



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAM) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 =$$

$$D = 12t^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

$$x_1 x_2 = 4t^2 - 4 > 0$$

$$12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$-4t^2 + 16 > 0 \quad | : (-4)$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$4t^2 - 16 < 0 \quad | : 4$$

$$(t-2)(t+2) < 0$$

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$a+b=40$$

$$40-b=a$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5$$

$$(a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(40-2b)(40-2b+15) = 17p^5$$

$$:2 \Rightarrow 17p^5 : 2 \Rightarrow p^5 : 2 \Rightarrow p=2$$

$$a+b=40$$

$$(40-2b)(55-2b) = 17 \cdot 32$$

$$2200 - 80b - 110b + 4b^2 = 544$$

$$1656 - 190b + 4b^2 = 0$$

$$828 - 95b + 2b^2 = 0$$

$$2b^2 - 95b + 828 = 0$$

$$D = 9025 - 6624$$

$$D = 2401 = 49^2$$

$$b_{1,2} = \frac{95 \pm 49}{4}$$

$$b_1 = \frac{46}{4} \quad b \in \mathbb{N} \quad b_2 = 36 \Rightarrow a = 4$$

Ответ: $b=36; a=4$.

$a, b = ?$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 49 \\ \hline 349 \\ 152 \\ \hline 1962 \\ \hline 24019 \end{array}$$

17

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 55 \\ \hline 110 \\ 220 \\ \hline 2200 \\ \hline 32 \\ \times 17 \\ \hline 224 \\ \hline 32 \\ \times 17 \\ \hline 544 \\ \hline 2200 \\ \hline 544 \\ \hline 1656 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \overline{)828} \\ 16 \\ \hline 5 \\ \times 95 \\ \hline 475 \\ \hline 855 \\ \hline 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 95 \\ \hline 1475 \\ \hline 855 \\ \hline 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \overline{)1656} \\ 16 \\ \hline 5 \\ \times 95 \\ \hline 475 \\ \hline 855 \\ \hline 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 59 \\ \hline 369 \\ 206 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9025 \\ - 6624 \\ \hline 2401 \\ \hline 239 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ \hline 7 \end{array}$$



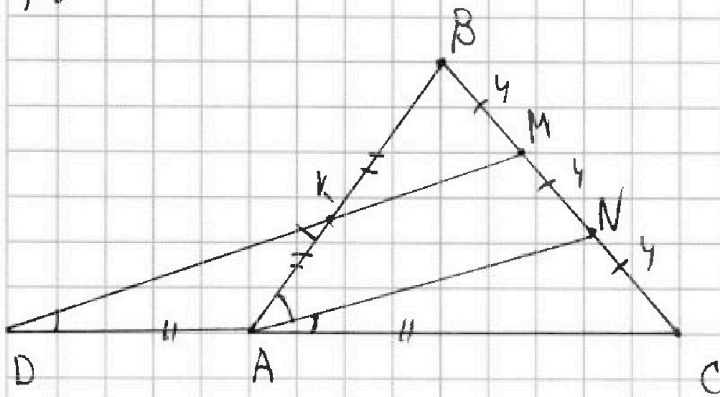
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3



Решение: т.к. $DM \parallel AN \Rightarrow$

① ~~В~~ $\triangle ABN$ по т. Фалеса

$$BK = KN = \frac{1}{2} AB$$

② $\triangle DMC$: по т. Фалеса:

$$DA = AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$$

$\triangle DAK$ равнобедрен \Rightarrow

$$\angle KDA = \angle DKA \text{ но}$$

$$\angle KDA = \angle CAN \text{ т.к. } NA \parallel DM \Rightarrow$$

$$\angle BMN = \angle DKA = \angle CAN$$

$\triangle ABC$ по т. кос:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 2(\angle CAN)$$

$$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 - 2AB \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$144 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} AB^2$$

$$144 = \frac{3}{2} AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{144 \cdot 2}{3}} = \sqrt{96}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{144 \cdot \frac{2}{3}} \\ \underline{24} \\ 24 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Заметим, что всегда 3 ряда заполнены учениками полностью.

Рассмотрим 1 ряд кол-во способов выбрать ученика на 1 из рядов: C_8^3

Эти выбранные 3 ученика будут одинаково рассаживаться

за каждый ряд. Т.к. выбираем н.б. 1 ряд из трех то $3 \cdot C_8^3$ - кол-во
способов выбрать 3-ех учеников и рассадить их за 1 из 3 рядов.

Рассмотрим оставшихся 5 человек. Для них $2 \cdot C_5^3$ - выбрать

3-их и рассадить за 1 из оставшихся 2 рядов.

Рассмотрим оставшихся 2 человека:

C_2^2 - выбрать 2 человека из 2. Теперь посмотрим как они могут

сидеть:

a_j	a_i	<input type="checkbox"/>	}	3 C_2^2 - кол-во способов выбрать оставшихся двух и рассадить
a_i	<input type="checkbox"/>	a_j		
<input type="checkbox"/>	a_i	a_j		

($a_j \geq a_i$ по росту)

на оставшихся ряд. Таким образом, всего способов:

~~$$3 \cdot C_8^3 + 2 \cdot C_5^3 + 3 \cdot C_2^2 = 191 \text{ способов.}$$~~

~~Ответ: 191 способ.~~

$$3 \cdot C_8^3 \cdot 2 \cdot C_5^3 \cdot 3 \cdot C_2^2 = 3$$

$$= 18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$$

Ответ: $18 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

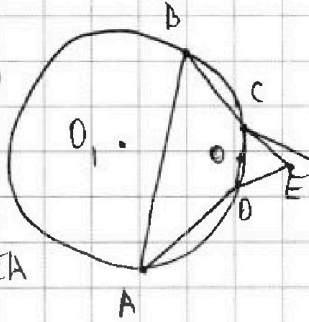
№5.

CD - диаметр

Окр-ти с ц. O. ⇒

как

CE = ED - касат. ⇒



Т.к. $EC \cdot EB = ED \cdot EA$

(ст. точки E относит. окр-ти с ц. O₁) ⇒

$EB = EA = 10$. ⇒ ABCD - равнобок. трапеция. ⇒ $CD \parallel AB$. ⇒

$\triangle CDE \sim \triangle ABE$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

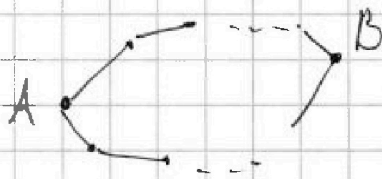
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. Введён граф, где вершины - деревни, а рёбра - дороги.

~~Ж~~. Заметим, что т.к. из каждого города можно попасть в любой другой, то этот граф связный, значит у него на n вершин хотя бы $n-1$ дорога. Допустим, что граф по условию должен быть деревом:

Допустим это не так, ~~значит~~ ~~раз~~ значит у него $\geq n$ дорог. ~~то~~ Тогда, в этом графе найдётся цикл:

а значит от деревни А в В можно пройти



2 способами?! Значит наш граф - дерево. Значит в нём как минимум две висячие вершины \Rightarrow Деревья ≥ 6 .

Всего пусть только 4 деревень, есть n , тогда:

$$\frac{19+n}{2} = n-1 \text{ - ребер.}$$

$$n=21$$

пусть всего n деревень \Rightarrow 4 деревни со степ. 3, 4, 5, 4 и $n-4$ со степ. верш 7. всего ребер: $n-1 = \frac{19+n-4}{2}$

$$2n-2 = 15+n$$

$$\boxed{n=17}$$

Ответ: 17.

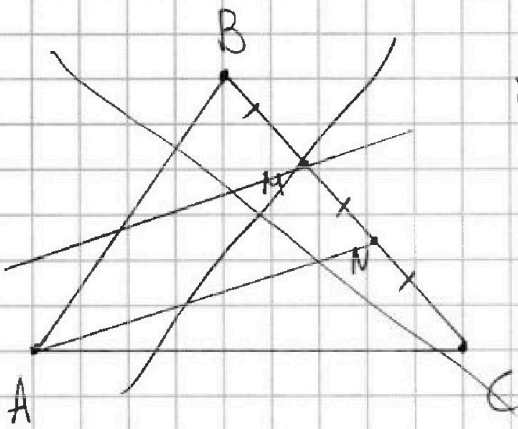


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\cos(2\alpha)$

$$3+4+5+7=$$

$$= 19$$

$$AB=CO$$

$$AB=?$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

Решение:

т.к. $DM \parallel AN$ то

$\triangle DMC$:

AN - ср. линия \Rightarrow

$$PA = AC = \frac{1}{2} AB$$

В $\triangle ABM$:

$$1) KM \parallel AN \quad (BM=MN) \Rightarrow AK=KB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle DAK - \text{равноб.}$$

$$\text{В } \triangle ANC: \text{ по т. кос: } NC^2 = AC^2 + AN^2 - 2AC \cdot AN \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$\text{В } \triangle DMC \text{ по т. Менелас: } \frac{KM}{DK} \cdot \frac{DA}{AC} \cdot \frac{CB}{BM} = 1$$

$$\frac{KM}{DK} = \frac{1}{3}, DK = 3KM \Rightarrow DK = \frac{3}{4} DM$$

$$\text{В } \triangle DAK \text{ по т. кос: } AK^2 = DA^2 + DK^2 - 2DA \cdot DK \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$DK = 2DA \cdot \cos(\angle CAN)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$0 \leq \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{1-|x+y-2|} \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

Т.к. $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

① $x+y=1$ (1)

② $x+y=2$ (2)

③ $x+y=3$ (3)

(1) $x+y=1 \Rightarrow \sqrt{2-x^2-y^2} + \sqrt{1-1} = 1$

(2) $x+y=2 \Rightarrow$

$$\sqrt{2-x^2-y^2} = 1 \uparrow^2$$

$$2-x^2-y^2 = 1$$

$$x^2+y^2 = 1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2} + 1 = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x; y \leq 1$$

$x=-1 \Rightarrow y=2 \quad x^2+y^2 > 1$?!

$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ (✓)

$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ (✓)

$y=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow x^2+y^2 > 1$?!

$$-4 \leq x; y \leq 4$$

① $x=-4 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x^2+y^2 > 4$?!

② $x=-3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$?!

③ $x=-2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x^2+y^2 > 4$?!

④ $x=-1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$?!

⑤ $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4, x+y=2$ (✓)

⑥ $x=1 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$?!

⑦ $x=2 \Rightarrow y=0$ (✓)

⑧ $x=3 \Rightarrow y=-1 \quad x^2+y^2 > 4$?!

⑨ $x=4 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow x^2+y^2 > 4$?!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7 (Продолжение)

$$(3) \quad x+y=3 \Rightarrow \sqrt{6-x^2-y^2} = 1$$
$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$-2 \leq x, y \leq 2$$

- ① $x=-2 \Rightarrow y=5 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$ (?)
- ② $x=-1 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$?!
- ③ $x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x^2+y^2 > 5$?!
- ④ $x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x^2+y^2 = 5$ ✓
- ⑤ $x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x^2+y^2 = 5$ ✓

Ответ: $(0; 1); (1; 0); (0; 2); (2; 0); (1; 2); (2; 1)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x; y) = ?$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-x+y-2} = 2$$

$$|x+y-2| \leq 1$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$x+y = 1; 2; 3$$

$$\textcircled{1} x+y=1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2-x-y^2} = 1$$

$$2-x-y^2 = 1$$

$$\begin{cases} 1 = x+y \\ 1 = x+y^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} x+y=2$$

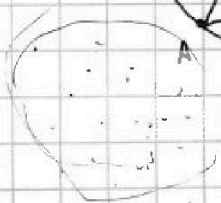
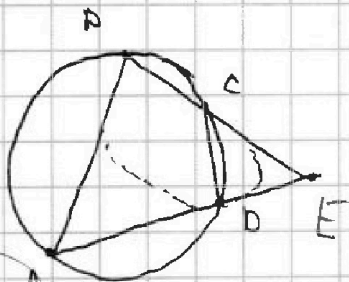
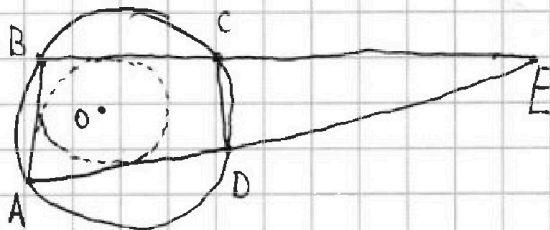
$$\sqrt{4-x^2-y^2} = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} x+y=3$$

$$\sqrt{6-x^2-y^2} = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$



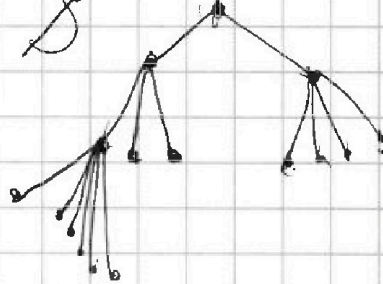
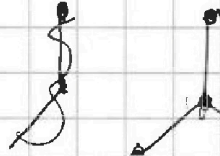
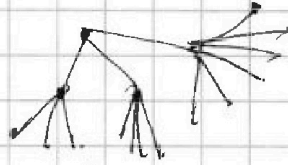
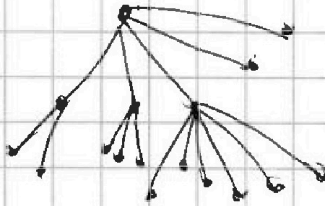
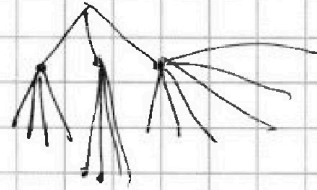


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

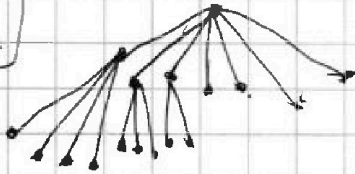
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{19+n}{2} = n-1$$

$$19+n = 2n-2$$

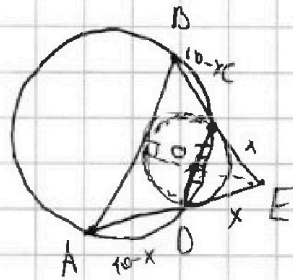
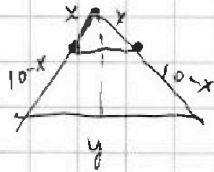
$$n = 21$$



$$\frac{19+(n-y)}{2} = n-1$$

19

$$\frac{19-y}{x}$$



$$BE = 10$$

$$(ED + DO)_{\min} \downarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} DM^2 - \frac{1}{2} AB \cdot DM \cdot (\cos \angle CAN)$$

$$16 = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{16} DM^2 - \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN) - \text{пот. кос в } \triangle BKM$$

$$\frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{4} DM^2 - \frac{1}{2} AB \cdot DM \cdot (\cos \angle CAN) = \frac{1}{4} AB^2 + \frac{1}{16} DM^2 - \frac{1}{4} AB \cdot DM \cos \angle CAN$$

$$\frac{3}{16} DM^2 = \frac{1}{4} AB \cdot DM (\cos \angle CAN) \quad | \cdot 4$$

$$\frac{3}{4} DM = AB \cdot (\cos \angle CAN)$$

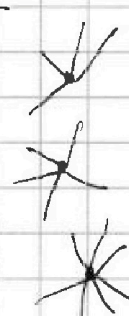
$$64 = DM^2 + DC^2 - 2DM \cdot DC (\cos \angle CAN)$$

$$64 = DM^2 + AB^2 - 2DM \cdot AC \cos \angle CAN$$

$a_1 \angle a_2 \dots \angle a_3$



$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 50$$



$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$$3(C_2^3 + C_3^3 + C_2^2) =$$

=

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3+6 \\ 0 & 0 & 0 & 3+2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix}$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 21$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 168 \\ + 23 \\ \hline 191 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \\ + 10 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 168 \\ 13 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 23 \\ \hline 79 \\ \times 3 \\ \hline 237 \end{array}$$

