



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 4t^2 - 4 = 0$$

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2$$

т. к. коэффициент a — данного
~~и~~ многочлена второй степени
 равен 1, то b — коэффициент c —
 произведение корней, так как
 значит из условия коэффициент
 c — положительный

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$D \geq 0$$

$$16 - 4t^2 \geq 0$$

$$-4(t-2)(t+2) \geq 0 \\ t \in (-2; 2)$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$4(t-1)(t+1) > 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

возьмем пересечение: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15)$$

т.к. ~~сумма~~ a и $b \in \mathbb{N}$, то их разность

по модулю не больше суммы

и при этом либо $a-b : 17$, либо

$a-b+15 : 17$ и тем же не равняется 0

Рассмотрим все случаи:

$$1. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-34 \end{cases}$$

$$a=3$$

$$b=37$$

$$2. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-17 \end{cases}$$

a - не натуральное a - не натуральное

$$3. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=17 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b=34 \end{cases}$$

$$a=37$$

$$b=3$$

$$5. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=-17 \end{cases}$$

$$a=4$$

$$b=36$$

$$6. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=17 \end{cases}$$

$$a=21$$

$$b=19$$

$$7. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=34 \end{cases}$$

a - не натуральное

$$8. \begin{cases} a+b=40 \\ a-b+15=51 \end{cases}$$

$$a=38$$

$$b=2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Варианты 14, 6, 8 не подходят

по условию $(a-b)(a-b+15) = 17p^5$,

где p - некое простое число,

подходит вариант ~~4~~ 5:

$$(a-b)(a-b+15) = (1-36)(4-36+15) =$$

$$= -32 \cdot (-14) = 32 \cdot 14 = 2^5 \cdot 14$$

Ответ: 4, 36



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

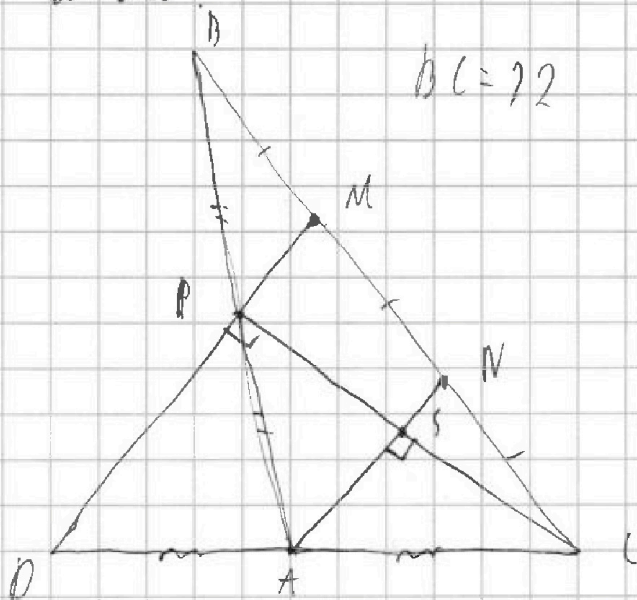
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:



$$BC = 12$$

$$AB = AC$$

Найти:

$\angle B$

Решение:

по теор. Фалеса

$$BP = PA \quad \text{и} \quad AN = NC$$

\Downarrow

$$AB = AC$$

$$0,5 AB = 0,5 AC$$

\Downarrow

$$AP = AN = AP$$

\Downarrow

$\triangle APC$ - прямоуголь-

ный.

т. к. $NA \parallel PM$, то $\angle ASC = \angle APC$

$$= 90^\circ$$

$\triangle CAP$ равноб. $\Rightarrow AS$ перпен-

дикулярна $\Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$

теперь распишем теорему косинусов в

$\triangle ABC$:

если обозначим AC за x , то:

$$12^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x \cdot 2x$$

$$144 = 6x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 = 144$$

$$x^2 = 24$$

$$x = 2\sqrt{6}$$

$$AB = 2x = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если взять такую рассадку, то в каждом ряду рост должен идти в порядке возрастания, причем ^{причем} в двух рядах 3 человека, а в одном 2 человека.

Если мы разобьем всею людей на одну пару и две тройки, то рассадка в порядке возрастания будет единственной, но так же мы ~~то же можем выбрать пустую пару при помощи~~ ~~способов $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 3$~~

~~Ответ: $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 3$~~

так же вариантов рассадки тройку будет 4 т.к. есть еще пустая пара. ^{значит} ~~способов всего $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 4$ Ответ: $\binom{2}{3} \cdot \binom{3}{6} \cdot 4$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выбрать пару букв можно 3 способами и ещё можно переставлять ряды с 3 способами 2 способами, значит для пары и букв троек перестановок $2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$

↓ 4

Всего способов $\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{6} \cdot 4!$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Остальные деревья не могут
быть соединены между собой т.к.
может только две эти деревья
будут образовывать компонент
связности \Rightarrow граф не будет
связным. Также же не
может быть циклов т.к.
существует единственный
путь между любыми двумя
деревьями, значит граф
графа - дерево, значит
между любыми деревьями
1 условие построено 3 дерева
значит всего деревьев: $(3+4+5+7)-3$
 $(3+4+5+7)-6+4=17$ деревьев
Ответ: 17 деревьев

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. ~~$x, y \in \mathbb{N}$~~ и $x, y \in \mathbb{Z}$, то

поискоренные выражения так же
целые, значит одно поискоренное
выражение должно равняться 0,
и другое 1, составим систему:

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - |x + y - 2| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$x = -y + 2$$

подставим в первое уравнение:

$$2(-y + 2) + 2y - (-y + 2)^2 - y^2 = 0$$

$$y + 2 - (y^2 - 4y + 4) - y^2 = 0$$

$$-2y^2 + 5y - 2 = 0$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\cancel{y_1 = -2}$$

$$\cancel{y_2 = \frac{1}{2}} \text{ не целое}$$

$$\cancel{y = 2 \Rightarrow x = -2 + 2 = 0}$$

~~Вторая система:~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(-y+2) + 2y - (-y+2)^2 = y^2 = 0$$

$$4 - (y^2 - 4y + 4) - y^2 = 0$$

$$-2y^2 + 4y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 2$$

$$x_1 = -0 + 2 = 2$$

$$x_2 = -2 + 2 = 0$$

Вторая система:

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 = |x + y - 2| = 0 \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ x = 3 - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ x = 1 - y \end{cases}$$

$$1. 2(3-y) + 2y - (3-y)^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$6 - (y^2 - 6y + 9) - y^2 - 1 = 0$$

$$-2y^2 + 6y - 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$y_2 = 2 \quad x_2 = 3 - 2 = 1$$

$$2. \quad 2(1-y) + 2y - (1-y)^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$2 - (y^2 - 2y + 1) - y^2 - 1 = 0$$

$$-2y^2 + 2y = 0$$

$$y^2 - y = 0$$

$$~~y_1 = 0 \quad x_1 = 1~~ \quad y_1 = 0 \quad x_1 = 1$$

$$~~y_2 = -1 \quad x_2 = 2~~ \quad y_2 = 1 \quad x_2 = 0$$

Ответ: $(2; 0), (0; 2), (1; 2), (2; 1),$
 $(0; 1), (1; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b+15)(a-b)$$

предположим, что $a-b$ и $a-b+15$: p

тогда ~~каждый~~ 15 : p и так же

для $a-b$ либо простое, либо

кроме p делится только на 17 ,

значит есть такие варианты:

$$a-b=5 \Rightarrow a-b+15=20 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=3 \Rightarrow a-b+15=18 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=5 \cdot 17=85 \Rightarrow a-b+15=100 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=3 \cdot 17=51 \Rightarrow a-b+15=66 \text{ - не подходит}$$

$$a-b=-5 \Rightarrow a-b+15=10$$

$$a-b=-3 \Rightarrow a-b+15=12$$

$$a-b$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

$$2x+2y-x^2-y^2=1$$

$$|x+y-2|=1$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = -1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 1$$

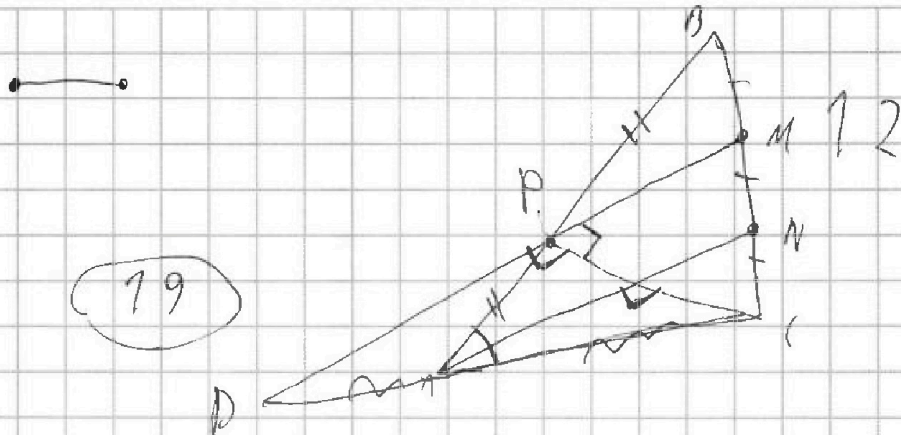


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



6

3

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

$$x + y - 2 \leq 1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2$$

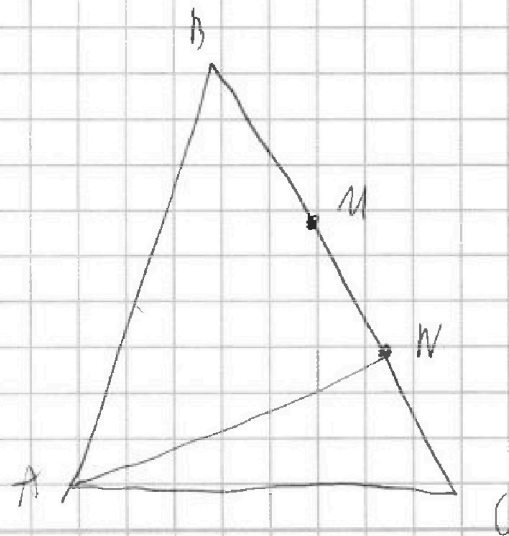
$$x + y \leq 3$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

~~$x^2 + y^2$~~

xy

$$x^2 + y^2 \vee 2x + 2y$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

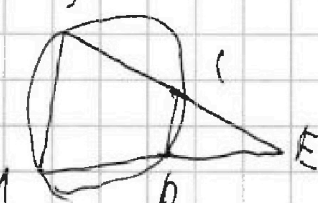
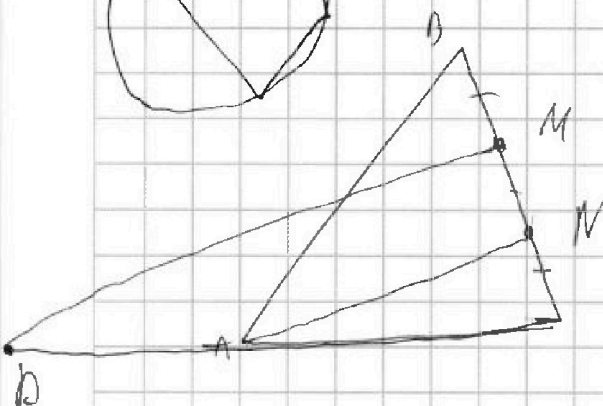
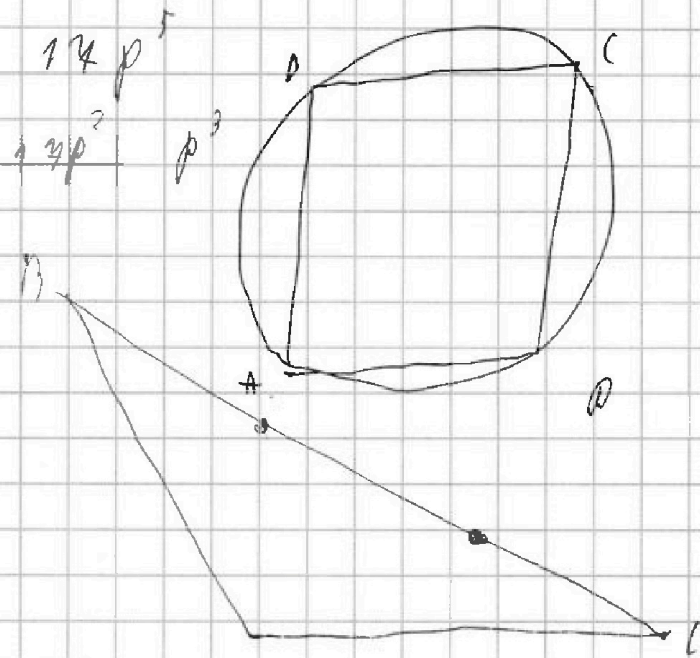
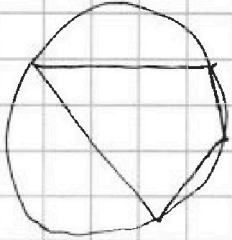
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

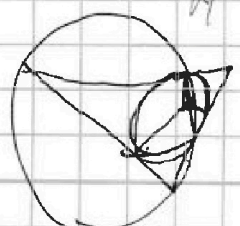
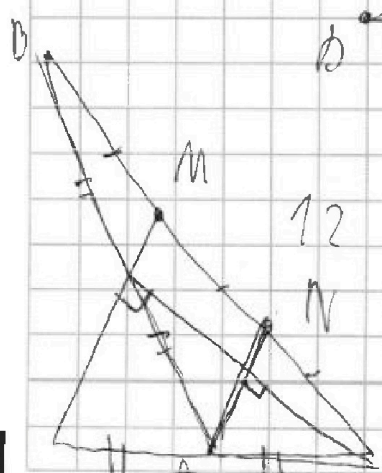
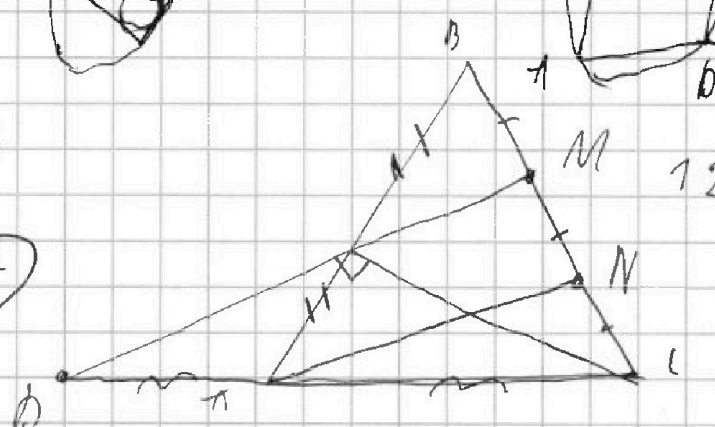
$$a + b = 4a$$

$$a - b = k$$

$$a = \frac{4a + k}{2}$$



~~172~~



$$174 = 4a^2 + a^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a^2 =$$

$$= 6a^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle (AN) x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4$$

1 3 5 7 11 13
17 51 85 119

$$12t^2 - 4(4t^2 - 4) = 2$$

$$= -4t^2 + 16$$

$$119 \cdot 134 - 4t^2 + 16 > 0$$

$$68 \cdot 89 \quad 4t^2 - 4 > 0$$

85

$$4t^2 - 16 < 0$$

102 · 114 68

$$4(t-2)(t+2) < 0$$

51 · 64

17 · 32

$$(-2; 2)$$

51

34 · 49

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b)$$

$$(a-b+15)/(a-b) \Rightarrow 17 \text{ p } 5$$

$$a+b = 40$$

$$a+b = 40$$

$$a-b = 14$$

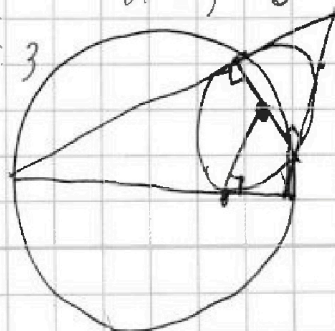
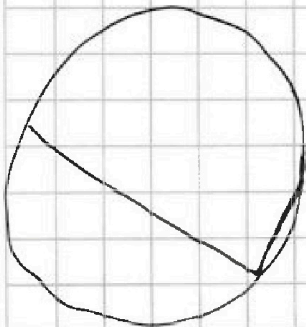
$$a-b = -34$$

$$a-b = 34$$

$$a = 3 \quad b = 4$$

$$a = 34 \quad b = 3$$

$$34 + 15 = 49$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1		
	3	6
	1	4
	2	5

	2
1	

~~$\binom{2}{9} \cdot \binom{3}{4} \cdot 3$~~

$$\binom{2}{8} \cdot \binom{3}{6}$$

$$\binom{3}{8} \cdot \binom{2}{5}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

