



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow D > 0$$

$$\frac{D}{4} = 40(2\sqrt{2}t)^2 - 9(t^2 - 9) = 8t^2 - 9t^2 + 9 = 9 - t^2 > 0$$

$$x = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2} \quad (\text{п.к. } 9-t^2 > 0, \text{ } x \text{ действительна}) \quad t \in (-3, 3)$$

$$x_1, x_2 > 0$$

$$x_1, x_2 = 9t^2 - 9 \quad \text{из условия}$$

$$9(t^2 - 1) > 0 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} t \in (-3, 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \in (-3; -1) \cup (1; 3) \quad \text{Ответ:}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^7 \Rightarrow (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b+3) = 19p^7; \quad \div p^7$$

$$a - b = 12 \Rightarrow a + b = 2b + 12$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^7$$

$$\begin{matrix} 2b+12 = \div 2 \\ = 2(b+6) \end{matrix} \Rightarrow 19p^7 = 2 \overset{19 \times 2}{\Rightarrow} p^7 = 2 \overset{\text{простое}}{\Rightarrow} p = 2 \Rightarrow p = 2$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 2^7 = 16 \cdot 19 \quad a$$

$$2b+15 = 2(b+7) + 1 \cdot 2 \Rightarrow (2b+12) = 16$$

н.к. 19 - простое, и $2b+15 > 12$, если $(2b+12) = 19$, $(2b+15)$ не простое.

Аналогично ни одного простого делителя нет у $(2b+12)/(2b+15)$, следовательно,

$$\Rightarrow (2b+12) = 16 \Rightarrow 2b+12 = 16; \quad 2b+15 = 19$$

$$\Rightarrow b = \frac{16-12}{2} = 2 \Rightarrow a = 2+12 = 14$$

Ответ: $a = 14; b = 2$

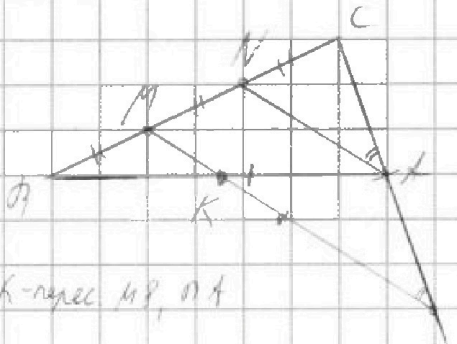


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BM = MN = NC; M, N \in BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{3}$$

$$AB = CA \quad MS \parallel NA$$

$$BC = 6$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4} \quad \text{[Значение #13]}$$

K-центр MS, NA

$MS \parallel NA, MN = NC \Rightarrow NK$ - сред. линия $\triangle MSN \rightarrow \triangle MSN \sim \triangle NKC$
 $\Rightarrow \angle CKN = \angle MSN$

$$MK - \text{ср. линия } \triangle MSN \Rightarrow BK = KN = CL = AP = \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow \angle KAP = \frac{1}{2}(\text{угн } A) \Rightarrow \angle PKL = \angle LPK \Rightarrow \triangle KAP \sim \triangle LPK \Rightarrow \angle KAP = 2\angle CAN$$

теор. кос / $\triangle KAP$

$$KP^2 = 2 \frac{AB^2}{4} - 2 \frac{AB^2}{4} \cos(90^\circ - 2\angle CAN) =$$

$$= \frac{AB^2}{2} (1 + \cos(2\angle CAN)) = \frac{AB^2}{2} (1 - \frac{3}{4}) = \frac{AB^2}{8} \quad KP = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos(2\angle CAN) = 1 - 2\sin^2(\angle CAN)$$

$$\frac{3}{4} = 1 - 2\sin^2(\angle CAN) \Rightarrow \cos^2(\angle CAN) = 1 - \frac{1 - \frac{3}{4}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\cos(2\angle CAN)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cos(\angle CAN) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

теор. кос / $\triangle BAE$ / $\triangle NAK$

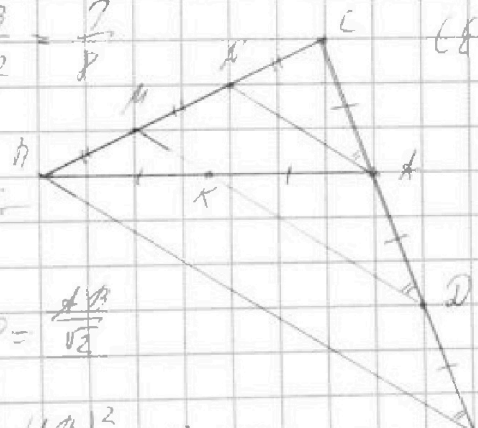
проведем $BE \parallel NA; E \in CD$

$$\triangle BAE \sim \triangle NAK \Rightarrow BE = 2KN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

теор. кос / $\triangle BCE$: $BC^2 = (\frac{3}{2}AB)^2 + (\frac{AB}{\sqrt{2}})^2 + AB^2 (\frac{3}{\sqrt{2}} \cos(\angle CAN))$

$$\frac{AB^2}{2} (\frac{9}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = AB^2 (2,5 + \frac{3}{8}) = AB^2 \cdot \frac{23}{8} = BC^2 = 6^2 = 36$$

$$AB^2 = \frac{36}{\frac{23}{8}} = \frac{36 \cdot 8}{23} = \frac{288}{23} \Rightarrow AB = \frac{3}{5} \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad \text{[Оконч.]}$$





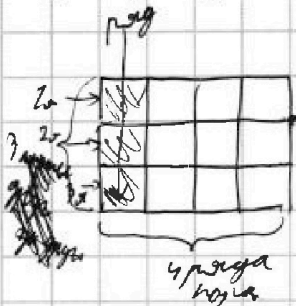
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. все угелки разного роста, тернал. обшук. отсорти-
руем их по росту и позовем это "1" самого низкого
"7", следующего "2" и т.д.



Всего $3 \cdot 3 = 9$ мест

$9 - 1 = 8 \Rightarrow$ парковка свободна всего 8-а места \Rightarrow
параллельно с 3 ряда паркт, параллельно
параллельно позовем их парковыми.

пусть x

каждым рассаживаем угелков парками и парками

пусть

если выберем 3 угелка, которые будут сидеть
на парке, их рассадка относительно стна. низчайший
за 1-й партой, средний за 2-й, вычайший за 3-й

\Rightarrow так-то сд заполняем сдмй кевый парковой ряд
 C_{11}^3 (способы выбрать 3 угелка из 11)

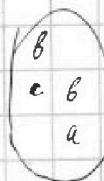
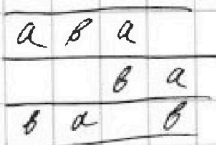
сдмй следующий парковой - C_8^3 (так при фиксации парковой
1-й парке

$$9 \cdot 6 - C_5^3 \Rightarrow \text{сумма } C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{11!}{3!(11-3)!} \cdot \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} =$$

$$= \frac{11!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!}$$

при выбранной запаркем все парковые рядов
остается 2 угелка, находящиеся на парковой -
так a, b ($a < b$)

сумма 4 способа



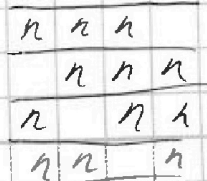
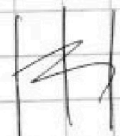
отражаются м.к.
перед и после сидят
угелки роста a, b, a

на рассаживать на
оставшийся парке:

\Rightarrow всего в 4-х раз больше способов рас-
сады угелков, a / b / a не порядке парке!

$$\frac{11!}{(3!)^3 \cdot 2!} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 11!}{(3!)^3}$$

сумма C_9^3 в парке рассаживать парковые рядов:



$$\Rightarrow \text{всего } \frac{2 \cdot 11!}{3!^3} \cdot 4 = \frac{11!}{3!^3} \text{ ответ } \frac{11!}{24}$$

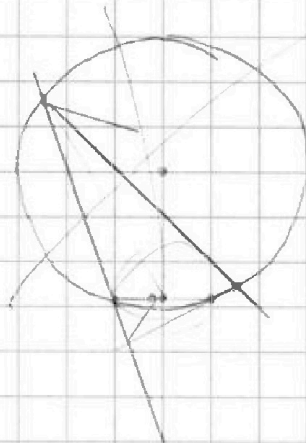
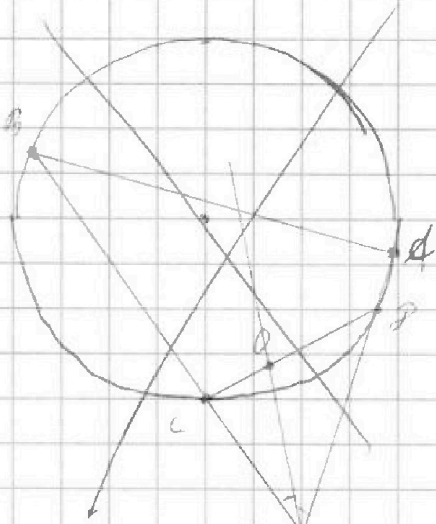


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

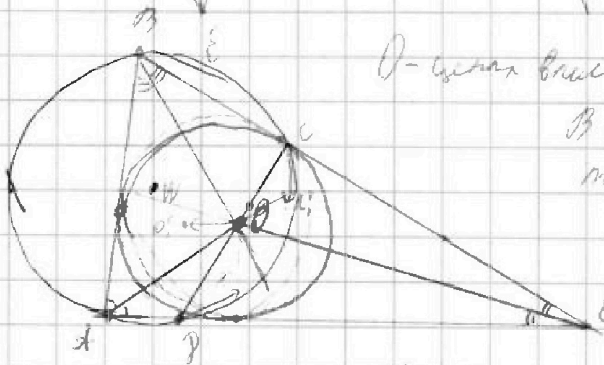
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



U-34. Крестиком
отметить номер задачи
и номер страницы



O - центр окружности \Rightarrow $AO = BO = CO = RO$
 $BE = 72$ $AO = BO = CO = RO$
 $\max (PE + PO)$

$$\vec{EO} = \vec{EP} + \vec{PO} = \vec{EP} + \vec{CO}$$

Решение задачи 1, 2 и 3

сделан O центр окружности \Rightarrow $AO = BO = CO = RO$

$\angle APO, \angle BPO \Rightarrow \angle C, \angle D$ \Rightarrow $\angle C, \angle D$ \Rightarrow $\angle C, \angle D$

$\angle B, \angle D, \angle C, \angle A$

\Rightarrow $\angle C, \angle D$ \Rightarrow $\angle C, \angle D$

иначе если сделан O центр PC ,

все в $\triangle PO, \triangle PO, \triangle PO$ \Rightarrow $\angle C, \angle D$

\Rightarrow $\angle C, \angle D$

от PC и $\triangle PO$ \Rightarrow $\angle C, \angle D$

\Rightarrow $\angle C, \angle D$ \Rightarrow $\angle C, \angle D$

(далее - углы PC)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть всего n деревьев

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой, значит, вершины которого - деревни, а ребра - дороги (или соединенные между собой дерев. если * перекресток через другие деревни дороги) связный

т.к. из любой деревни можно добраться до любой другой n -м способом, в Γ нет циклов $\Rightarrow \Gamma$ - дерево.

в дереве n вершин $n-1$ ребер

\Rightarrow $5+6+7+9+(n-4)$ $n-4$ деревень, с которыми соединит 1-ая деревня дорога

$$\frac{5+6+7+9+(n-4)}{2} = n-1 \quad (\text{каждой вершине есть удв. число ребер})$$

$$23+n = 2n-2$$

$$23+n = 2n-2$$

$$25 = n$$

Ответ: на ветловке 27 деревень всего: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2(x-2y-x^2-y^2)} + \sqrt{7-|x-y-1|} = 2 \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in \mathbb{Z}$$

логар. бор. $\geq 0 \Rightarrow |x-y-1| \leq 1; 2x \geq 2y+x^2+y^2$

$$7-|x-y-1| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{7-|x-y-1|} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \geq 2-1=1$$

$$|x-y-1| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y-1 \leq 1 \Rightarrow x-y \leq 2 \\ x-y-1 \geq -1 \Rightarrow x-y \geq 0 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in \{0, 1, 2\}$$

пусть

$$x-y=0$$

$$x=y$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{7-|x-y-1|} = \underbrace{\sqrt{-2x^2}}_{\text{невозм}} + \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$$

пусть $x-y=1$

$$x=y+1$$

$$\sqrt{2(y+1)-2y-(y+1)^2-y^2} + \sqrt{7-|1-1|} = \sqrt{2y+2-2y-y^2-2y-7-y^2} + \sqrt{7} =$$

$$= \sqrt{-2y^2-2y+1} + 7 = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-2y+1} = 7$$

$$-2y^2-2y+1 = 49$$

$$-2y(y+1) = 48$$

$$y = 0; -7$$

$$x = 1; 0$$

пусть $x-y=2$

$$x=2+y$$

$$\sqrt{2(y+2)-2y-(y+2)^2-y^2} + \sqrt{0} = \sqrt{4-2y^2-4y-4} = \sqrt{-2y(y+2)} = 2$$

$$-2y(y+2) = 4$$

$$-2y^2-4y-4 = 0$$

$$y^2+y+2 = 0$$

$$D = 1-4 = -3 < 0 \Rightarrow \text{корней } y \text{ нет} \Rightarrow$$

случай $x-y=2$ невозможен

$$\text{Ответ: } (x, y) \in \{(0, -1); (1, 0)\}$$

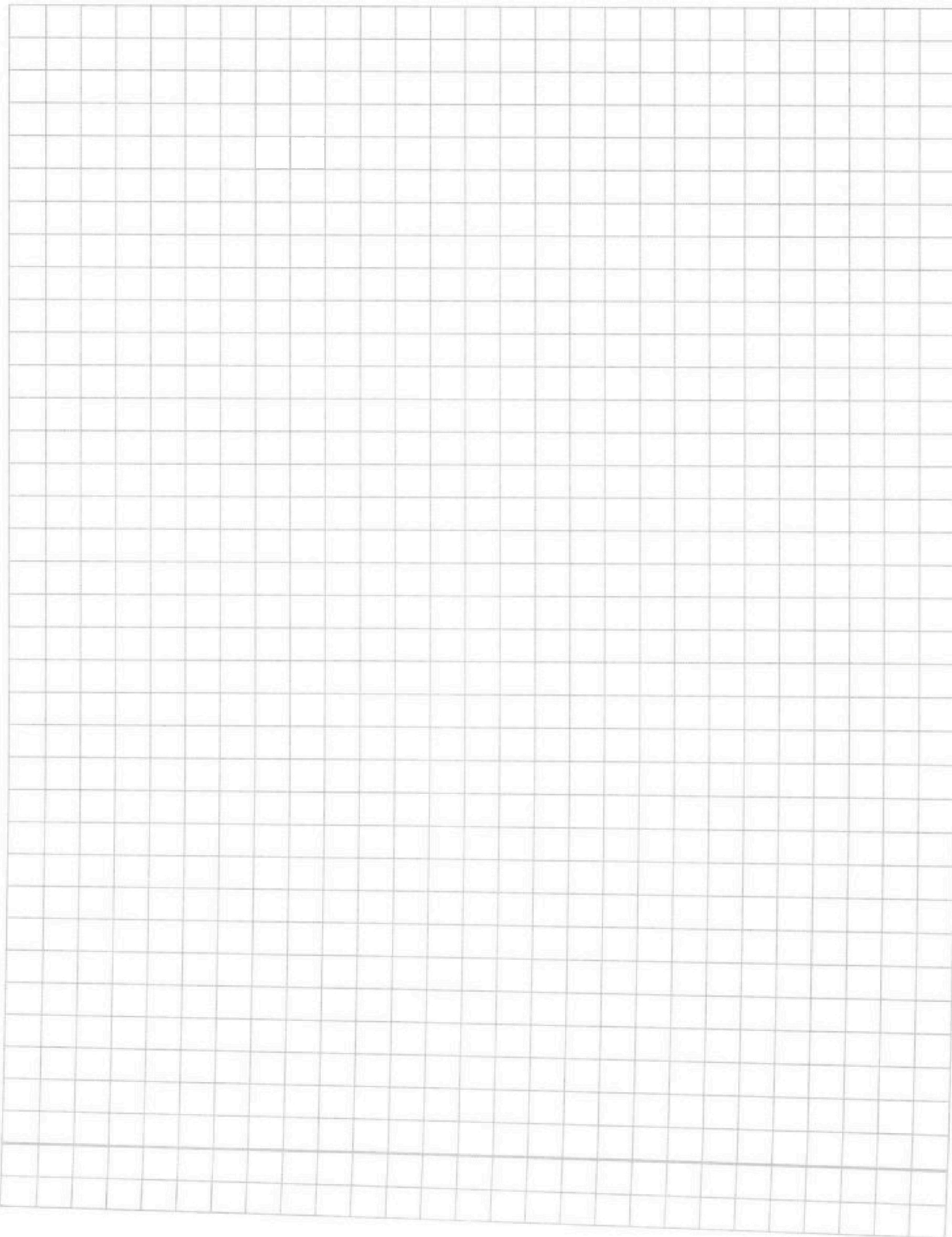


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k:$

$a_1: k-2 \cos$
 $a_2: k, 2k \cos k - a_1 - 1$
 $a_3: k \cos k - k - a_2$

$x/(2-x) - y/(2+y)$
 $2x+2y - (x+y)^2 + 2xy$
 $x/(2+y) - y/(2-x) - (x+y)^2 > 0$

$9^2 + 9^2 + 9 = 0$
 $9 \frac{1}{4} = 76 - 9 =$

$3^2 = \frac{2 \cdot 28}{9}$
 $5+8+7+9 =$
 $= 71+9+7+227$

$\sqrt{2-7+}$
 $\sqrt{2-8+7} + \sqrt{1-1+4} = 2$
 $+ \sqrt{7-11-1} = 2$

$AC = 6$
 $\cos \angle B_2(C, A, D) =$
 $\cos \angle B_2(C, A, D) = \cos \angle B_2(C, A, D)$

$180 - 2 \angle C'AD$
 $AE^2 = 2AD^2 - 2BD^2 \cos(180-2\alpha) =$
 $= 2AD^2 \left(7 - \frac{3}{4}\right) = \frac{2AD^2}{4}$
 $BE = \frac{AD}{2}$
 $DC^2 = BE^2 + 0,25 AD^2 =$

$\cos 2k = -\frac{3}{4} = 7 - 2 \sin^2 k$
 $2 \sin^2 k = \frac{7}{4}$
 $\sin^2 k = \frac{3,5}{4}$
 $\sin k = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\cos^2 k = 7 - \sin^2 k = \frac{7}{4}$
 $\cos k = \frac{\sqrt{7}}{2}$
 $\tan 2k = \frac{2 \sin k \cos k}{1 - \cos^2 k} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{1 - \frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2}$

$\frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$1,7 \cdot 2k = \frac{7 - \cos 2k}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

