



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть d - разность ш/у соседними членами арифм.

прогрессии

Тогда

$$\begin{cases} 6x+18+2d=(x^2-4x)^2 & (1) \\ 6x+18+6d=-3x^2 & (2) \\ (x^2-4x)^2+4d=-3x^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1): 6x+18+2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$(1) - (3)$$

$$(x^2-4x)^2 + 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -3x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

По т. Безу $x=2$ - корень.

по теореме Безу $x=2$ - корень

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -4x^2 + 5x \\ -4x^2 + 8x \\ \hline -3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \\ x^4 - 2x^3 \\ \hline -6x^3 + 17x^2 \\ -6x^3 + 12x^2 \\ \hline 5x^2 - 4x \\ 5x^2 - 10x \\ \hline 6x - 12 \\ 6x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{7}$$

Ответ: $x_1 = 2 + \sqrt{7}$, $x_2 = 2 - \sqrt{7}$, $x_3 = 2$

Проверим:

$$x=2 \quad \begin{array}{l} \text{V} - 30 \\ \text{VII } 4(4-3)^2 = 16 \\ \text{VIII} - 4(4-3) = -4 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{V} \\ \text{VII} \\ \text{VIII} \end{array}} \right\} \checkmark$$

$$\begin{array}{l} a_5 = 30 + 6\sqrt{7} \\ a_7 = 9 \quad a_{11} = 33 \pm 12\sqrt{7} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_5 \\ a_7 \\ a_{11} \end{array}} \right\} \checkmark$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

Заметим, что $|4x - 3y| \in [-6; 6]$
 $|3x - 4y| \in [-8; 8]$

Также заметим

→ добавим

$$4x - 3y - 3x + 4y = x + y \in [-14; 14]$$

т.к. нижняя граница $-6 - 8 = -14$ (т.е. наименьшее значение min)
 верхняя граница $= 6 + 8 = 14$ (т.е. max)

Тогда

$$4x - 3y + 3(x + y) = 7x \in [-48; 48] \Rightarrow 14x \in [-96; 96]$$

$$3x - 4y - 3(x + y) = -7y \in [-50; 50] \Rightarrow 7y \in [-50; 50]$$

Тогда $14x + 7y \in [-146; 146]$

т.к. просто поменяли знак, а модуль не изменился.

т.е. наименьшее значение $= -146$

достигается при $x = -\frac{48}{7} = -6\frac{6}{7}$

$$y = -\frac{50}{7} = -7\frac{1}{7}$$

Проверим

$$\textcircled{1} \left| -\frac{4 \cdot 48}{7} + \frac{150}{7} \right| \leq 6$$

$$\textcircled{2} \left| -\frac{3 \cdot 48}{7} + \frac{200}{7} \right| \leq \frac{56}{7}$$

$$\left| -\frac{192}{7} + \frac{150}{7} \right| \leq \frac{42}{7} \checkmark$$

$$\left| -\frac{144}{7} + \frac{200}{7} \right| \leq \frac{56}{7} \checkmark$$

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Заметим, что:

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m-n+3)$$

Рассмотрим 2 случая

I $A = 13p^2, B = 3q^2$

II $A = 3q^2, B = 13p^2$

①: $(m-n)(m-n+9) = 13p^2$

Заметим, что $m-n$ и $m-n+9$ — взаимно простые

Докажем: $\begin{cases} n & n+9=2 \\ \text{и} & \end{cases}$

$2+n = n$

Значит: $(m-n)(m-n+9) : 2 \Rightarrow 13p^2 : 2$, единственное

четное простое это 2 $\rightarrow 13p^2 = 13 \cdot 4 = 52$

$$52 = 2 \cdot 26 = 4 \cdot 13 = 1 \cdot 52$$

Одним из делителей больше второго на 9, подходит пара $(4; 13)$

получаем пара $\Rightarrow m-n=4$

$$m-n+9=13$$

Тогда $B = 7mn = 3q^2 \Rightarrow m \cdot n \cdot 7 \cdot 3$ и $3q^2 : 7 \Rightarrow q : 7$, 3 и 7

$q = 7 \Rightarrow B = 3 \cdot 49 = 147 \Rightarrow mn = \frac{147}{7} = 21$

$$\begin{cases} mn = 21 \\ m-n = 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m = 4 + n$$

$$(4+n) \cdot n = 21$$

$$n^2 + 4n - 21 = 0$$

$$D = 16 + 84 = 100$$

$$n_1 = \frac{-4 + 10}{2} = 3$$

$$n_2 = -7 - \text{негод т.к. только натуральные}$$

$$n = 3 \quad m = 7$$

$$A = 52 \quad B = 147$$

$$\textcircled{2}: A = 3q^2$$

$$B = 13p^2$$

$$(m-n)(m-n+9) = 3q^2$$

$$\text{Аналогично } 3q^2 : 3 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow 3q^2 = 12$$

$$(m-n)(m-n+9) = 12$$

$$m-n = t$$

$$t^2 + 9t - 12 = 0$$

$$D = 81 + 48 = 129$$

$\sqrt{129}$ — дробная, корень не дробный
не выводится \Rightarrow т.к. q — целое, то корни будут

целыми (целое + иррац. = иррац.) \Rightarrow тут m, n иррационально — противоречие, т.к. натуральное — натуральное = натуральное.
Ответ: $m = 7$
 $n = 3$

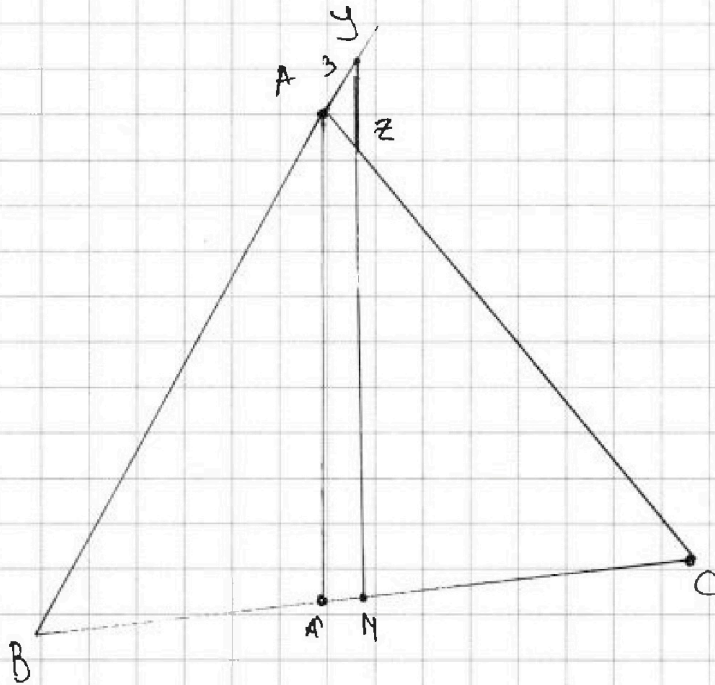


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение: Пусть $\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle A'AZ = \alpha = \angle AZY$ (как накрест лежащие). $\angle YAZ = 180 - 2\alpha$, $\angle AZZ = \alpha$ (сумма углов в $\Delta = 180$) Значит $\angle AYZ = \alpha \Rightarrow \Delta AYZ$ - равнобедренный $\Rightarrow AY = AZ = 3$. По формуле $\cos(180 - 2\alpha)$ по теореме о косинусов для ΔAYZ

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180 - 2\alpha)$$

$$16 = 18 - 18 \cdot \cos(180 - 2\alpha)$$

$$\cos(180 - 2\alpha) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Воспользуемся теоремой Фалеса (теорема Фалеса обобщенная) для перпендикулярных отрезков

$$\frac{AZ}{ZC} = \frac{A'M}{MC} = \frac{AZ}{AC - AZ} = \frac{3}{9 - 3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $MC = 3x$, $AM = x \Rightarrow BM = MC = 3x$, $BA' = 2x$.

Тогда

$$\frac{BA'}{BM} = \frac{BA}{BA + Ay} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BA}{BA + 3} = \frac{2}{3}$$

$$BA = 6.$$

Воспользуемся теоремой косинусов в $\triangle ABC$

$$BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(2\alpha) \quad \left(\text{Заметим, что } \cos(180 - 2\alpha) = -\cos 2\alpha \right.$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\cos(180 - 2\alpha)$$

$$BC^2 = 180 + 144 \cdot \frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 180 + 16$$

$$BC^2 = 196$$

$$BC = 14$$

Ответ: $BC = 14$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задачу 5

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & \textcircled{1} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y} & \textcircled{2} \end{cases}$$

ОДЗ

$$y \in [0; 5]$$

$$x \in [0; 30]$$

если $x > 30$, то $\sqrt[4]{x+y} < 0$

Запишем $\textcircled{2}$ по-другому

$$4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + 5\sqrt[4]{y} + y$$

Предположим $x \neq y$, пусть $x > y$ (без ограничения общности)

тогда $4x^4 > 4y^4$, $x > y$, $\sqrt[4]{x} > \sqrt[4]{y} \Rightarrow$ ~~это~~ неравно. Значит

$$x = y$$

Тогда $\textcircled{1}$ упр-е запишем так:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+6} \\ b = \sqrt{5-x} \end{cases}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a - b = 2ab - 5 \quad | \wedge 2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$a^2 + 18ab + b^2 = 4a^2b^2 + 25$$

Заметим $a^2 - b^2$ - возрастаем

$$a - b + 18ab + 5 - x = 4a^2b^2 + 25$$

$$18ab + 11 = 4a^2b^2 + 25$$

Пусть $g = ab$

$$18g - 1 = 4g^2 + 25 \quad 18g + 11 = 4g^2$$

$$4g^2 - 18g + 14 = 0$$

$$2g^2 - 9g + 7 = 0$$

$$D = 81 - 56 = 25$$

$$g_1 = \frac{9+5}{4} = 3,5$$

$$g_2 = \textcircled{1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 1 \quad (1)$$

$$ab = \frac{7}{2} \quad (2)$$

$$(1): \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} = 1$$

$$(x+6)(5-x) = 1$$

$$5x - x^2 + 30 - 6x = -1$$

$$-x^2 - x + 30 = 1$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 29 \cdot 4 = 1 + 116 = 117 = (3\sqrt{13})^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3\sqrt{13}}{2} \text{ — не подходит т.к. } x \geq 0$$

$$\frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2} \sqrt{5}$$

$$-1 + 3\sqrt{13} \sqrt{5}$$

$$11 \sqrt{3\sqrt{13}}$$

$$121 \sqrt{9 \cdot 117} \Rightarrow \frac{3\sqrt{13}-1}{2} \text{ — берем } \text{б.о.д.з.}$$

$$(2): \sqrt{-x^2 - x + 30} = \frac{7}{2}$$

$$-x^2 - x + 30 = 12\frac{1}{4} \quad | \cdot 4$$

$$-4x^2 - 4x + 120 = 49$$

$$-4x^2 - 4x + 71 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$D = 16 + 16 \cdot 71 = 16 \cdot 72 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 8 = (24\sqrt{2})^2$$

$$x_1 = \frac{-4 + 24\sqrt{2}}{8} \quad x_2 = \frac{-4 - 24\sqrt{2}}{8} \text{ — не подходит } x \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\approx 4,76 \\ &\frac{3\sqrt{2}+1}{2} \sqrt{5} \\ &\approx 14,2 \\ &3\sqrt{2} \approx 4,26 \text{ берем } \text{б.о.д.з.} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3\sqrt{2}+1}{2}, \frac{3\sqrt{2}+1}{2} \right) \\ \left(\frac{3\sqrt{13}-1}{2}, \frac{3\sqrt{13}-1}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

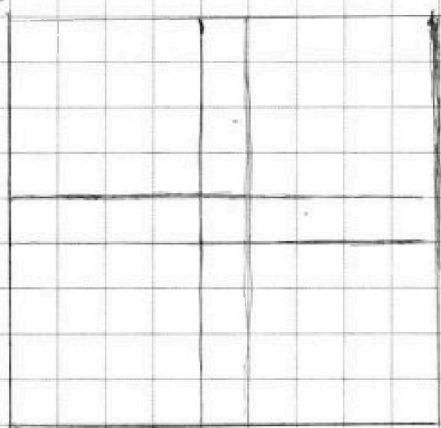
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



Заметим, что всего узлов - 100
Также заметим, что
повернуть пару узлов
или поменять 4 руга ~~два~~
на 5 руга вернется в исходное

положение. Значит всего пар 99-100, но каждую
можно повернуть 4 руга $\Rightarrow 99 \cdot 2.5 = 247.5$

~~Повернуть = отразить~~

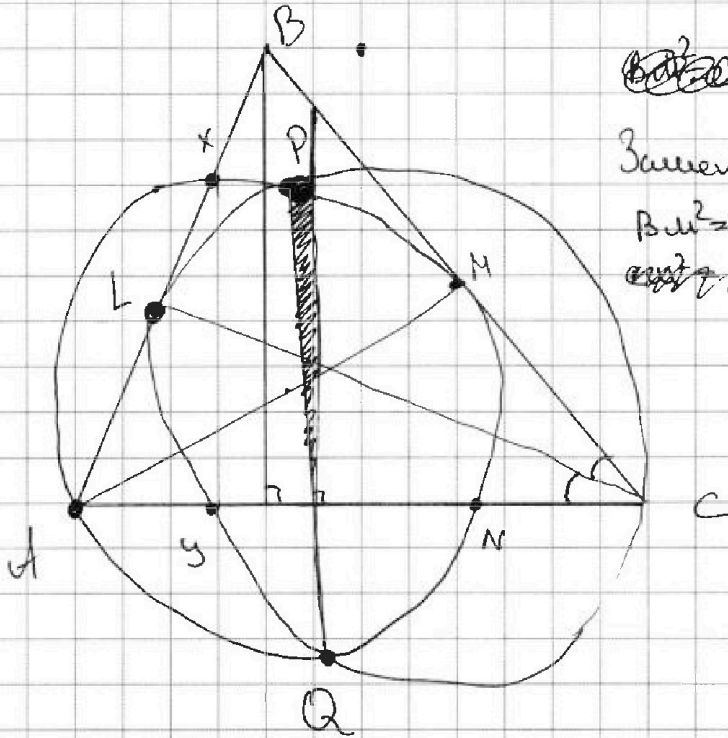


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Вот так~~

Заметим, что

$$BP^2 = Bx \cdot AB$$

~~или AN~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6x+18+2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$\begin{aligned} 5 &\rightarrow +4d \\ 11 &\rightarrow +10d \end{aligned}$$

$$6x+18+6d = -3x^2$$

$$12+6\sqrt{7}+18 = 30+6\sqrt{7}$$

$$4d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - (-3x^2)$$

$$(2+\sqrt{7})^2 - 28 = 4\sqrt{7}$$

$$4d = x^4 - 8x^3 + 19x^2$$

$$2+2\sqrt{7}+7-8-4\sqrt{7} = 1-3 = -2$$

$$6x+18 + \frac{x^4 - 8x^3 + 19x^2}{4} = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$2d = \text{от } -2\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$$

$$12x+36 + \frac{x^4 - 8x^3 + 19x^2}{2} = \frac{2x^4 - 16x^3 + 32x^2}{2} - 3x^2$$

$$-3x^2 = -3(11+4\sqrt{7}) = -33-12\sqrt{7}$$

$$12x+36 = x^4 - 8x^3 + 13x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$-3x^2 - x^2$$

$$(x^2 - 4x)^2 - (2x-6)^2 - 2x^2 = 0$$

$$30 \frac{24}{23} \quad 16 \frac{8}{9} \quad 9 \frac{2}{5} = 12$$

$$6x+18+2d = (x^2 - 4x)^2$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \quad | \quad x-2 \\ \underline{x^4 - 2x^3} \\ -6x^3 + 17x^2 - 4x - 12 \\ \underline{-6x^3 + 12x^2} \\ 5x^2 - 4x - 12 \end{array}$$

$$6x+18+6d = (-3x^2)$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ x^3 - 6x^2 + 5x + 6 \\ \underline{8 \quad -24 \quad 10 \quad 6} \end{array}$$

$$(x^2 - 4x)^2 + 4d = -3x^2$$

$$D = 16 + 12 = 28 \quad \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$6x+18+2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 10x \\ \underline{6x - 12} \\ x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 5x - 4x + 8x - 12 \\ \underline{-4x^2 + 5x} \\ -4x + 8x - 12 \\ \underline{-4x + 8x} \\ -12 \end{array}$$

$$2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$$

$$(x^2 - 4x)^2 + 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -3x^2$$

$$x^4 - 16x^3 + 16x^2 + 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 + 3x^2 = 0$$

$x = 2$ брэгев

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\left(\frac{x^2 - 4x}{2} + \frac{x^2 - 4x}{2} \right)^2 = 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|4x-3y| \leq 6$$

$$|3y-4x|$$

$$|3x-4y| \leq 8$$

$$x \leq |x|$$

$$|4x-3y| \leq |4x-3y| \leq 6$$

$$-3x+4y \leq -|3x-4y| \leq -8$$

$$4x-3y \leq 6$$

$$-3x+4y \geq -8$$

$$4x-3y \geq -6$$

$$-3x+4y \geq -8$$

$$14x+7y$$

$$(2x+y)$$

$$4x-3y \in [-6; 6]$$

$$3x-4y \in [-8; 8]$$

$$2x+y \in [-14; 14]$$

$$4x-3y+3(x+y) = 7x$$

$$E = -42; 48 \Rightarrow 14x \in [-96; 96]$$

$$3x-4y \in [-8; 8] - 3(x+y)$$

$$-7y \in [-50; 50] \Rightarrow 7y$$

$$E = -50; 50 \Rightarrow 14x+y$$

$$E = -148; 146$$

$$7 \cdot (-14) + (-62) = -160$$

$$4x-3y + 3x-4y$$

$$(x-7y)$$

$$4x+3y - 3x+4y =$$

$$x+7y$$

$$7(2x+y)$$

$$4x-3y+3x-4y = 7(x-y)$$

$$4x-3y = 6$$

$$-3x+4y = -8$$

$$4x-3y = 6$$

$$4y-3x = -8$$

$$2x+y = -14$$

$$4(-14-y) - 3y = -$$

$$-42 - 4y - 3y = -6$$

$$-42 - 7y = -6$$

$$42 + 7y = 6$$

$$y = -\frac{36}{7} = -5\frac{1}{7} \Rightarrow x = -8\frac{6}{7} = -8\frac{6}{7}$$

$$7x+7y$$

$$8x+14y$$

$$9x+7y$$

$$10x+0y$$

$$11x-7y$$

$$12x+0y$$

$$13x+7y$$

$$14x-7y$$

$$15x+0y$$

$$7(x+y) + 3,5(x+y-x-y)$$

$$4x-3y-3x-y$$

$$x-7y$$

$$x+7y$$

$$-62$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = mn(m+n+3)$$

$m-n$ и $m-n+9$ одно из чисел: 13

рассмотрим 2 случая

$$A = 13p^2, B = 3q^2$$

$$A = 3q^2, B = 13p^2$$

$$A = 13p^2$$

$$B = 3q^2$$

если $m-n \equiv 3$, то $m-n+9 \equiv 3 \Rightarrow$

$$13p^2 : 3 \Rightarrow p = 3$$

$$\Rightarrow 13p^2 = 117 = 3 \cdot 49$$

$$147 = 7 \cdot 21$$

~~$$3q = 3 \cdot 13$$~~

~~$$3q = 1 \cdot 39$$~~

$$117 = 9 \cdot 13 = 3 \cdot 39 = 117 \cdot 1 \text{ не т. р-ий. } mn = 21$$

$$A = 3q^2$$

остатки от деления

значит $m-n$ или $m-n+9 \equiv 3$

если $m-n \equiv 3$ то $\Rightarrow 3q^2$ содержит 3 в степени

$$3 \Rightarrow q = 3$$

$$(m-n)(m-n+9) = 27$$

$$3 \cdot 9$$

$$27 \cdot 1$$

$(m-n)(m-n+9)$
разный множитель

значит
решая

$$13p^2 = 52$$

$$13 \cdot 4$$

$$m-n = 4$$

$$B =$$

$$3q^2 = 7 \cdot 21$$

значит $mn = 3$

743



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

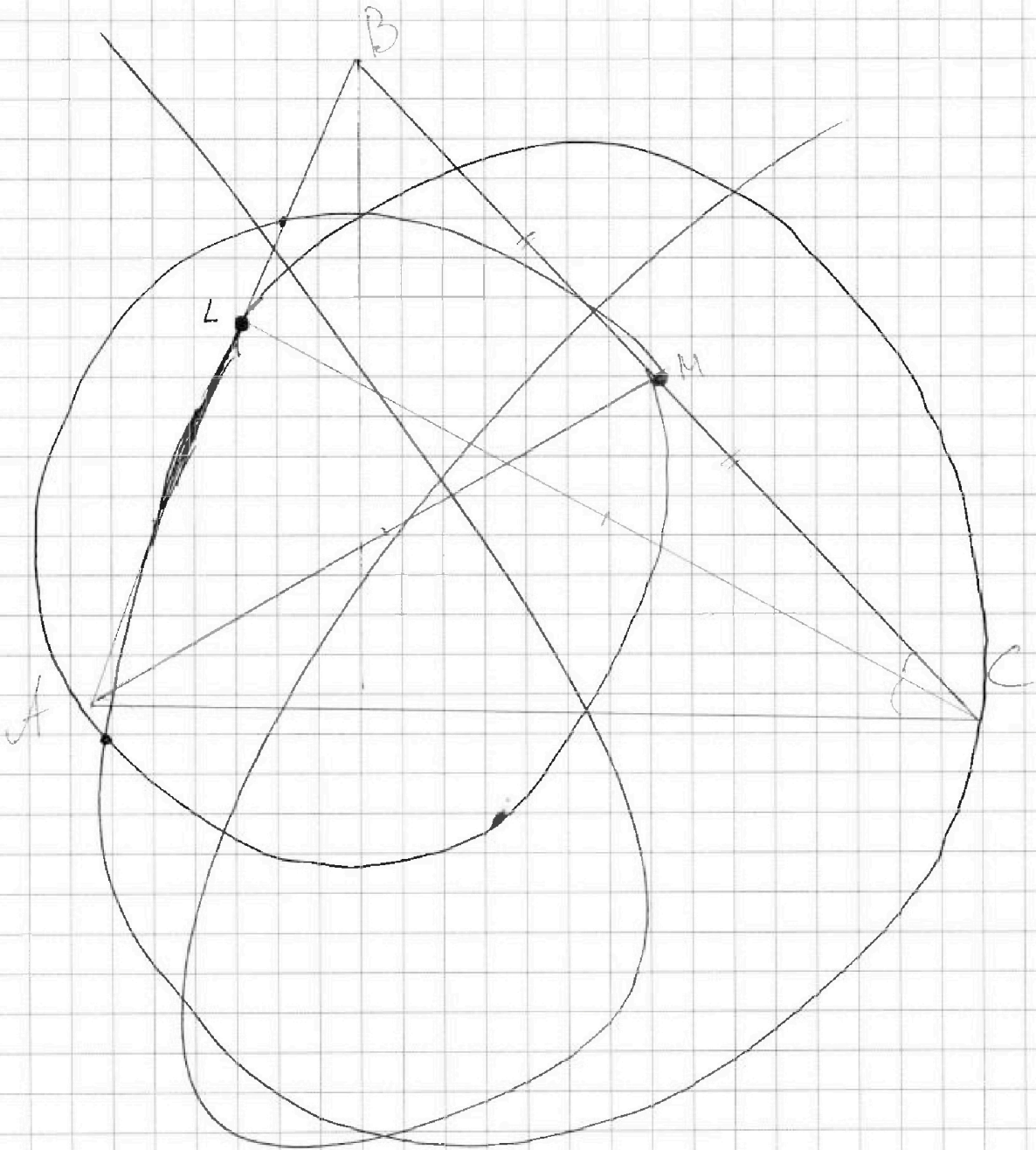
6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





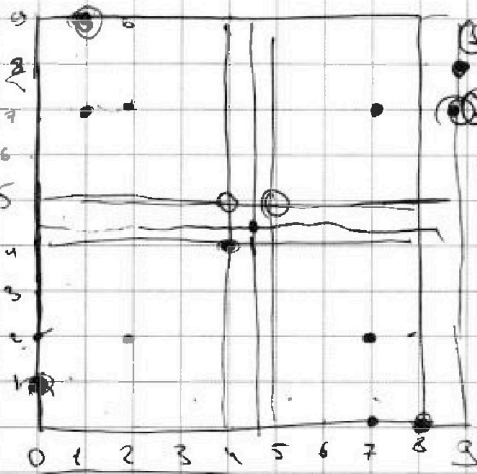
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

100
узлов

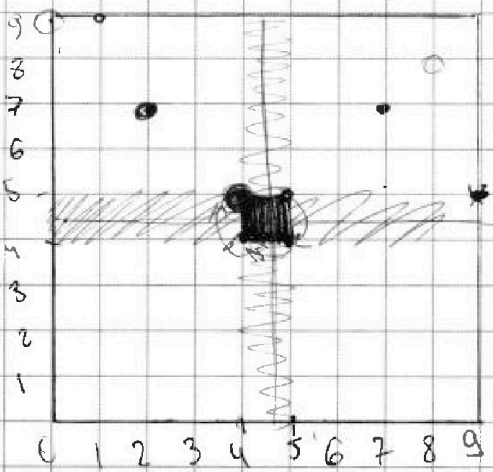


① центральная не имеет пометки
 ② сетчатые имеют пометку
 Алгоритм
 Выбираем точку, краем центральной
 ищем вторую точку
 99 вариантов делим на 4
 получаем 99:98. Делим на 4
 т.к. 4 одинаковых пары получаем

$5,9 \rightarrow 9,8 \rightarrow 8,0 \rightarrow 0,1$

$\frac{100 \cdot 99}{4} = 25 \cdot 99$ (и все?)

есть ли макс?



$1,9 \rightarrow 9,8 \rightarrow 8,0 \rightarrow 0,1$
 $0,0 \rightarrow 0,9 \rightarrow 9,9 \rightarrow 9,0$
 $x, y \rightarrow y, (9-x) \rightarrow (9-x), (9-x) \rightarrow (9-x), (9-x)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} \\ 4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + 5\sqrt{y} + y \end{cases}$$

$$(x+6)(5-y) = 5x - xy + 30 - 6y$$

$$0 \leq y \leq 5 \quad x \geq -6$$

$$y \in [0; 5] \quad x \in [0; 30]$$

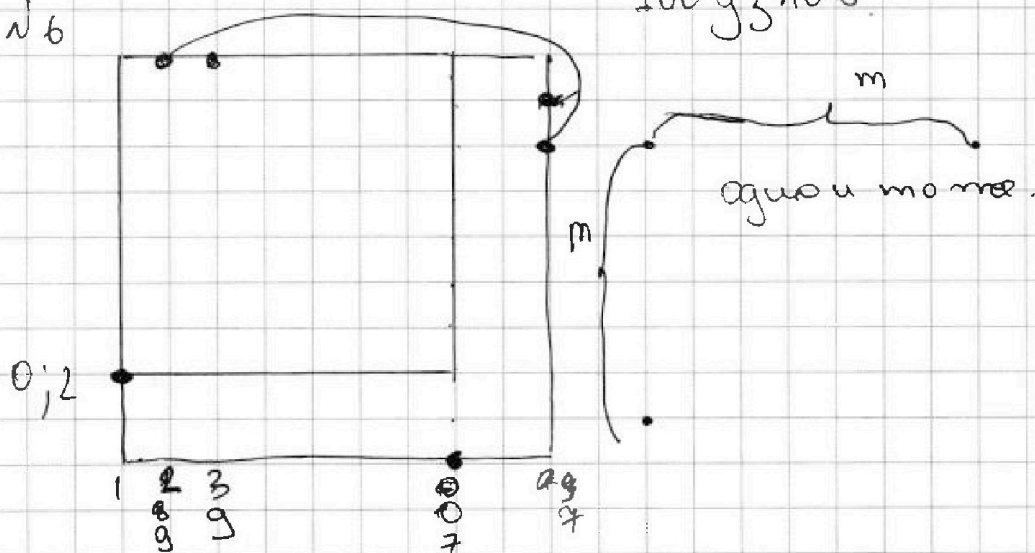
$$x+6+5-y+5 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} - 10\sqrt{5-y} + 10\sqrt{x+6} = 4 \cdot 30 - 4x - 4y^2$$

$$x-y+36 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} - 10\sqrt{5-y} + 10\sqrt{x+6} - 4x - 4y^2 = 120$$

$$5x - y + \frac{x^2}{4y^2} - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} - 10\sqrt{5-y} + 10\sqrt{x+6} = 84$$

$$4(x^2 - y^2)(x+y)(x^2 + y^2) + (x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$$

№6



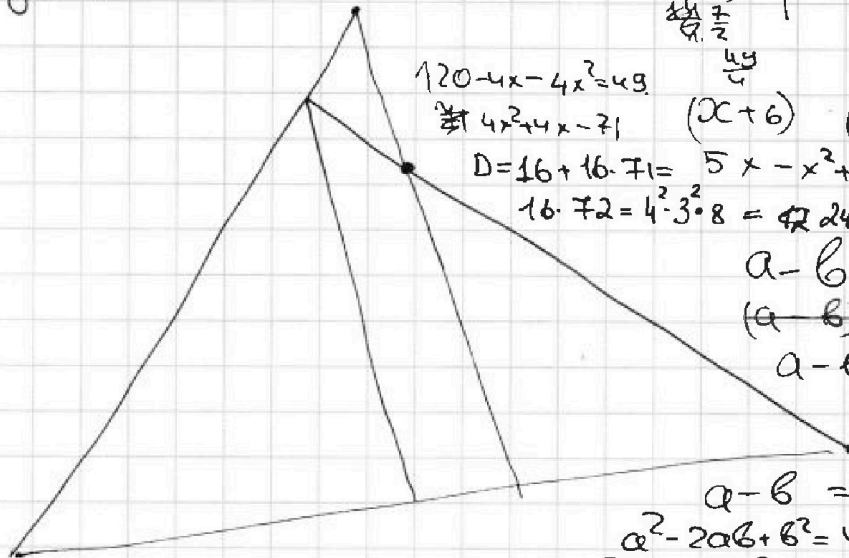


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



$$30 - x - x^2 = (3,5)^2 \quad | \cdot 4$$

$$120 - 4x - 4x^2 = 49$$

$$4x^2 + 4x - 71$$

$$(x+6)$$

$$(5-x)$$

$$x_1 = \frac{4 + 24\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$D = 16 + 16 \cdot 71 = 5x - x^2 + 30 - 6x^2$$

$$16 \cdot 71 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 8 = 2402$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$(a - b)^2 + 5 = 0$$

$$a - b - 2ab + 5 = 0$$

$$a - b = 2ab - 5$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 20ab + 25$$

$$a^2 + 18ab + b^2 = 4a^2b^2 + 25$$

№5

ODЗ $y \in [0; 5]$

$x \in [0; 30]$

Треугольники $y \neq x$

Поэтому пусть $y > x > 0$

Значит $4x^4 + x + 5\sqrt{x} = 4y^4 + 5\sqrt{y}y$

Значит $x = y$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

Решить

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$x+6 + 18ab + 5-x = 4(30-x-x^2) + 25$$

$$11 + 18ab = 4a^2b^2 + 25$$

$$4a^2b^2 - 18ab + 14 = 0$$

$$2a^2b^2 - 9ab + 7 = 0$$

$$D = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{cases} a = x+6 \\ b = 5-x \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 b_1 = \frac{9+5}{4} = 3,5 \\ a_2 b_2 = 1 \end{cases}$$

$$x+6 + 5-x + 25 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - 10\sqrt{5-x} + 10\sqrt{x+6} = 4\sqrt{30-x-x^2}$$

$$36 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} - 10\sqrt{5-x} + 10\sqrt{x+6} = 2(30-x-x^2)$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$18 - ab - 10b + 10a = 60 - x - x^2$$

~~10a - 10b~~

$$30 - x - x^2 = 1 \quad x_2 \text{ не цел}$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$D = 1 + 29 \cdot 4 = 117 = 3\sqrt{13}$$

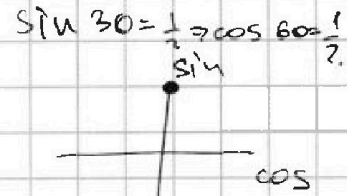
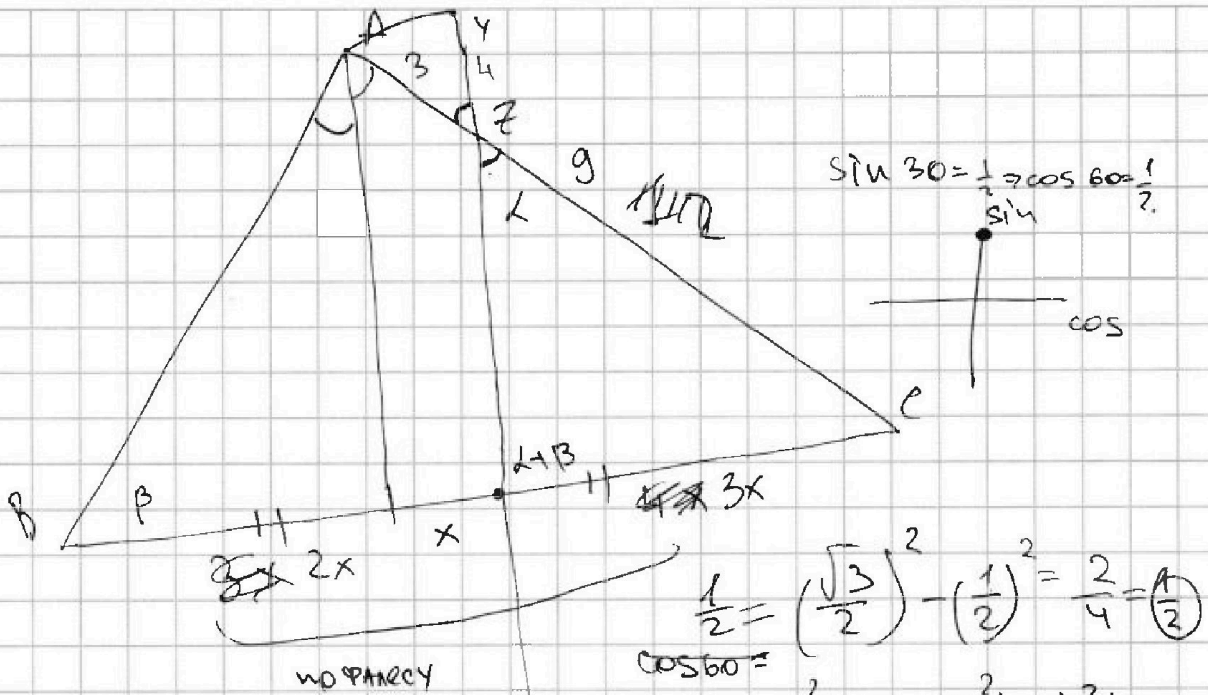


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



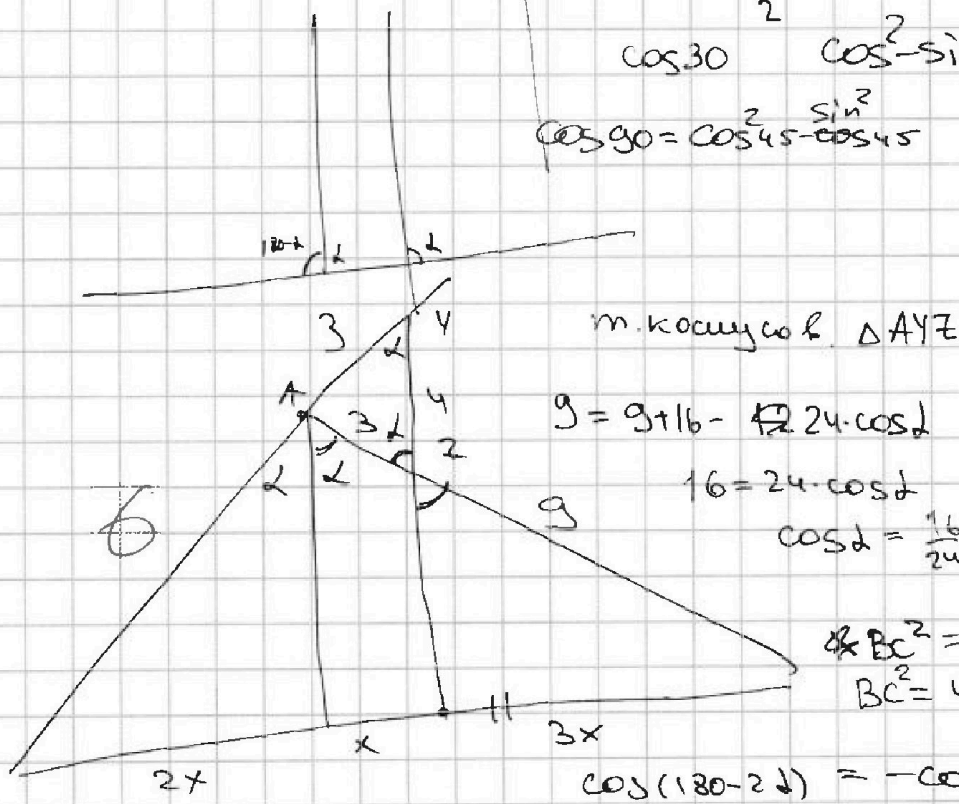
$$\sin 30 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos 2\alpha$$

$$\cos 30 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\cos 90 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



$$g = g + 16 - 2 \cdot 24 \cdot \cos \alpha$$

$$16 = 24 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$BC^2 = 36 + 81 + 108 \cdot \frac{2}{3}$$

$$BC^2 = 48 + 81 = 129$$

$$\cos(180 - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$$

$$16 = 18 - 18 \cdot \cos(180 - 2\alpha) \Rightarrow \cos(180 - 2\alpha) = \frac{2}{18} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{2}{18}$$