



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ 1 \_ ИЗ \_ 1 \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9(t^2 - 9) = 0$$

$x_1, x_2$  - решения

Если есть 2 корня, то дискриминант положителен.  $\Rightarrow$

$$32t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

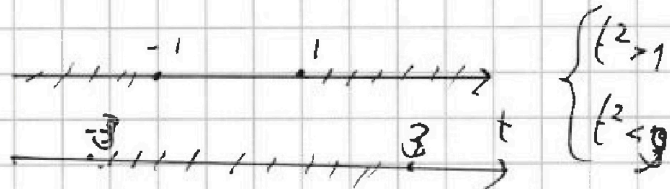
Если  $x_1 \cdot x_2 > 0$ , то по th. Виета  $9(t^2 - 9) > 0$

$$t^2 > 1$$

$$8t^2 - 9t^2 + 9 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

$$t^2 < 9$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ:  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12 \quad a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

$\uparrow$  кетим  $\Rightarrow 19p^4$  - кетимал  $\Rightarrow p^4$  - кетимал  $\Rightarrow p=2$ ,  
безо все групе претиме кетим кетимал  $\Rightarrow$

$$(2b+12)(2b+15) = 19 \cdot 16$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$2b^2 - 4b + 31b - 62 = 0$$

$$2b(b-2) + 31(b-2) = 0$$

$$(2b+31)(b-2) = 0$$

$$\downarrow b = -\frac{31}{2} \quad b = 2 \Rightarrow a = 14$$

$\uparrow$   
 $b$  - кетим кетимал  $\Rightarrow$   
кетим кетимал

Ответ:  $a = 14$   $b = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BC = 6 \Rightarrow BM = MN = NC = 2$

$AN \parallel DM \quad MC = 2NC \Rightarrow$

NA - сред. линия  $\Delta$

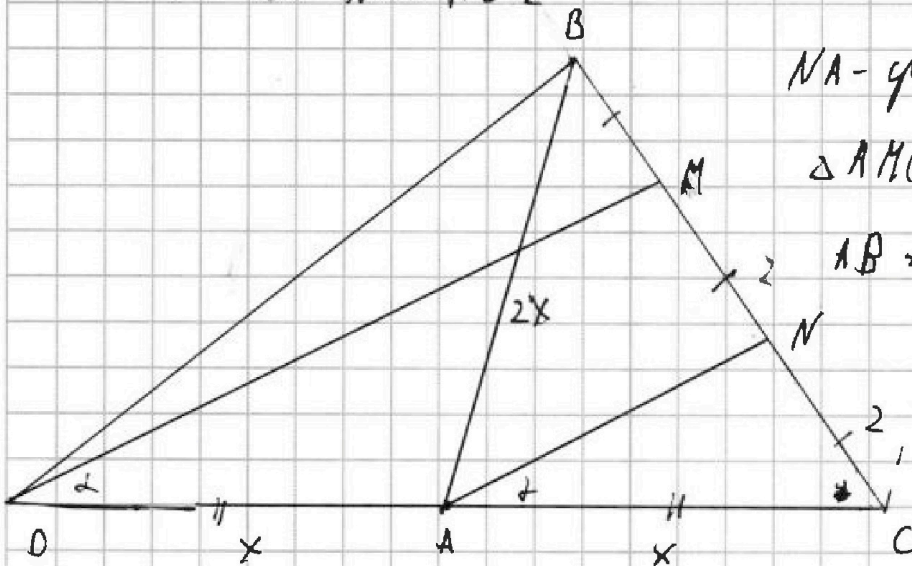
$\Delta AMC \Rightarrow DA = AC \Rightarrow$

$AB = 2 \cdot C$

$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$

$NA \parallel DM \Rightarrow$

$\angle MDC = \alpha$



$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

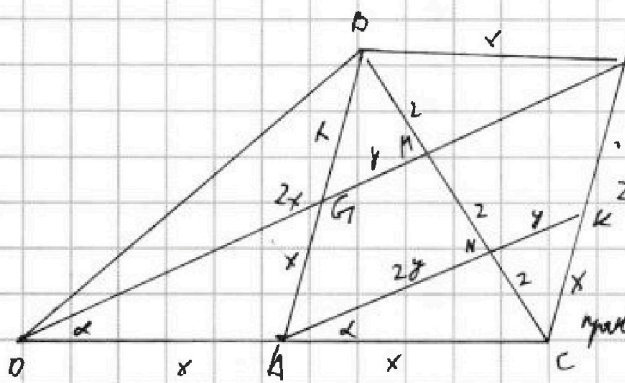
$-\frac{3}{4} = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}}$



пробегит FC, что

$FC \parallel AB \quad FC = AB,$

$\square ABFC -$

параллелограмм  $BM = NC \Rightarrow$

DM перес. параллелин

через F  $\Rightarrow$

По th. Фалеса  $BG = AG$ , если  $BM = NC$   $GM \parallel AN$

Если  $AN = y$ , то  $GM = \frac{y}{2}$  на параллелин  $\Rightarrow MK = \frac{y}{2} \Rightarrow AK = 3\frac{y}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

th cos

$$x^2 = x^2 + 9y^2 - 2\cos\alpha \cdot 3y \cdot x$$

град КС

$$4 = x^2 + 9y^2 - 2\cos\alpha \cdot 2y \cdot x$$

ге Δ ANC

$$9y^2 = 6\cos\alpha \cdot yx$$

$$y = \frac{2}{3}\cos\alpha x$$

4x<sup>2</sup>

$$9y^2 = 2\cos\alpha \cdot x$$

$$4 = x^2 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 x^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3}\cos\alpha x^2$$

$$4 = x^2 \left( 1 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3} \right)$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9}\cos\alpha^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{4}{3}}$$

$$2x = \sqrt{1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}} = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 3}$$

Ответ:  $AB = \frac{36\sqrt{2}}{11\sqrt{2} - 3}$

$$\sqrt{\frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{2}}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предположим мы выбрали каких-то 3 школьника, чтобы они сели в один ряд. Их рассадим - 1 вариант. Везде свободных мест нет  $\Rightarrow$  1 место на первую парту, везде остальные встали немо. Второй сядет на вторую парту, везде третий встает немо.

Если мы выбрали двух школьников и посадили в один ряд, то есть такие варианты:

к - мальчик в - девочка х - пустая

- 1) к в х
- 2) к х в
- 3) х к в
- 4) в х к

в этих случаях перед мальчиком сядет девочка.  $\Rightarrow$  количество вариантов

зависит от того, как мы распределим предметы учеников по партам.

Выборить ряд, где 2 человека - 4 вар, положить их - 4 вар. Выбрано в него место -  $C_{11}^2$ . Выбрано третье место в первый из оставшихся -  $C_3^3$ ; во второй из оставшихся -  $C_6^3$ ; в четвертой - 1 вар.  $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

всего вариантов:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot 1 =$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \Rightarrow$$

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 20 \cdot 84 =$$

$$4 \cdot 6720 \cdot C_{11}^2$$

ответ: ~~6720~~  $\cdot C_{11}^2$   
26880

из трех частей

$$C_6^3 = 20$$

$$C_9^3 = 84$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2$$

$$1 - |x - y - 1| \geq 0$$

$$|x - y - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$y \leq x \leq 2 + y$$

Сумма корней квадратного уравнения - целое  $\Rightarrow$   
сами корни - целые числа

$$0 \leq \sqrt{1 - |x - y - 1|} \leq 1 \Rightarrow$$

Если  $\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 1$ , то

$$x - y - 1 = 0 \quad x = y + 1$$

$$2y + x - 2y - y^2 - 2y - x - y^2 = x$$

$$-2y^2 - 2y = 0 \quad 2y(y + 1) = 0$$

$$\begin{matrix} y = 0 & x = 1 \\ y = -1 & x = 0 \end{matrix}$$

Если  $\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0$

$$|x - y - 1| = 1$$

$$x - y - 1 = 1$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$x - y - 1 = -1$$

$$x = y$$

дискриминант  $\leq 0$

$$2y + x - 2y - y^2 - 4y - x - y^2 = 4$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{4}$$

$$2y^2 + 4y + 4 = 0 \quad (y + 2) = 0 \quad y = -2 \quad x = 4$$

$$2) x = y \quad 2x - 2x - x^2 - x^2 = 4$$

$$-2x^2 = 4 \quad x$$

Ответ:  $y = 0 \quad x = 1 \quad y = -1 \quad x = 0$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим дерево, из которой выйдут 1 дерево.  
Та или другая с задан, где 5, 6, 7 и 9 верш  
или с вер., где один дерева. Рассмотрим  
такой вер. эти 2 вер. выйдут только у  
→ (дерева) → из других деревьев  
начать в эту ветвь ⇒ можно не может быть.  
⇒ Все деревья с 1 деревом выйдут с  
вер. с верши 5, 6, 7 и 9.

Рассмотрим эти четыре дерева и дороги  
между ними. Дорог равно 3. Ведь через  
оставшиеся города мы не можем никакие  
прямые, кратчайшие ⇒ этот граф на 4 вершинных  
связный, но в нем нет циклов, иначе  
так можно добраться между городами дву-  
мя способами ⇒ это дерево ⇒ у дерева на  
n вершинных n-1 ребра ⇒ между этими 4 вер-  
шинами 3 ребра ⇒ осталось 24 города ⇒ у нас  
24 города с 1 деревом ⇒ ответ: 28 деревьев





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$2x - 2y - x^2 - y^2 = 9 + 1 - (x - y - 1) - \sqrt{1 - (x - y - 1)^2}$   
 $1 - x - y + 1$   
 $x + y - 1$   
 $1 - x - y + 1$   
 $x = y + k$   
 $0 \leq k \leq 2$   
 $2(y + k) - 2y - (y + k)^2 - y^2$   
 $1 - |y \cdot k - y - 1| = 2$   
 $2y + 2k - 2y - y^2 - 2yk - k^2 = y^2$   
 $-2y^2 - 2yk - k^2 + 2k$   
 $-2y^2 - 2yk$   
 $-2y^2 - 2yk - k(k - 2)$   
 $-x^2 + 2x - 1 - (x - 1)^2$   
 $-y^2 - 2y - 1 - (y + 1)^2$   
 $\sqrt{2 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2}$

$2x - x^2 - 2y - y^2 = 0$   
 $2x - x^2 = 2y + y^2$   
 $2y + 2k - y^2 - 2yk - k^2 = 2y + y^2$   
 $2k - 2y^2 - 2yk - k^2 = 0$   
 $2k - k^2 = 2y^2 + 2yk$   
 $\frac{k(2 - k)}{2} = y(y + k)$

$2(x + 2) - 2y - (y + 2)^2 - y^2 = y$   
 $y - 2y^2 - 4y - 4 = y$   
 $2x - k^2 + 2y - 2 = 0$

$2x - 2y - x^2 - y^2 = 9 + 1 - (x - y - 1) - \sqrt{1 - (x - y - 1)^2}$   
 $1 - x - y + 1$   
 $x + y - 1$   
 $1 - x - y + 1$   
 $x = y + k$   
 $0 \leq k \leq 2$

$2x - 2y - x^2 - y^2 = 9 + 1 - (x - y - 1) - \sqrt{1 - (x - y - 1)^2}$   
 $1 - x - y + 1$   
 $x + y - 1$   
 $1 - x - y + 1$   
 $x = y + k$   
 $0 \leq k \leq 2$

$2(y + k) - 2y - (y + k)^2 - y^2$   
 $1 - |y \cdot k - y - 1| = 2$   
 $2y + 2k - 2y - y^2 - 2yk - k^2 = y^2$   
 $-2y^2 - 2yk - k^2 + 2k$   
 $-2y^2 - 2yk$   
 $-2y^2 - 2yk - k(k - 2)$   
 $-x^2 + 2x - 1 - (x - 1)^2$   
 $-y^2 - 2y - 1 - (y + 1)^2$   
 $\sqrt{2 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2}$

