quad 2$$

$$(x^2-2x)^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$$

$$9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 5x^2 - x^4 + 4x^3$$

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$1 \quad -4 \quad +1 \quad +6 \quad -4 = 0$$

$x=1$

$$x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 = 0$$

$$x^3(x-1) - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

$$x^2(x-1) + 2x(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 4 = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x-2y| \leq 2$$

$$|x-y| \leq 1$$

$$3y + 6x$$

$$x \geq 2y$$

$$x - 2y \leq 2$$

$$x \leq 2 + 2y$$

$$-y \leq 1$$

$$y \geq -1$$

$$2y - x \leq 2$$

$$2y - 2 \leq x$$

$$2y - 2 = 6$$

$$y - 1 = 3$$

100

$$2x - y \geq 0 \quad 2x \geq y$$

$$2x + y \leq 1$$

$$2x - 1 \leq y$$

$$y - 2x \leq 1$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$3y + 6x \rightarrow \text{н.п.}$$

$$\text{н.п. } 3(y + 2x)$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y \end{cases}$$

н.п.

y

2

6

x ≥ 2y

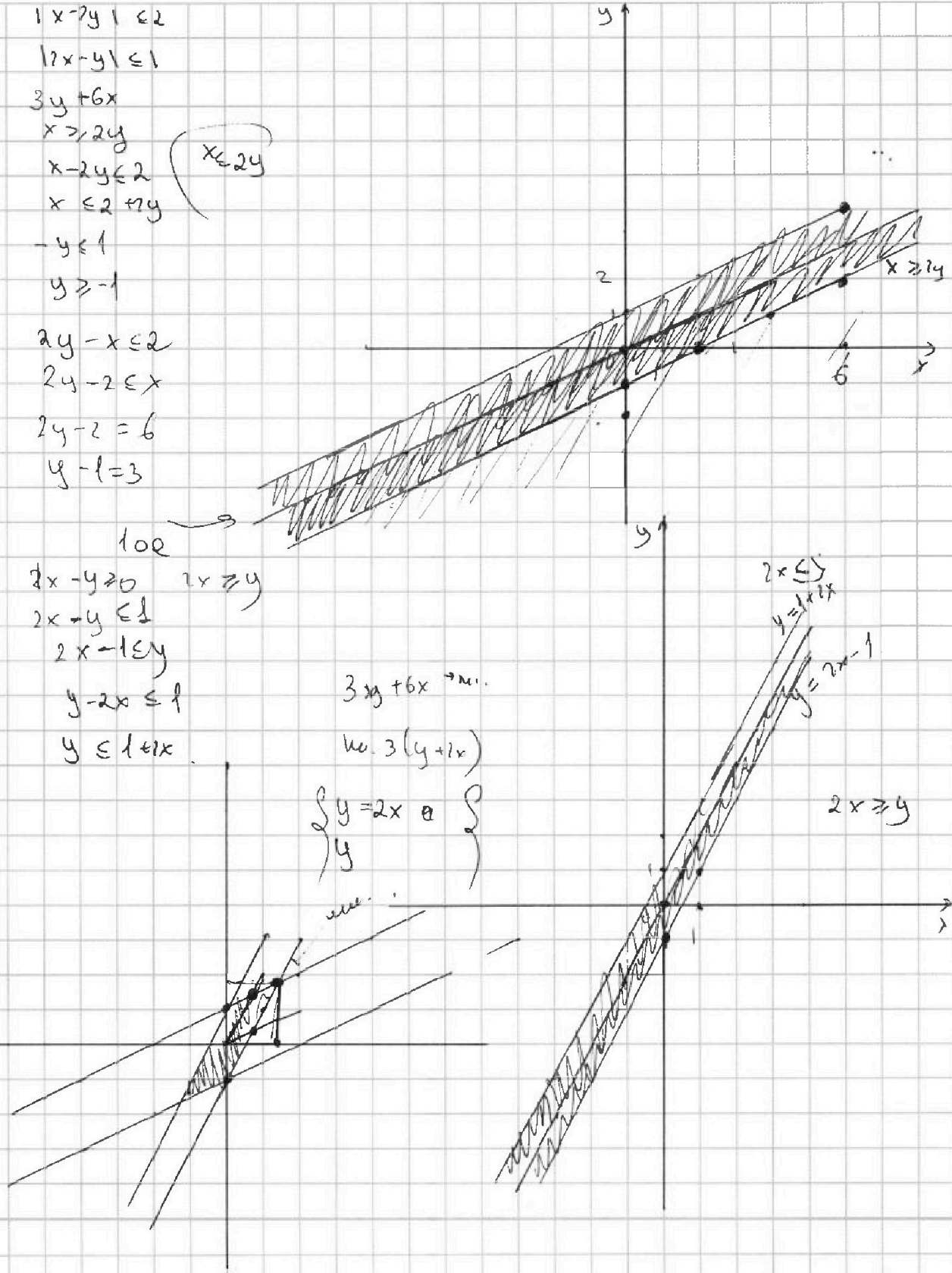
y

$$2x \leq 1$$

$$y \leq 1 + 2x$$

$$y = 2x - 1$$

$$2x \geq y$$



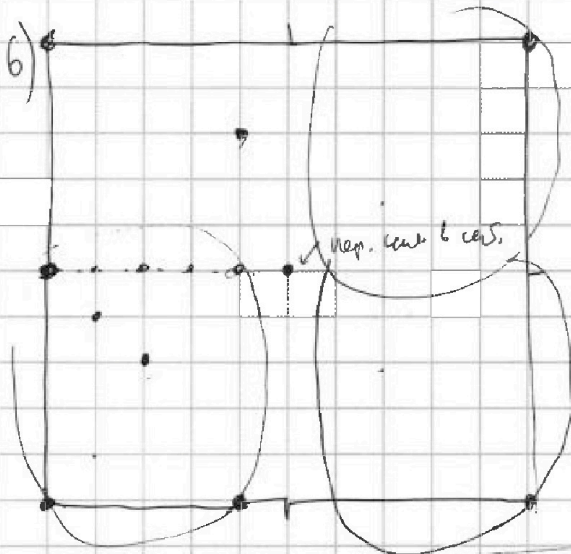


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



всего $4 \cdot \pi \cdot 6^2$
 сев. и радиус 6 см. $6 \cdot 1 \cdot 6$
 $\frac{120}{4} = 30 \Rightarrow 30 \cdot 6$
 пог. 6 см. не 6 см.
 высота 1 сектора 6^2
 и сев. $6 \cdot 6$

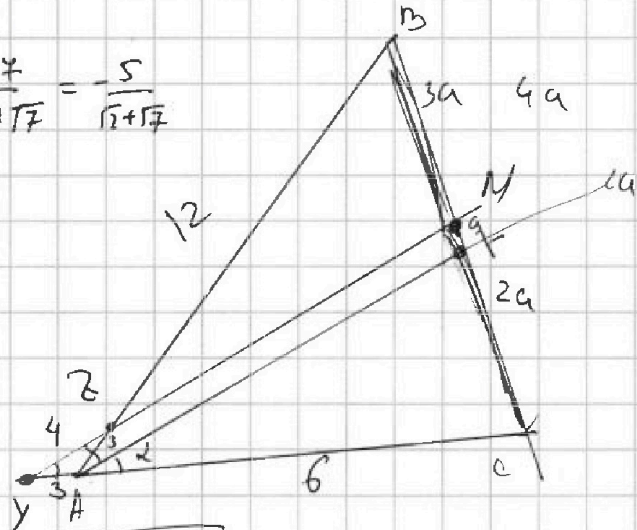
4)

$$\cos \alpha = \frac{3^2 - 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3^2} = \frac{9 - 4 - 16}{18} = \frac{-11}{18}$$

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

в $c = ?$

$$\frac{2-7}{\sqrt{2+7}} = \frac{5}{\sqrt{2+7}}$$



$$\sqrt{6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 12^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{4(9 + 36 + 8)} =$$

$$\cos 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

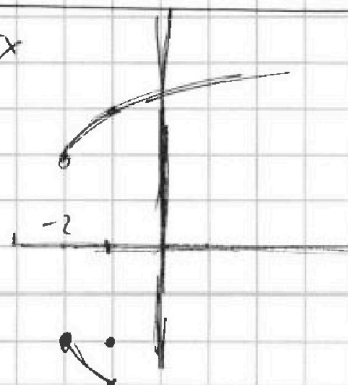
9+

$$-49 + 14xy - y^2 - 14y + 49 + 14 + 5x$$

$$5x + 10 + 4 - y^2 \quad y \leq 7 \quad x \geq -2$$

$$14 + 5x = y^2$$

Р4





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n) \cdot (m+2n-7)$$

$$m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

или $mn(m+2n+9) = 11p^2$

$1 \quad p \quad p^2 \quad 11 \quad 11p$

$$75 = 5^3 \cdot 3$$

или $m+n=3$

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$m+2n \geq 7$$

$$mn(m+2n+9)$$

$$m+2n \geq 8$$

$$(m+2n+9) \geq 17$$

$$5^2 \cdot 3 \cdot 3^2$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 5^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 5^2 \cdot 3 \cdot 9^2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{cases}$$

или 2, то $11p^2$

$q=2$ $4 \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 7^2$

$$(m+2n, m+2n-7) = (7, mn) = 1$$

$$\begin{cases} m+2n = 25 \\ m+2n-7 = 12 \end{cases}$$

или 7, то $p^2 = 7$

$$\begin{cases} m+2n = 75 \\ m+2n-7 = 4 \end{cases}$$

$$m+2n=7$$

$$m+2n-7 \leq m+2n$$

$$\begin{cases} m+2n = 77 \\ m+2n-7 = 7 \end{cases}$$

или $m+2n=7=7$

3	4
4	

$11p^2$ p^2 $(p/11)$ $p=3$

20	25
4	15 9^2

$m+2n$ - чет. и $m+2n-7$ - нечет.
Чет. $\Rightarrow p=2$

$$m+2n=11$$

$mn=15$

$n=1$
 2
 3
 4
 5