



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

Условие на то, чтобы существовало два корня
это $D > 0$.

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = \\ = 16 - 4t^2 > 0 \Leftrightarrow 16 > 4t^2 \Leftrightarrow 4 > t^2 \Leftrightarrow \boxed{2 > |t|}$$

Пусть теперь x_1 и x_2 - корни нашего уравнения.

\Rightarrow по теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = 4t^2 - 4 > 0$

$$\Leftrightarrow 4t^2 > 4 \Leftrightarrow t^2 > 1 \Leftrightarrow |t| > 1$$

\Rightarrow Значит, $1 < |t| < 2$, или

$$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 40$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$p \in \mathbb{P}$$

$$a, b = ?$$

обозначим зна-
чение выраж. под

$$\Rightarrow 17p^5 = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = t$$

Если $a+b=40$, то $a-b = a+b-2b < a+b-2 = 38$, т.к. $b \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow b \geq 1$.

Т.к. 17 — простое и $(a-b)(a-b+15) : 17$, то

$$\begin{cases} (a-b) : 17 \\ (a-b+15) : 17 \end{cases}$$

аналогично $b-a < 38 \quad | \cdot (-1)$

$$\Rightarrow a-b > -38$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -38 < a-b < 38 \\ -23 < a-b+15 < 53 \end{cases}$$

1) Если $a-b : 17$, то

$$a-b \in \{-34; -17; 0; 17; 34\}$$

(1.1) (1.2) (1.3) (1.4) (1.5)

$$\text{1.1) } \begin{cases} a-b = -34 \\ a-b+15 = -19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b+15 = -19$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t &= (-34) \cdot (-19) = \\ &= 2 \cdot 17 \cdot 19 \neq 17p^5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} = 20 + \frac{a-b}{2}$$

1.1. остается



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1.2) \begin{cases} a-b = -17 \\ a-b+15 = -2 \end{cases} \Rightarrow t = (-17) \cdot (-2) = 17 \cdot 2 \neq 17p^5$$

1.2. отпадает

$$1.3) \begin{cases} a-b = 0 \\ a-b+15 = 15 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \cdot 15 = 0 \neq 17p^5$$

1.3. отпадает

$$1.4) \begin{cases} a-b = 17 \\ a-b+15 = 32 \end{cases} \Rightarrow t = 17 \cdot 32 = 17 \cdot 2^5 - \text{подходит}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(a-b) + (a+b)}{2} = \frac{17 + 40}{2} = 40 + \frac{17}{2} \notin \mathbb{N}$$

1.4. отпадает

$$1.5) \begin{cases} a-b = 34 \\ a-b+15 = 49 \end{cases} \Rightarrow t = 34 \cdot 49 = 2 \cdot 17 \cdot 7^2 \neq 17 \cdot p^5$$

1.5. отпадает

$$2) \text{ Если } a-b+15 \div 17 \\ \Rightarrow a-b+15 \in \{ \overset{2.1}{-17}, \overset{2.2}{0}, \overset{2.3}{17}, \overset{2.4}{34}, \overset{2.5}{51} \}$$

$$\text{Т.к. } a-b+15 < 53 \\ \overset{-23}{-}$$

$$2.1) \begin{cases} a-b+15 = -17 \\ a-b = -32 \end{cases} \Rightarrow t = (-17) \cdot (-32) = 17 \cdot 2^5 =$$

- подходит

$$a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} = \frac{40 - 32}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b = 40 - 4 = 36$$

$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ этот случай полностью подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2.2) \quad a - b + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \cdot (a - b) = 0 \neq 17 \cdot p^5$$

(2.2. отпадает)

$$2.3) \quad \begin{cases} a - b + 15 = 17 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 17 \cdot 2 \neq 17 \cdot p^5$$

(2.3. отпадает)

$$2.4) \quad \begin{cases} a - b + 15 = 34 \\ a - b = 19 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 34 \cdot 19 = 2 \cdot 17 \cdot 19 \neq 17 \cdot p^5$$

(2.4. отпадает)

$$2.5) \quad \begin{cases} a - b + 15 = 51 \\ a - b = 36 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 51 \cdot 36 = 3 \cdot 17 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17 \neq 17 \cdot p^5$$

(2.5. отпадает)

Все случаи разобраны. Подойдет лишь один ответ в случае 2.1.

Ответ: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 36 \end{cases}$

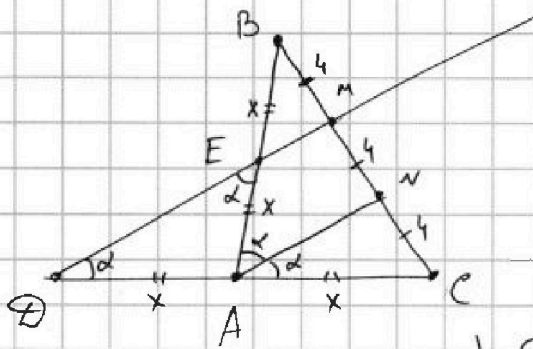


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $N \notin$ отрезку MC , т.к. если это не так и $N \in$ прямой BC и $BM = MN$, то $N = B$, ~~то~~ противоречие.

2) $\Rightarrow BM = MN = NC = \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$

3) Пусть $EM \cap AN = E$ — точка пересечения EM и AN .

\Rightarrow т.к. в $\triangle BMN$ $EM \parallel AN$, M — середина BN , то EM — его средняя линия. $\Rightarrow E$ — середина AB .

4) т.к. в $\triangle DMC$ $AN \parallel MD$, N — середина MC , то AN — его средняя линия. $\Rightarrow A$ — середина DC .

А т.к. $AB = CD$, то $\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = BE = EA = DA = AC$.

5) Пусть $\angle CAN = \alpha$. $\Rightarrow \angle MDC = \alpha$, т.к. $DM \parallel AN$

6) $\angle DEA = \angle EDA = \alpha$, т.к. $EA = DA$ / Док-но в пункте 4.

7) $\angle EAN$, он же $\angle BAN$, равен $\angle DEA = \alpha$, т.к. $DM \parallel AN$.

8) $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CAN = \alpha \Rightarrow \cos(2 \cdot \angle CAN) = \cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4}$.

9) Теорема косинусов для $\triangle ABC$, где $2x$ обозначена половина длины AB , т.е. $AC = x$, $AB = 2x$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos(\angle BAC) \cdot AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow 12^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 2x \cdot x$$

$$12^2 = 5x^2 + x^2 = 6x^2 \Rightarrow 2 \cdot 12 = x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow AB = 2x = \boxed{4\sqrt{6}}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$



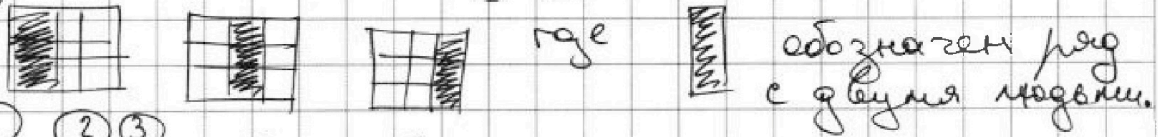
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

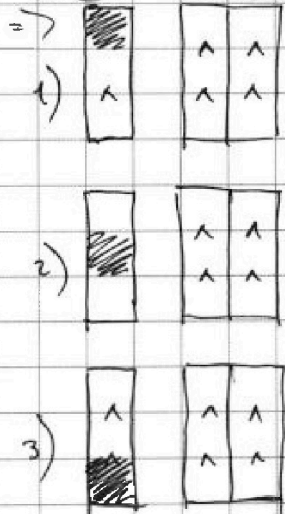
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. узелки на разных рядах никак не "взаимодействуют" друг с другом, то можно рассмотреть ряд с пропуском (где сидит 2 человека) отдельно, а потом умножить наш ответ на количество способов разместить этот ряд относительно лево других. Таких способов 3:



ряд ① ② ③



Назовём ряд 1 - ряд с двумя модуль ("ряд 1" не всегда то же, что и "первый" ряд). Остальные два: 2 и 3 (см. рис. слева). Знак "Λ" означает, что человек снизу на рисунке (т.е. дальше от доски) выше человека (который сидит выше на рисунке). То есть если есть 2 человека ростом а и б, то такая картинка означает, что $a > b$.

Есть глобально 3 способа разместить пустое место в ряду 1 (см. рис.) Всего способов

распределить модуль по рядам: $\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$

$\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$ - можно сначала выбрать

модуль на ряд 2, потом на ряд 3, оставшихся - на ряд 1. Модуль на своём ряду должны сидеть по возрастанию роста. То есть, наоборот на модуль на рядах 2 и 3 всегда должны сидеть по возрастанию роста.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит, есть лишь 1 способ рассадить выбран-
ных $C_8^3 \cdot C_5^3$ способами людей в на свои
места (на рядах 2 и 3). На ряду 1 это
суждение верно лишь для случаев 1) и 3).
Тогда для случаев 1) и 3) количество способов рас-
садить людей — по $C_8^3 \cdot C_5^3$ способа. То есть
в сумме $2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$. В случае 2) на ряду 1
двух людей можно рассадить двумя спосо-
бами, т.к. между ними есть пустое место.
 \Rightarrow Это еще $2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ способов.

Итого $4 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$. Умножаем, как было
оговорено в начале, на 3, и получаем

Ответ: $12 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ способов.



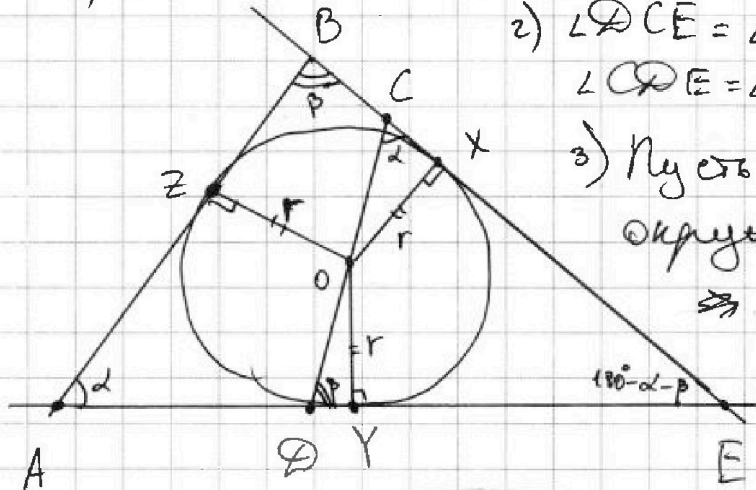
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

X, Y, Z — точки касания! Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$



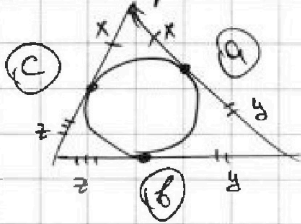
2) $\angle OCE = \angle A = \alpha$
 $\angle ODE = \angle B = \beta$ | Т.к. ABCD
вписан. в окружн.

3) Пусть радиус ~~в~~ впис. окружн. в $\triangle ABE$ r .

4) Th. sin: $\frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{AE}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}$

$\Rightarrow AE = \frac{BE \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin \beta}{\sin \alpha}$; $AB = \frac{BE \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$

a, b, c — стороны



5) Если в окружн. Т.к. отрезки касательных равны, то (см. рис.)
 $x = \frac{a+c-b}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $z = \frac{b+c-a}{2}$.

$\Rightarrow EX = EY = \frac{EB + EA - AB}{2} = \frac{10 + \frac{10 \sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{10 \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}}{2} =$
 $= 10 \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta - (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}{2 \sin \alpha} =$

$= 5 \cdot \left(\frac{\sin \alpha (1 - \cos \beta) + \sin \beta (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} \right)$

6) $\angle OY = \frac{r}{\sin \beta}$

$\Rightarrow \angle O = \frac{r}{\sin \beta}$

7) $\angle O + \angle E = \frac{r}{\sin \beta} + \frac{r}{\sin \alpha} + 5 \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right)$

8) $r = \frac{AB + BE - AE}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) S_{\triangle ABE} = r \cdot \frac{AB + BE + AE}{2} = r \cdot 5 \cdot \frac{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta))}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{BE \cdot AB \cdot \sin \beta}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin \beta}{2} = 50 \sin \beta$$

$$\text{Из } \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{50 \sin \alpha}$$

$$r = 10 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$$

$$9) \text{ } \frac{r}{\sin \beta} + \frac{r}{\tan \beta} + 5 \cdot \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} =$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{2 \tan \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} + \frac{2 \cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\tan \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} \right) +$$

$$+ \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \Bigg) \text{ } \text{ } =$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} + \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos^2 \beta}{\sin \beta (\sin \alpha + \cos \beta + \sin(\alpha + \beta))} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \right) - \text{Min?}$$

Минимум будет достигаться при $\sin(\alpha + \beta) = 0, \alpha$

$$\sin \alpha = 1: 5 \cdot \left(0 + 0 + \frac{1 + 0 - 0}{1} \right) = 5$$

$$\Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 0^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \beta = 0$$

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. из любой деревни есть единственный маршрут до любой другой, то если мы представим остров как граф, где вершины - деревни, а рёбра означают самые короткие пути между двумя деревнями, то этот граф будет деревом. Пусть всего было n деревень. Тогда, раз наш граф дерево, было $n-1$ рёбер.

Всего количество рёбер в графе можно подсчитать как сумму степеней вершин, делённую на два.

$$\rightarrow \text{Всего рёбер было } n-1 = \frac{3+4+5+7+(n-4) \cdot 1}{2}$$

Т.к. 4 вершины имеют 3, 4, 5 и 7 рёбер, а оставшиеся $n-4$ - по одному.

$$\Rightarrow 2n-2 = 19 + n-4$$

$$n = 19 - 4 + 2 = 19 - 2 = 17$$

Ответ: На острове может быть только 17 деревень



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение
Т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то пусть $2x + 2y + x^2 - y^2 = \pm 1$,

$$1 - |x + y - 2| = z_2 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

⇒ Если $\begin{cases} z_1 \neq 0 \\ z_2 \neq 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} z_1 \geq 1 \\ z_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} \geq 2$

$\geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 > 1$. Противоречие.

⇒ Когда бы одно из чисел z_1 или z_2 равно нулю. Тогда корень из него тоже ноль. Тогда корень из другого равен $1 - 0 = 1$, то есть второе число равно 1.

То есть:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases} \text{ 1 случай.}$$

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 0 \end{cases} \text{ 2 случай.}$$

1 случай:
$$\begin{cases} 2x + 2y = x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - |x + y - 2| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y) \\ |x + y - 2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y) \\ x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x(x + y) - (x^2 + y^2) = 2xy = 2^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Т.к. x и y равноправны, то без ограничения общности $x = 0$. Потом ответа нужно будет не забыть "отзеркалить".

$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ Подходят ~~еще~~ ответы:

$$\begin{bmatrix} (0; 2) \\ (2; 0) \end{bmatrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 случай:
$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 - |x + y - 2| = 0 \end{cases}$$

2.1) Если $x + y \geq 2$, то:

$$1 - |x + y - 2| = 1 - x - y + 2 = 3 - (x + y) = 0$$

$$\rightarrow x + y = 3$$

$$\Rightarrow 2(x + y) = 1 + x^2 + y^2 = 6$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 3^2 - 5 = 4 = 2xy$$

$$\Rightarrow xy = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

без ограничений
области.

$$\Rightarrow x - y = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} = 2 \quad y = 3 - \frac{x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{(x+y) + (x-y)}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

подходят ответы:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

~~Этот случай не подходит~~

2.2) Если $x + y < 2$, то:

$$1 - |x + y - 2| = 1 + x + y - 2 = x + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 1$$

$$\Rightarrow 2(x + y) - 1 = x^2 + y^2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2xy = 1^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично можно сказать, что без ограничения общности $x=0$.

$\rightarrow y = 1 - x = 1$ Итого еще ответы:

$\begin{bmatrix} (1; 0) \\ (0; 1) \end{bmatrix}$

Все случаи разобраны.

Ответ: $(1; 0)$

$(0; 1)$

$(2; 0)$

$(0; 2)$

~~$(1; 1)$~~

$(1; 2)$

$(2; 1)$



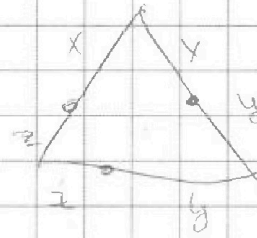
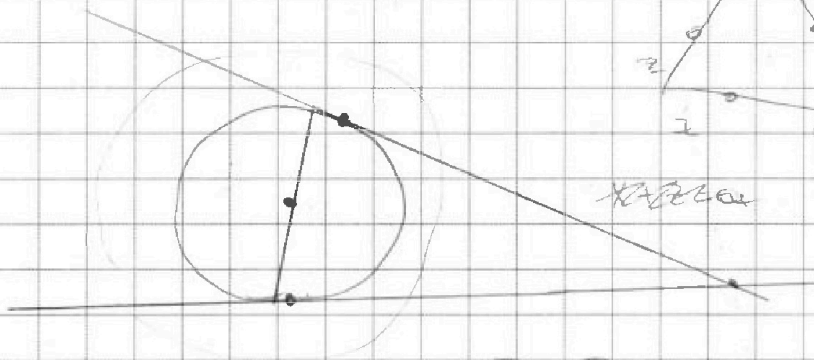
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

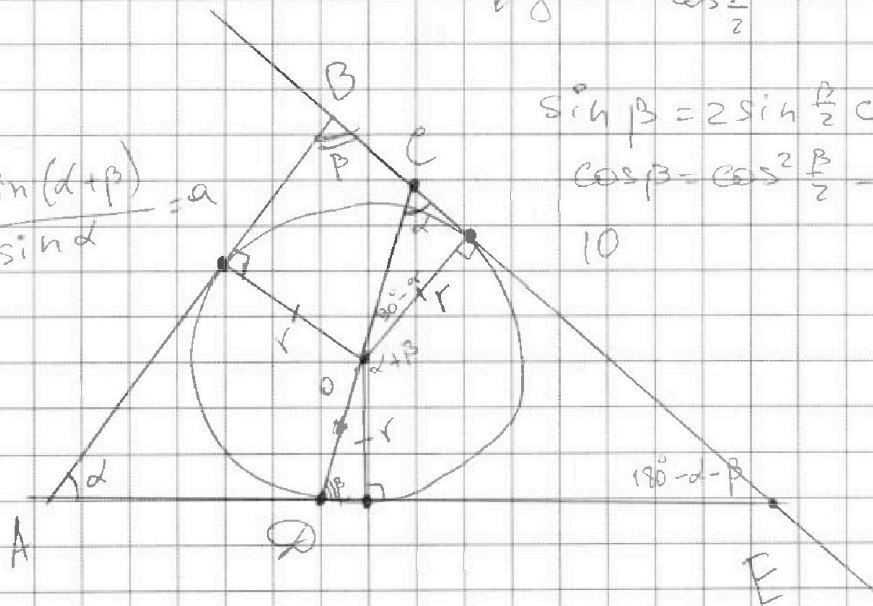
черновик



$$2R + 2r = R + R$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{10 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = a$$



$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

10

$$\frac{10 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = b$$

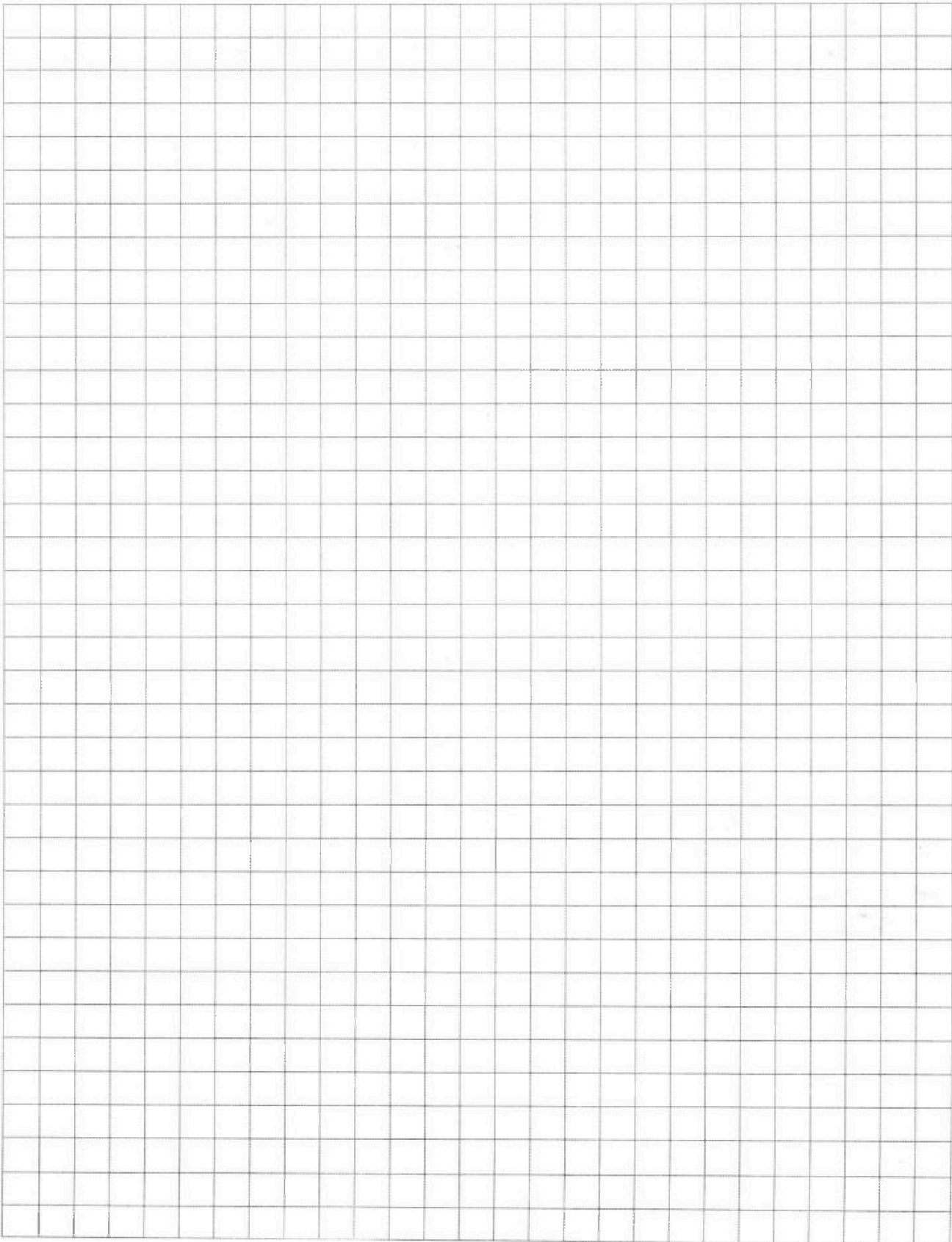


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





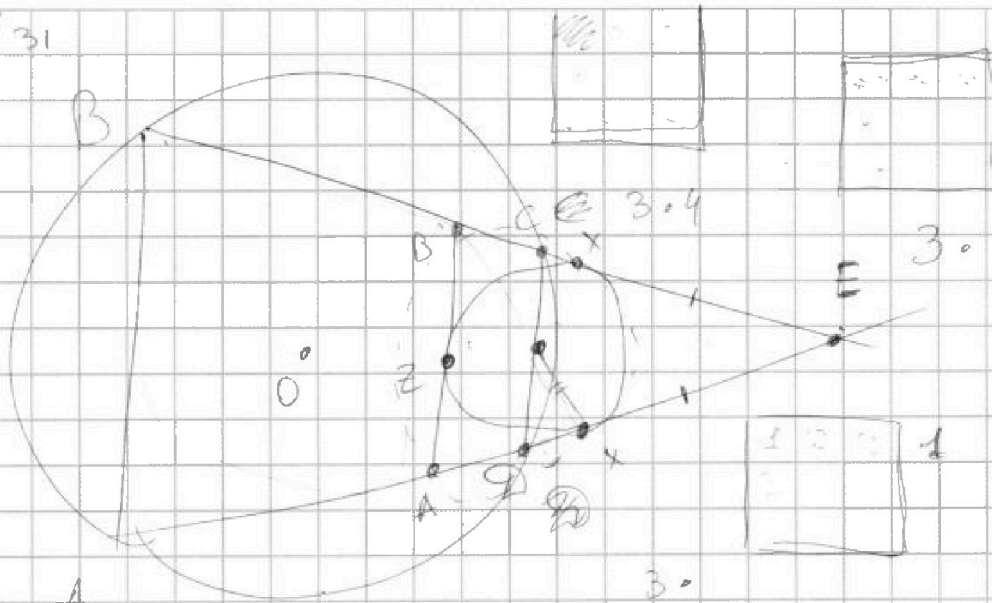
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА _____
ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16/31



$$2x + 2y \geq x^2 + y^2$$

$$17, |x + y - 2|$$

$$17, x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 2x - 2y$$

$$\Rightarrow 4 + 2xy - 2x - 2y$$

$$\Rightarrow x + y \geq 0$$

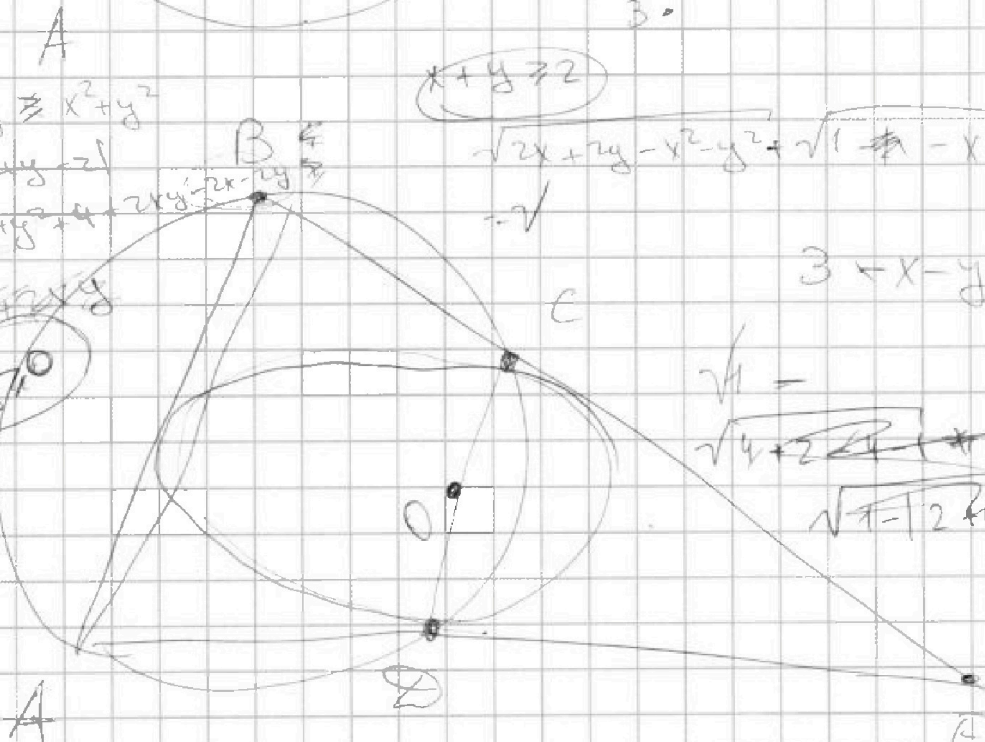
$$x + y \geq 2$$

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x - y + 2} =$$

$$= \sqrt{}$$

$$3 - x - y$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{4 + 2 - 2x - 2y + 1} = \sqrt{7 - 2x - 2y}$$



$$\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} = 1$$

$$\sqrt{8 - 2 - 16 - 1} =$$

$$\sqrt{16 - 2} =$$

=

- ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓
 (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)



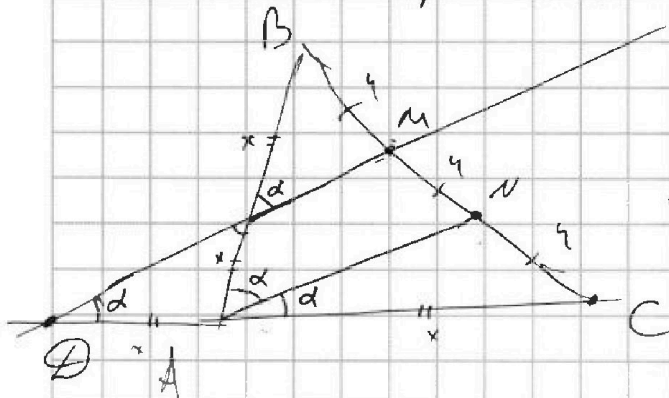
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновики.



$$AB = CD \text{ - ?}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{4}$$

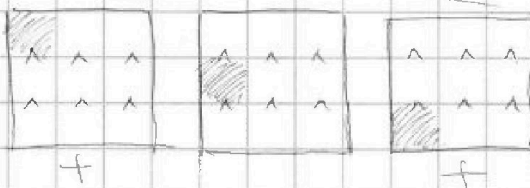
$$\sin^2 \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\rightarrow 2\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2(x+y-2)^2 = x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 2x - 2y$$

-①



1 2 3 4 5 6 7 8

$$C_8^3 \cdot C_6^3 = 2$$