



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7. Пусть $a_n = a_1 + (n-1)d$ — арифметическая прогрессия, тогда:

$$a_3 = a_1 + 2d = 3(x+1)$$

$$a_5 = a_1 + 4d = x^2(x+2)^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2, \text{ тогда:}$$

$$\frac{a_9 + a_3}{2} = \frac{a_5 + a_1}{2} = a_1 + 5d = \frac{a_1 + 4d}{2} + d = \frac{x^2(x+2)^2 + d}{2} =$$

$$= \frac{3x^2 + 3x + 3}{2}, \text{ знаменатель } d = \frac{3x^2 + 3x + 3 - 2x^4 - 8x^3 - 8x^2}{2} =$$

$$= \frac{-2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 3x + 3}{2}, \text{ тогда:}$$

$$a_9 - a_5 = 4d = -(2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x^2) = -2x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$\rightarrow -(2x^4 + 4x^3 + x^2) = 4d = \frac{-2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 3x + 3}{2} \cdot 4 =$$

$$-4x^4 - 16x^3 - 20x^2 + 6x + 6,$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0; (x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0; (x+1)^2(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) = 0$$

Проверим, что при данных x и $a_3; a_5; a_9$ являются членами арифметической прогрессии:

$$x = -1: a_n = -1 + \frac{(n-1)}{2}; a_3 = 3(-1+1) = 0 = -1 + \frac{2}{2} \checkmark$$

$$a_5 = (-1)^2(1)^2 = 1 = -1 + \frac{4}{2} = 1 \checkmark$$

$$a_9 = 3(-1)^2 = 3 = -1 + \frac{8}{2} = 3 \checkmark$$

$$x = -1 - \sqrt{3}: a_n = -6\sqrt{3} - 4 + (n-1)(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}); a_3 = -3\sqrt{3} = -6\sqrt{3} - 4 + 4 + 3\sqrt{3} =$$

$$a_5 = (-1-\sqrt{3})^2(1-\sqrt{3})^2 = 4 = -6\sqrt{3} - 4 + 8 + 6\sqrt{3} = 4 \checkmark = -3\sqrt{3} \checkmark$$

$$a_9 = 3(-1-\sqrt{3})^2 = 12 + 6\sqrt{3} = -6\sqrt{3} - 4 + 12 + 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 12 \checkmark$$

$$x = \sqrt{3} - 1: a_n = 6\sqrt{3} - 4 + (n-1)(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}); a_3 = 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 4 + 4 - 3\sqrt{3} =$$

$$a_5 = 4 = 6\sqrt{3} - 4 + 8 - 6\sqrt{3} = 4 \checkmark = 3\sqrt{3} \checkmark$$

$$a_9 = 12 - 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 4 + 12 - 12\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3} \checkmark$$

Ответ: $-1; -1 - \sqrt{3}; \sqrt{3} - 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 7. \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3$$

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x \leq 3y \\ y \leq 1+3x \\ y \geq 1+3x \end{cases}$$

- Построим много-во
этих точек.
В коорд. на -ом:

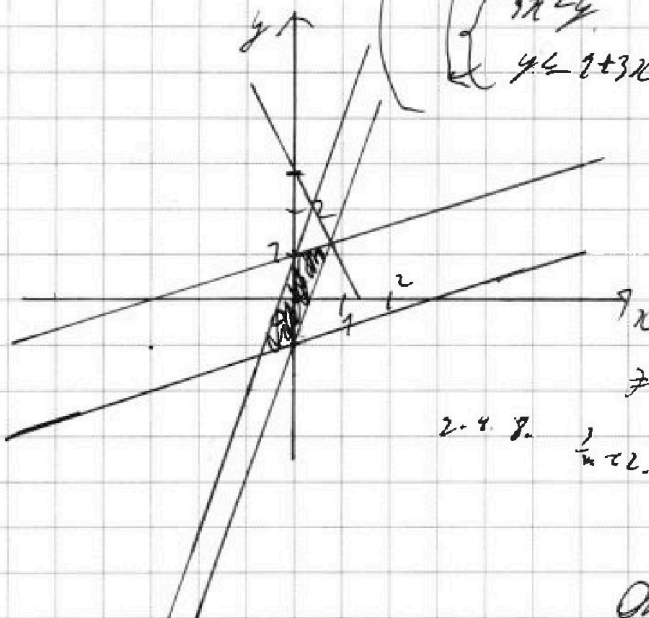
$$\begin{aligned} \text{Прямая } 4y+3x &= a. \\ y &= \frac{a}{4} - 3x \\ \text{найдём } a &= ? \end{aligned}$$

9x Обведём это так а,
это $a = 11$.

$$2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 16.$$

(Прямая $y = \frac{11}{4} - 3x$
пересекат ось. точек.
в т. $(\frac{11}{12}; \frac{5}{4})$.)

Ответ: 7





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2): m+n = p, \text{ тогда } A = p(p-9) = p^2 - 9p = 73p^2 \\ \Rightarrow 7 - 9p = 12p^2 - 0$$

$$(3): m+n = p^2, \text{ тогда } A = p^2(p^2-9) = p^4 - 9p^2 = 73p^2$$

$$\Rightarrow p^4 = 22p^2 \quad | : p^2 (\neq 0) \quad p^2 = 22 \Rightarrow p = \sqrt{22} \notin \mathbb{N}$$

$$(4): m+n = 73p; \text{ тогда } A = 73p \cdot (73p-9) = 769p^2 - 73p = 73p^2 \\ \Rightarrow 756p^2 = 77p \quad | : p (\neq 0) \quad p = \frac{77}{756} < 1, \text{ но } p \geq 2$$

$$(5): m+n = 73p^2; \text{ тогда } A = 73p^2(73p^2-9) = 769p^4 - 777p^2 = 73p^2 \\ \Rightarrow 769p^4 = 777p^2 \quad | : p^2 (\neq 0) \quad p^2 = \frac{777}{769}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\frac{777}{769}} < 1, \text{ но } p \geq 2$$

Поэтому мы получили, что

Проверка:

$$\begin{cases} m=3 \\ n=20 \end{cases} \\ A = 70+3 = 73$$

$$\begin{cases} m=3 \\ n=20 \\ m=20 \\ n=3 \end{cases}$$

$$A = (20+3)(20+3-9) = 23 \cdot 4 = 73 \cdot (2)^2 \quad (2=p - \text{применяем правило})$$

$$A = 20 \cdot 3(20+3-3) = 300 = 75 \cdot (2)^2 \quad (2=9 - \text{применяем правило})$$

$$2) \begin{cases} m=70 \\ n=3 \end{cases} : A = (70+3)(3+20-9) = 73 \cdot 4 = 73 \cdot (2)^2 \\ p = 2 - \text{применяем правило}$$

$$A = 20 \cdot 3(20+3-3) = 300 = 75 \cdot (2)^2 \quad (2=9 - \text{применяем правило})$$

Ответ: $(3; 20); (20; 3)$



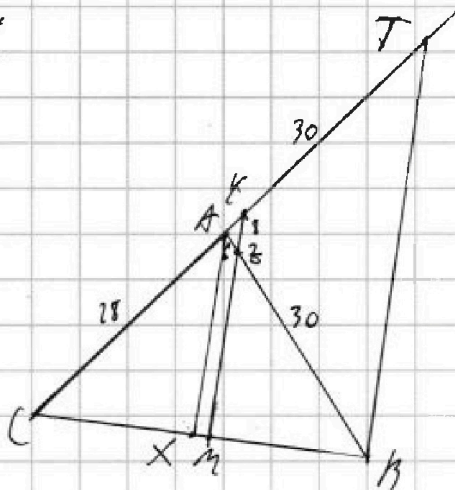
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14.



Решение:

1) $\angle T \in AC: AT \parallel AX$, тогда

~~$AT \parallel AX \parallel AY$~~

$AT \parallel AY$ $\rightarrow AY$ — ср. линия $\triangle BCT$
(попр-ку ср. линии)

\rightarrow по определению:

Y — ср. CT , $AY = YT$

$XY = \frac{1}{2} CT = AY = YT$

2) $\angle XAC = \angle XAB$ п.к. $\&$ $ZY \parallel AX$, то

как напр. смежные углы: $\angle AZY = \angle XAZ$

как соотв. углы: $\angle CAX = \angle CYA$

$\rightarrow \angle AZY = \angle XAZ = \angle CAX = \angle CYA$

$\angle AZY = \angle XAZ = \angle CAX = \angle CYA$

$\rightarrow \angle AZY = \angle CYA \rightarrow \triangle ZAY$ — μ , σ — к (по уг-ку), $ZY = AY$

$AZ = AY = 6$ (по определению):

3) $YT = YZ = AZ + AY = 7.8 + 6 = 24 \rightarrow TY = 24$

$\rightarrow AT = TY + AY = 30$

4) $ZY \parallel BT \rightarrow$ как соотв углы: $\angle AYZ = \angle ATB$ \rightarrow
 $\angle AZY = \angle ATB$

$\rightarrow \triangle ABT \sim \triangle AZY$ (по 2 углам) $\rightarrow \frac{AB}{AZ} = \frac{AT}{AY}$ ($AZ = AY = 6$)

$\rightarrow \frac{AB}{6} = 7 \rightarrow AB = 42$

5) по м. косинусов (в $\triangle ZAY$):

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2AZ \cdot AY \cdot \cos \angle ZAY$$

$$\rightarrow \cos \angle ZAY = \frac{36 + 36 - 64}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{9}; \angle CAB = 180^\circ - \angle ZAY \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \angle CAB = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

$$6) \text{ по м. косинусов (в } \triangle CAB): BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle CAB} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25.
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - 2x + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

(x; y ≥ 0)

*— выйдем из системы
рассмотрим (2)
уп-им:*

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) + 2x - 2y = 0 \quad (x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = (x-y)(x+y))$$

$$(x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + 2 = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Rightarrow x=y$$

Поэтому, из (2) уп-я & мы имеем: $x=y$ (x; y ≥ 0).
вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \sqrt{y+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5y-y^2} & (1) \\ x=y & (2) \end{cases}$$

*— выйдем из системы
рассмотрим (1)
уп-им:*

$$\sqrt{y+1} + 5 = 2\sqrt{6+5y-y^2} + \sqrt{6-y} \quad (1)$$

$$y+1 + 25 + 20\sqrt{y+1} = 4(6+5y-y^2) + 6-y + 4\sqrt{6-y}\sqrt{6+5y-y^2}$$

$$20\sqrt{y+1} = 24 + 20y - 4y^2 + 6 - y + 4\sqrt{6-y}\sqrt{6+5y-y^2}$$

$$20y^2 - 20y - 2 + \sqrt{y+1}(20y-7) = 0$$

$$20y^2 - 20y - 2 + \sqrt{y+1}(20y-7) = 0$$

Рассмотрим выражение $20y^2 - 20y - 2$

$$20y^2 - 20y - 2 = 2(10y^2 - 10y - 1)$$

$$10y^2 - 10y - 1 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 40}}{20} = \frac{10 \pm \sqrt{140}}{20} = \frac{5 \pm \sqrt{35}}{10}$$

ищем y ∈ [0; 1]:

$$y = \frac{5 + \sqrt{35}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{y+7}(2y+7) = 2+9y-2y^2 \\ y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} (y+7)(4y^2+49-28y) = (2y^2-2-9y)^2 \\ 2y^2-9y-2 \leq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^3+99y-28y^2+4y^2+49-28y = 4y^3+97y^2+49-8y^2-36y^2+38y \\ (y-\frac{5+\sqrt{13}}{2})(y-\frac{5-\sqrt{13}}{2}) \leq 0 \\ y \leq 6 \\ 4y^2-40y+3 \end{cases}$$

$$\sqrt{y+7} - \sqrt{6-y} + 6y + 21y - 2 = 2\sqrt{(6-y)(7+y)}$$

$$\sqrt{y+7}(\sqrt{y+7}+1) + \sqrt{6-y}(\sqrt{6-y}-1)$$

$$\sqrt{6-y}(\sqrt{6-y}+1) + (\sqrt{7+y}-1)(\sqrt{7+y}+1) =$$

$$= \sqrt{6-y}(\sqrt{7+y}+1) + \sqrt{7+y}(\sqrt{6-y}-1)$$

$$(\sqrt{6-y}-1)(\sqrt{7+y}-\sqrt{6-y}-1) + (\sqrt{7+y}+1)(\sqrt{6-y}-\sqrt{7+y}+1) = 0$$

$$(\sqrt{7+y}+1)(\sqrt{6-y}+1-\sqrt{7+y}) - (\sqrt{6-y}-1)(\sqrt{6-y}+1-\sqrt{7+y}) = 0$$

$$(\sqrt{6-y}+1-\sqrt{7+y})(\sqrt{7+y}+1-\sqrt{6-y}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{6-y}+1 = \sqrt{7+y} \\ \sqrt{7+y}+2 = \sqrt{6-y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6-y+1+2\sqrt{6-y} = 7+y \\ 7+y+4+4\sqrt{7+y} = 6-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6-y} = 4-3 \\ 4\sqrt{7+y} = 1-2y \end{cases}$$

$$1-2y \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5}{2} - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3 \\ 6-y = y^2-6y+9 \\ 8 \leq \frac{7}{2} \\ 26+26y = 4y^2-4y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-5y+3=0 \\ y \in 3 \\ y \leq \frac{7}{2} \\ 4y^2-20y-15 \geq 0 \end{cases}$$

вероятно не существует:

$$\begin{cases} y = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5}{2} - \sqrt{10} \\ \sqrt{21} = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot 25 - 20 = 11 \\ y = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^2 - 20y - 15 = 0 \\ y = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ \sqrt{21} = 14 \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right\}$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7. Пусть $a_n = a_1 + (n-1)d$ — арифметическая прогрессия, тогда

$$a_3 = a_1 + 2d = 3(x+1)$$

$$a_5 = (x(x+2))^2 = a_1 + 4d$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$a_5 = x^2(x+2)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^4 + 4x^2(x+1) = x^4 +$$

$$\frac{a_3 + a_9}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 3}{2} = a_1 + 5d = x^4 + 4x^2(x+1) + 5d$$

$$d = \frac{3x^2 + 3x + 3 - 2x^4 - 8x^3 - 8x^2}{2} = \frac{-2x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 3x + 3}{2} \quad (1)$$

$$a_9 - a_5 = 4d = \frac{3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2}{2} = \frac{-4x^4 - 16x^3 - 20x^2 + 6x + 6}{2} \quad (2)$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1$$

$$-x^4 + x^3$$

$$3x^3 + 3x^2$$

$$-3x^3 + 3x^2$$

$$-2x - 2$$

$$-2x - 2$$

$$0$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$

$$4 = 2 + 2 = 3$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = 0$$

$$x^3+3x^2-2 \quad | \quad x+1$$

$$-x^3+x^2$$

$$2x^2-2$$

$$-2x^2+2x$$

$$2x^2+2x$$

$$-2x-2$$

$$-2x-2$$

$$0$$

$$\Rightarrow x = -1; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x = -1: \quad a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = 3$$

$$d = \frac{1}{2}, a_1 = -1$$

$$a_9 = -1 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad \checkmark$$

$$a_1 = x = \sqrt{3} - 1$$

$$a_3 = 3\sqrt{3} - 1$$

$$a_5 = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)^2 = 4$$

$$a_9 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(3+1-2\sqrt{3}) = 12-6\sqrt{3}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12-6\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12-6\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12-6\sqrt{3}$$

$$d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12-6\sqrt{3}$$

$$a_3 = 3\sqrt{3} - 4$$

$$a_5 = 4$$

$$a_9 = 12-6\sqrt{3}$$

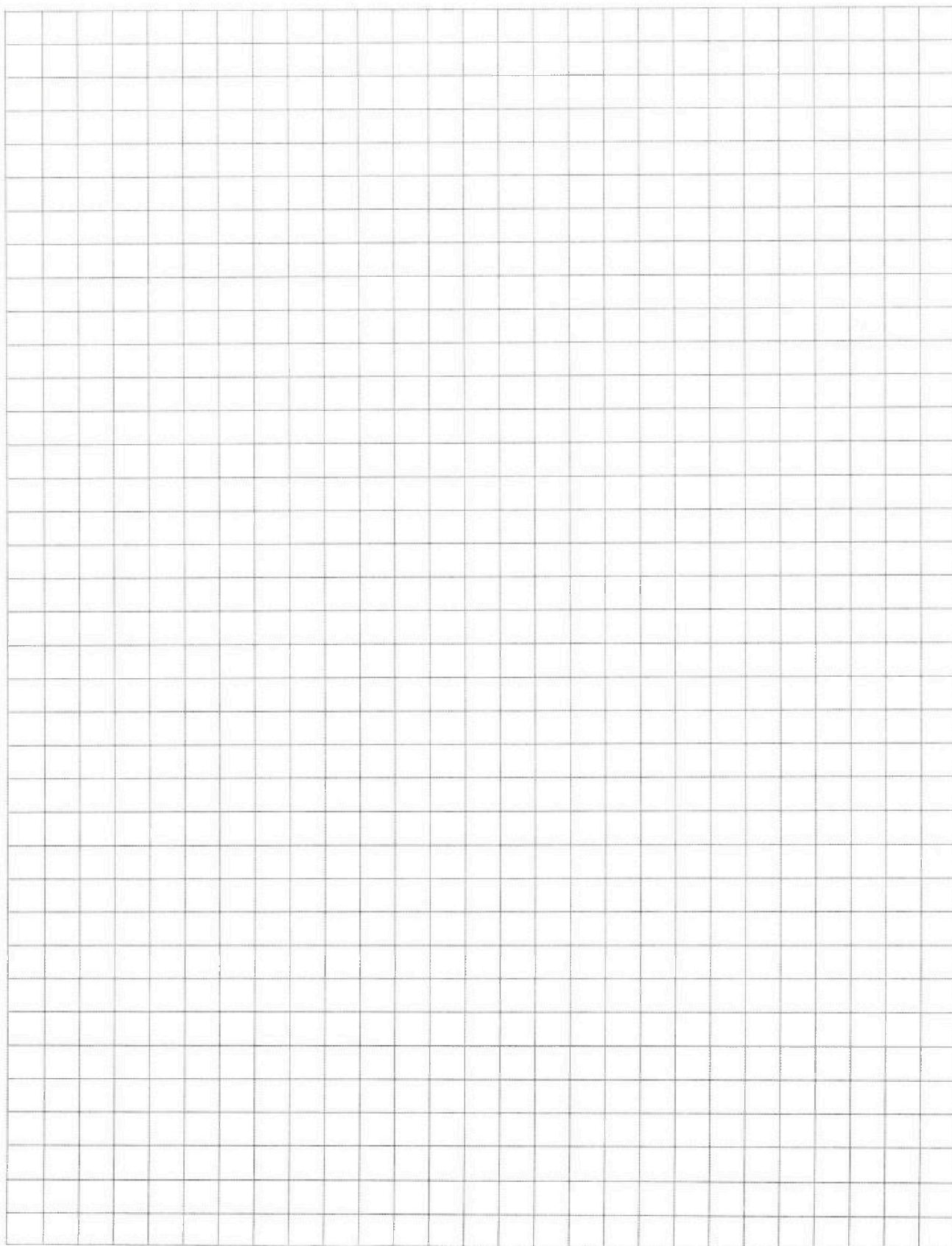


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13. A = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 9(m+n)}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)(m+n-9)}{(m+n)^2}$$

$$B = mn(m+n) - 3mn = mn(m+n-3)$$

2кл. когда $A = 759^2$
 $B = 73p^2$, тогда раскладываем A :

$A = (m+n)(m+n-9)$, заметим, что $m+n \equiv m+n-9 \pmod{9}$,
знаем, если $m+n \equiv 3$, то $m+n-9 \equiv 3$,
если $m+n \equiv 9$, то $m+n-9 \equiv 9$

знаем, если $mn \equiv 3 \pmod{9}$ (500: $m+n \equiv 3$), тогда

2-ой множитель $m+n-9 \equiv 3$ ($m+n-9 \equiv 3$), тогда

$A = 759^2 \equiv 9$, знаем $9^2 \equiv 3 \Rightarrow 9 \equiv 3$ (9 - простое число)

тогда $A \equiv 75 \cdot 9 \equiv 27 \Rightarrow 600 : m+n \equiv 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow m+n-9 \equiv 9 \Rightarrow A = 75 \cdot 9 \equiv 81$, но $75 \cdot 9 \not\equiv 81$
 $25 \cdot 3$

\Rightarrow перебираем варианты

2кл. когда $A = 73p^2$, $B = 759^2$, раскладываем A :

$$A = (m+n)(m+n-9) = 73p^2 > 0 \Rightarrow m+n > 9, \text{ знаем, } m+n-9 = 73, \quad (1)$$

$$m+n-9 = p, \quad (2)$$

$$m+n-9 = p^2, \quad (3)$$

$$m+n-9 = 73p, \quad (4)$$

$$m+n-9 = 73p^2, \quad (5)$$

$$\begin{cases} m+n = 73 & (1) \\ m+n = p & (2) \\ m+n = p^2 & (3) \\ m+n = 73p & (4) \\ m+n = 73p^2 & (5) \end{cases}$$

(1): $m+n = 73$, тогда $mn \equiv 3 \pmod{9}$,
 $B = mn(m+n-3) = mn \cdot 70 = 759^2$
 $\Rightarrow 9 \cdot 2 \Rightarrow 9 \equiv 2$, тогда
 $m \cdot n \cdot 202 \cdot 300 \Rightarrow mn = 30$

$$\begin{cases} m+n = 73 \\ mn = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 70 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m = 70 \\ n = 3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} &= \sqrt{324 + 900 + 2 \cdot 78 \cdot 30 \cdot \frac{7}{9}} = \sqrt{324 + 900 + 720} = \\ &= \sqrt{900 + 444} = \sqrt{7744} = 2\sqrt{336} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AC = 8\sqrt{21}$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{21}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$49x^2 - 40xy^2 + 96y^2 + 15y - 45 = 0$$

$$-76 + 560 \quad a - b + 5 = 2ab$$

60

$$-76 + 560 = 60.$$

$$4 - 49 = 24x - 76y$$

$$\sqrt{21x}(\sqrt{21\sqrt{6-x}} - 1) = 5 - \sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{a-b} + a + b - 2 = 2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{21x} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{a-b} - 2 + \sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a-b})^2 + ab - \sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} + 1) + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

10

$$(\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} + 1) + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} + 1)$$

$$4\sqrt{6-x}(\sqrt{a-b} - 1)$$

$$(\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} + 1) - (\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} + 1) = (\sqrt{a-b} - 1)(\sqrt{a-b} + 1) = 0$$

$$\sqrt{21x} - \sqrt{6-x} - \sqrt{21x} + 1 = 0$$

$$6 - x + 1 + 2\sqrt{6-x} - x = x + 1$$

$$\sqrt{7x} - \sqrt{6-x} + 2 = 0$$

$$6 - x = x^2 - 6x + 9$$

$$\sqrt{6-x} = x - 3$$

$$7 + x + 4 + 4\sqrt{7x} = 6 - x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x - 2 = 25 \quad 49 = 116 \quad 10 \quad -x$$

$$4\sqrt{7x} = 7 - 2x$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

60

$$16 + 16x = 7 - 4x + 4x^2$$

$$D/4 = 200 +$$

$$D/4 = 200 + 60 = 260$$

$$25 - 72 = 73$$

$$\frac{70 \pm 4\sqrt{26}}{4}$$

$$D \geq \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2} \leq$$

$$\frac{70 \pm 4\sqrt{26}}{4} \leq 8$$

$$\frac{5 \pm 2\sqrt{73}}{2} = 2,5 \pm \sqrt{73} \leq \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\sqrt{73} \leq 7 \quad -x$$

$$2 \pm \sqrt{73} \leq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{73} \leq 0$$

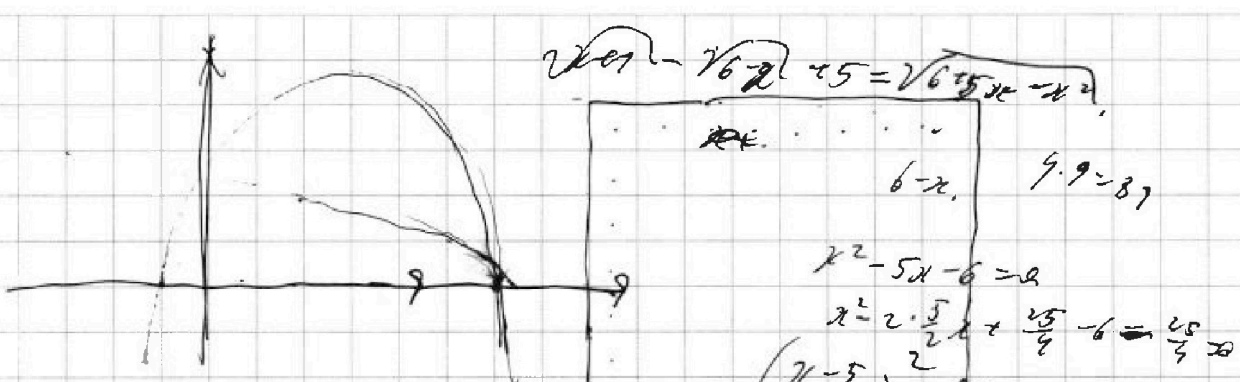


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{6-x} - \sqrt{6-2x} + 5 = \sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = 2 \cdot \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$x \in [0; \frac{5}{2}] \uparrow$
 $[\frac{5}{2}; 6] \downarrow$

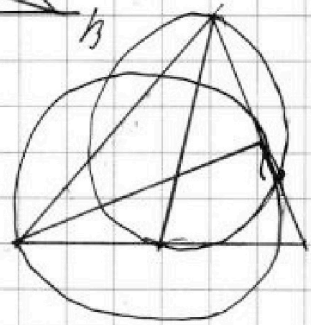
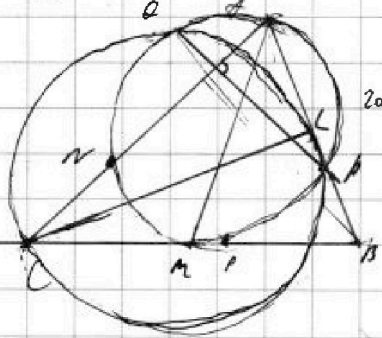
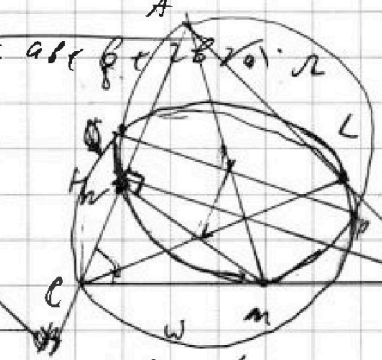
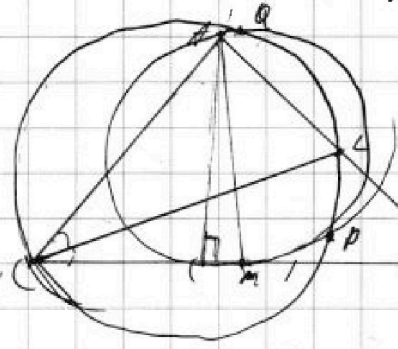
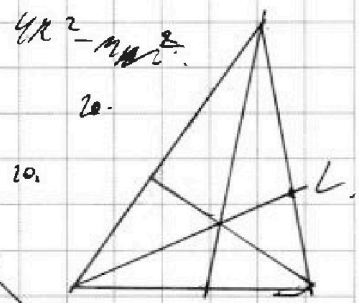
$x \in [\frac{5}{2}; 6] \downarrow$

$x = \frac{5}{2}$; $\frac{10}{20} + \frac{10}{20} + 5 = \sqrt{20} + 5 = \frac{7}{2}$

4: $\sqrt{a^2+b^2}$
5:

$\sqrt{a-b+5} = \sqrt{ab}$
 $a + \sqrt{a^2+b^2} + 5 = ab + \sqrt{a^2+b^2}$

$BL = \frac{20}{AB}$



$CL + LC =$
 $= CL \cdot (CL + AB)$

$BP \cdot PM = BP \cdot AB$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - 3xy - xy + 3y^2$

$|x - 3y| + |3x - y| \leq 4$

$2 \leq \frac{x}{y} \leq 3$
 $2 \geq 3y \geq \frac{x}{3}$

$3y - x + 3x - y \leq 4$
 $2x + 2y \leq 4$
 $y \leq 2 - x$

$3y \geq 2x \geq \frac{x}{3}$
 $9y \geq 2x \geq \frac{x}{3}$

$9y + 2x = 9$
 $9 + 2\sqrt{9}$

$3y - x + y - 3x = 4y - 4x \leq 4$
 $y - x \leq 1$

$\sqrt{9x^2 + 16y^2} \leq 5$
 $(9x^2 + 16y^2) \leq 25$

$3x \geq y$
 $3x - 7 \leq y$
 $3x \leq y$
 $y \leq x + 1 + 3x$

$9y + 2x = 9$
 $9 + 2\sqrt{9}$

$3x \geq y$
 $3x - 7 \leq y$
 $3x \leq y$
 $y \leq x + 1 + 3x$

$9y + 2x = 9$
 $9 + 2\sqrt{9}$

$3x \geq y$
 $3x - 7 \leq y$
 $3x \leq y$
 $y \leq x + 1 + 3x$

$a - b = -2(x + y)$
 $\frac{-(a - b)}{2} = x + y$
 $-7(a - b) + \frac{a + b}{2} = 36a - 3a + \frac{a + b}{2} =$
 $= \frac{66 - 6a + a + b}{2} = \frac{7b - 5a}{2} \leq \frac{7|b| + 5|a|}{2} \leq \sqrt{\frac{49b^2 + 25a^2}{2}} =$
 $= \sqrt{\frac{9 + 225}{4}} =$

$A = m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$
 $B = m^2 + mn + n^2 - 3mn$
 $m^2(m + n) - 3mn$
 $m^2(m + n - 3) = mn(m + n - 3)$

$k = 7 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 28$
 $a = 3$
 $b = 1$
 $|a| \leq 3$
 $|b| \leq 1$
 $\sqrt{49b^2 + 25a^2} =$
 $\sqrt{49 \cdot 1 + 25 \cdot 9} = \sqrt{250} \approx 15.8$

$(m + n)^2 \geq 9(m + n)$
 $(m + n)(m + n - 9) \geq 0$
 $m + n \geq 9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m+n)(m+n-9) = 23p^2$$

$$B = m(n)(m+n-3) = 75q^2$$

$$m+n-3 = 5, \quad m+n = 25q^2$$

$$m+n = 8, \quad m+n = 25q^2$$

$$6^2 - 86 + 75q^2 = 0, \quad 6q = 64 - 75q^2 = 0$$

$$m+n = \frac{4 \pm 2}{2} = 6; 2, \quad q = 2, \quad n = 4$$

$$6 \cdot 2(5) = 60 - p$$

$$m+n = 3675$$

$$m+n = 13$$

$$m+n = p$$

$$m+n = p^2$$

$$m+n = 23p$$

$$m+n = 73p^2$$

$$p(p-9) = 13p^2$$

$$p^2 - 9p = 13p^2$$

$$-9p = 12p^2$$

$$p^2(p^2-9) = p^2-9p^2 = 73p^2$$

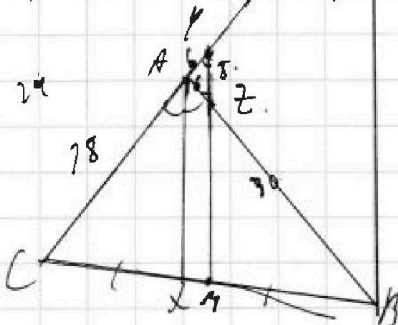
$$p^4 = 22p^2 \Rightarrow p^2 = 22$$

$$73p(13p-9) = 269p^2 - 217p = 13p^2$$

$$756p^2 = 217p$$

$$m+n = 73p^2(73p^2-9) = 269p^2 - 217p^2 = 73p^2$$

$$20 \cdot 3(20+3-3) = 300 = 75 \cdot 4 = 300$$



$$672 \cdot 2 = 336 \cdot 4 = 84 \cdot 76 = 27 \cdot 64 \Rightarrow AC = 8\sqrt{27}$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{6-9} + 5 = 2\sqrt{6+54-42}, \quad \sqrt{4+1} - \sqrt{6-9} + 5 = \sqrt{6+54-42}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{9} = 49 - \sqrt{21} + 5x^2$$

$$y^2 - 5y + \sqrt{6+54-42} = \sqrt{6-9}(17+9)$$

$$\sqrt{21} + \sqrt{6-9} + 5 = \sqrt{21}$$

$$(y+1)(y+6) = 6 \cdot 242 - 1 \cdot 46 = [-116]$$

$$y^2 + 7y + 6 = 6 + 54 - y^2 + 25 - 20\sqrt{6+54-42}$$

$$y^2 - 20\sqrt{6+54-42} + 6$$

$$y^2 - 20\sqrt{6+54-42}$$