



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ . Пусть  $x_1, x_2$  — корни. Тогда по теор. Виета:

$x_1 x_2 = 4t^2 - 4$ . Заметим, что если есть 2 реальных корня, то  $\frac{D}{4} > 0$ , то  $\frac{D}{4} = (\sqrt{3}t)^2 - (4t^2 - 4)$

По условию задачи составим сист. нера-в, относительно  $t$ :

$$\begin{cases} (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 > 0 & (1) & 1) (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 > 0 & 2) 4t^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t^2 - 4 > 0 & (2) & 3) 3t^2 - 4t^2 + 4 > 0 & 4) 4t^2 > 4 \quad / : 4 > 0 \end{cases}$$

$$-t^2 + 4 > 0 \quad / \cdot (-1) < 0$$

$$t^2 > 1 \iff \begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

$$t^2 - 4 < 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$t^2 < 4 \iff \begin{cases} t < 2 \\ t > -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ | & | & | & | & | \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \quad t \in (-2; 2)$$

Ответ:  $(-2; -1) \cup (1; 2)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=40 \Rightarrow a=40-b \quad \cancel{p \in \mathbb{P}} \quad p - \text{простое число} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5 \quad - \text{заметим квадрат разности и вынесем общий множитель}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 14p^5 \quad - \text{представим зп. } a \text{ и приведем подобные слагаемые}$$

$$(40-2b)^2 + 15(40-2b) = 14p^5 \quad ] \quad t = 40-2b$$

$$t^2 + 15t = 14p^5 \quad (*)$$

Заметим, что если  $a+b=40$  и  $a, b \in \mathbb{N}$ , то  $t \leq 39-1=38$ . Знаем,

$$14p^5 \leq 38^2 + 15 \cdot 38$$

$$14p^5 \leq 2014$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \wedge 38 \\ + 304 \\ \hline 1444 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \wedge 15 \\ + 190 \\ + 38 \\ \hline 570 \end{array}$$

$$1444 + 570 = 2014$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 32 \\ + 94 \\ \hline 544 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times 9 \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 17 \\ + 1401 \\ + 243 \\ \hline 4131 \end{array}$$

Рассмотрим первые значения  $p$ :

$$p=2: 2^5=32 \Rightarrow 14p^5=14 \cdot 32=544 \leq 2014 \quad (L.)$$

$$p=3: 3^5=9^3 \cdot 3=27 \cdot 9=243 \Rightarrow 14p^5=14 \cdot 243=4131 \leq 2014 \quad (L.) \Rightarrow p \neq 3$$

Сравнительно, что  $14p^5$  ещё больше  $\Rightarrow$  больше 2014. Знаем,  $p=2$

Тогда найдем кв. кор-ль отн.  $t(1)$ :

$$t^2 + 15t = 544$$

$$\begin{array}{r} 544 \\ \times 4 \\ \hline 2146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ \times 7 \\ \hline 34317 \\ 49 \\ \hline 49 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$2401 = 7^4 = 49^2$$

$$t^2 + 15t - 544 = 0$$

$$b = 15^2 - 4 \cdot (-544) = 225 + 2146 = 2401 = 49^2$$

$$t_1 = \frac{-15 - \sqrt{49^2}}{2} = \frac{-15 - 49}{2} = \frac{-64}{2} = -32 = 40 - 2b \Rightarrow -2b = -72 \Rightarrow b = 36, a = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t_2 = \frac{-15 + \sqrt{45^2}}{2} = \frac{-15 + 45}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad \text{но } 40 - 2b \Rightarrow -2b = -29, \text{ но } 29 \neq 2 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$$

Ответ:  $a=4, b=36$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

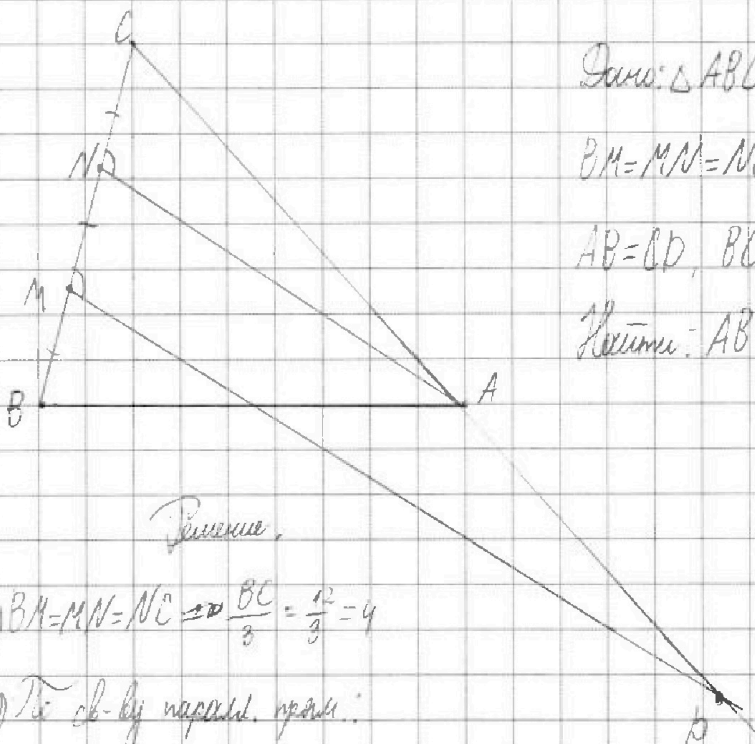


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $M, N \in BC$

$BM = MN = NC$ ,  $D \in AC$ ,  $AN \parallel MD$

$AB = CD$ ,  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти:  $AB$

Решение.

$$1) BM = MN = NC \Rightarrow \frac{BC}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

2) По св-ву паралл. прям:

$$\angle CAN = \angle CMB \text{ (AN \parallel MD, ос. BC)}$$

В то же время  $\angle C$  - общий. Значит,  $\triangle ACN \sim \triangle BCM$  (по 2-м углам), откуда

$$k = 2 \left( \frac{CM}{CN} = \frac{8}{4} = 2 \right). \text{ Из этого следует, что } CD = 2AC.$$

$$3) \text{ П.к. } AB = CD \text{ и } CD = 2AC \text{ (из (2))} \Rightarrow AB = 2AC$$

$$4) \text{ Заметим, что } \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AN - \text{бис. (по трем)} \Rightarrow \angle CAB =$$

$$= 2\angle CAN \text{ (по свойст. бис.)} \Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos\angle CAB.$$

5) Применим теорему косинусов для  $\triangle ABC$  и стороны  $BC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle CAB \quad - \text{подставляем значения из (4), (3) и условия:}$$

$$12^2 = (2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$4AC^2 + AC^2 + AC^2 = 144$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6AC^2 = 144 \quad /:6 \neq 0$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \pm 2\sqrt{6} \quad - \text{учитывая то, что сторона всегда положительна, } AC = 2\sqrt{6}$$

6) Из (3) и (5):

$$AB = 2AC = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{Ответ: } AB = 4\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Очевидно, что в классе задано только 1 место. Значит,  $b \geq 2$  рядов так:

x
y
z

где x ниже y, y ниже z. Выберем 2-ух случайных учеников и посадим их (перядом и ватен):  $\frac{2 \cdot 4}{2!} = 28$  способов. Пусть a выше b. Тогда есть  $\frac{2 \cdot 4}{2!}$  способов посадить их

1) b
a

2) b
a

3) a
b

4) b
a

только 4 способа их посадить:

$$28 \cdot 4 = \frac{28 \cdot 4}{1!} = 112 \text{ вариантов выбрать 2-ух учеников и}$$

посадить в отвлеченный ряд.

Р-реш друзей учеников. Разобьем случайных на 2 группы без перекреста

(выберем в 1-ую 3-их случ, ост. - 2-ая группа):  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$  вар.

Сравнительно, что всех людей в группе можно посадить за 1 ряд только одним способом. Значит, есть 20 вариантов рассадить остальных.

Теперь по рядам. Есть 6 комбинаций по (3-2-1) распределим по рядам наши

группы (1-ая 2 чел., 2-ая 3 чел.). Значит, ответ:  $112 \cdot 20 \cdot 6 = 142 \cdot 20 \cdot 6 = 13440$

$$\begin{array}{r} 13440 \\ \times 10 \\ \hline 134400 \end{array}$$

Ответ: 13440



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что схема дорог и деревни — <sup>лучший</sup> граф. Д-жем, что раз от любой деревни в лагерь только 1 путь, то в графе нет циклов.

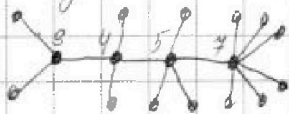
Пусть это не так, есть цикл.



Возьмем почтовые А и В такие, что обе почты в цикле. Но тогда из т. А в т. В есть два пути. Значит, в графе нет циклов.

Заметим, что граф на вершинах ст. 3, 4, 5 и  $\mathbb{Z}$  тоже связен. Т.к. иначе нет 3 вершины С, степени которой больше 1, что противоречит условию.

Тогда  $n$ -матрица такой графа:



— 14 вершин. Уменьшишь со цикла, т.е. тогда ст. вершины

3, 4, 5 или  $\mathbb{Z}$  <sup>уменьшится</sup> ~~увеличится~~ или появится вершина степени 2. Также если попробовать сделать др. граф, в нем будет цикл.

Ответ: 14.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{подкоренные выражения могут быть}$$

Заметим, что подкоренные выражения равны 0 и 1 или 1 и 0 (т.к. сумма или выражение больше 1 (>1)).

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 & (a) \\ 1-|x+y-2|=1 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} 1-|x+y-2|=1 \\ |x+y-2|=0 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+y)^2 - (x^2+y^2)=0 \\ 4 - (x^2+y^2)=0 \\ x^2+y^2=4 - \text{уменьши до кв. суммы} \\ (x+y)^2 = 4 + 2xy - 2xy \\ 4 = 4 + 2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow xy=0 \end{cases}$$

Получим систему:  $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (2; 0); (0; 2)$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 & (a) \\ 1-|x+y-2|=0 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} 1-|x+y-2|=0 \\ |x+y-2|=1 \end{cases}$$

$$I \quad x+y-2=1 \Rightarrow x+y=3$$

$$a) \quad 2(x+y)^2 - (x^2+y^2)=1$$

$$x^2+y^2=5$$

$$(x+y)^2 = 9 + 2xy \Rightarrow 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow y=3-x$$

$$x(3-x)=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=2 \Rightarrow y_1=2, y_2=1 \Rightarrow (1; 2); (2; 1)$$

$$II \quad x+y-2=-1 \Rightarrow x+y=1$$

$$2(x+y)^2 - (x^2+y^2)=1$$

$$x^2+y^2=1$$

$$(x+y)^2 = 1 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (1; 0); (0; 1)$$

Ответ:  $(1; 0); (0; 1); (2; 0); (0; 2); (1; 2); (2; 1)$ .

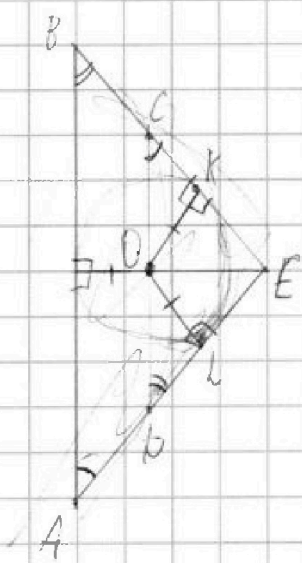


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



15

$K, M$  - т. кас. сф.  $O$  и  $BE$  и  $AE$  соот.

$OK = OL$  (кад.  $r$ )

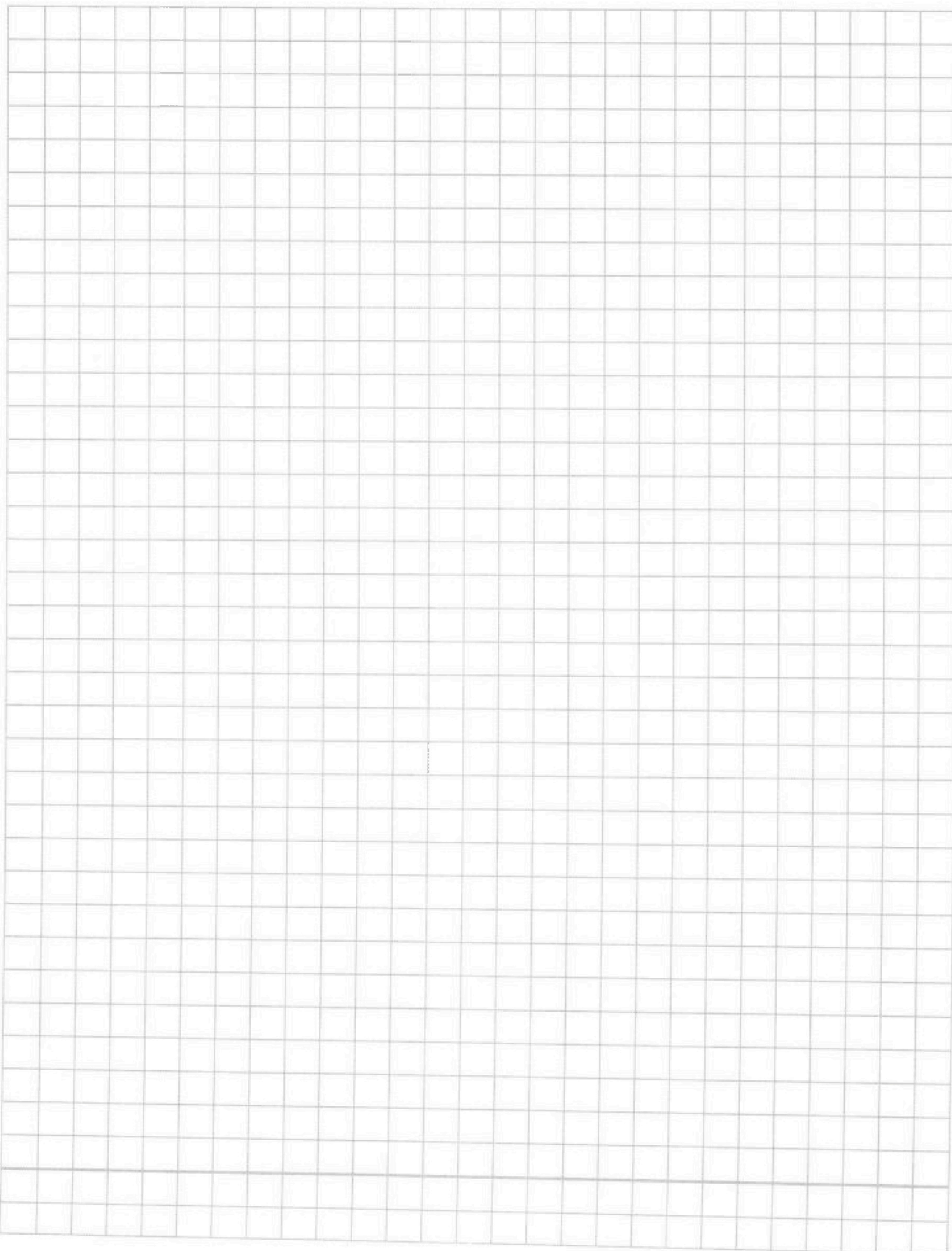


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$1) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 & (a) \\ 1-|x+y-2|=1 & (b) \end{cases} \quad d) \begin{cases} 1-|x+y-2|=1 \\ |x+y-2|=0 \\ x+y=2 \end{cases} \quad a) \begin{cases} 2(x+y)-(x^2+y^2)=0 \\ 4-(x^2+y^2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \quad (x+y)^2 = 4+2xy \quad 4=4+2xy \quad 2xy=0$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (2, 0), (0, 2)$$

$$2) \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=1 & (a) \\ 1-|x+y-2|=0 & (b) \end{cases} \quad d) \begin{cases} 1-|x+y-2|=0 \\ |x+y-2|=1 \quad \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I} \begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2)=1 \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \quad (x+y)^2 = 9+2xy \Rightarrow 2xy=4 \rightarrow xy=2$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow (1, 2), (2, 1)$$

$$\text{II} \begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \quad 2(x+y)-(x^2+y^2)=1 \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad (x+y)^2 = 1+2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow xy=0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (0, 1), (1, 0)$$

$$\text{Ответ: } (1, 0); (0, 1); (2, 0); (0, 2); (1, 2); (2, 1).$$

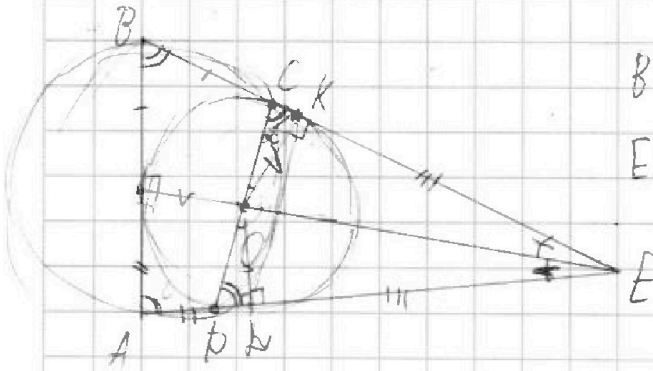
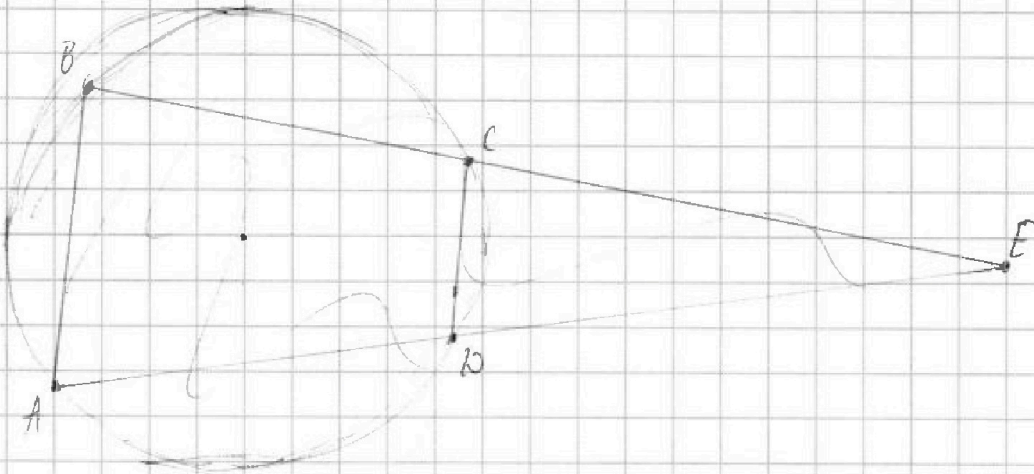


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BE = 10 \quad (ED + BD)_{\text{мин.}} = ?$$

$$ED \cdot EA = EB \cdot EC$$

1  2  3

1, 2, 3, ..., 8

4  5  6

Заметим, что "8" будет лучше всего, тогда "1" будет лучше, чем

1  2  3

и лучше чем. При этом лучше "7" не удалось найти, так

лучше 8-ый уже есть. Т.е.:

$$1) 8 \text{ на 1-ой перес.} \Rightarrow 4 \text{ на перес.} - 10 \cdot 8$$

$$2) 8 \text{ на 2-ой перес.} \Rightarrow 4 \text{ на 1} - 8 \cdot 13$$

$$3) 8 \text{ на 3-ей} \Rightarrow 3 \text{ на 1} - 3 \cdot 2$$

6. Сделаем лучше всего, чем 8 и 1 на 1-ой перес. или



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

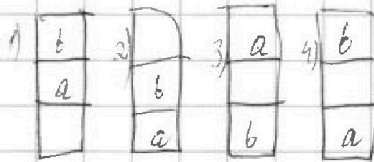
СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6:   
 1) 8 на 1 и 4 на 1  $\Rightarrow$  8 на 2, 4 на 3, 7   
 2) 8 на 1 и 7 на 1  $\Rightarrow$  8 на 1, 3 на 5

В слове 1 место  $d$ ,  $10 \geq 2$  разов макс.

где  $x \neq y < z$ . Возьмем  $a$  и  $b$  и посадим на  $d$  ряд  $z$  со  $d$  мест.  $a > b$ . Варианты:  $(1,1) = (2,1)$



Варианты разучив  $a$  и  $b$ :  $\frac{8 \cdot 4}{2!} = 16$  \*  $A$

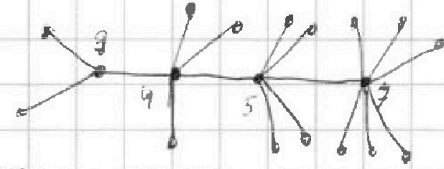
Составим таблицу макс. Будем считать на

2-й по ряду:  $\frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 20$  вар. Каждому вар. 2-й ряд или посадка ряда?

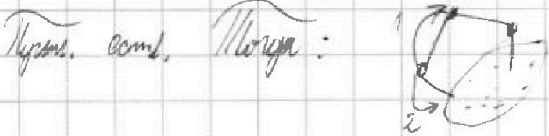
Тогда всего:  $16 \cdot 20 = 320$  вариантов.

16

и  $d$  точек. Макс.



Сложный граф. Заметим, что если  $ed$  нарушить, то нет циклов. Д-во.



Добавим инициал. Значит,

Ответ: 19.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-(x+y)(x+y-2)+2xy \geq 0$$

$$2xy \geq (x+y)(x+y-2)$$

$$2(x+y) - (x+y)(x+y-2) + 2xy - 1 + (x+y-2) = a - b$$

$$1) x+y \geq 2 \Rightarrow (x+y-2)(1-x-y) + 2xy - 1 = a - b \quad / \cdot (-1)$$

$$(x+y-1)(x+y-2) - 2xy + 1 = b - a \quad / - (x+y-2)$$

$$(x+y-2) - 2xy + 1 = b - a - x - y + 2$$

$$x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 4x - 4y - 2xy + 1 = b - a - x - y + 2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2 = b - a - x - y \quad / + (x+y)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 3y = b - a \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$2b = x^2 + y^2 - 3x - 3y + 1$$

$$2\sqrt{1-(x+y-2)} = x^2 + y^2 - 3x - 3y + 1$$

$$2a = (x+y-2)(1-x-y) + 2xy$$

$$2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} = (x+y-2)(1-x-y) + 2xy$$

$$2\sqrt{-(x+y)(x+y-2)+2xy} = (x+y-2)(1-x-y) + 2xy \quad / \cdot 2$$

$$-4(x+y)(x+y-2)+4xy = (x+y-2)^2(1-x-y)^2 +$$

$$x+y = 1 \leq x+y \leq 3$$

$$2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x=1 \text{ КЕДУ } y=1$$

$$1) x+y=1$$

$$2-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 2$$

$$y=0 \quad 1$$

$$\text{Далее } x+y=1: (1,0); (0,1)$$

$$2) x+y=2$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

$$\begin{matrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$(1,1); (2,0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} D > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow 4t^2 > 4 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Delta = (\sqrt{3}t)^2 - 4t^2 + 4 = 3t^2 - 4t^2 + 4 = -t^2 + 4 > 0 \quad / \cdot (-1) < 0$$

$$t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 > 4 \Rightarrow t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$$\begin{cases} a+b=40 \\ p \in \mathbb{P} \\ a=40-b \\ a, b \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 14p^5 \\ (40-2b)^2 + 15(40-b) = 14p^5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 38 \\ \hline 304 \\ + 190 \\ \hline 1444 + \frac{38}{520} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 32 \\ \hline 28 \\ + 34 \\ \hline 57 \\ + 544 \\ \hline 594 \end{array}$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = 14p^5 \quad (40-2b)(55-2b) = 14p^5$$

$$t = 40 - 2b \quad t(t+15) = 14p^5 \quad t(t+15) = 14 \Rightarrow \begin{cases} t = 14 \quad (1) \\ t = 15 \quad (2) \end{cases}$$

1)  $t = 14 \Rightarrow t+15 = p^5$

Заметим, что  $a-b \leq 38 \Rightarrow 38^2 + 15(40-38) = 1494 \Rightarrow 14p^5 \leq 1494 \Rightarrow p \leq 2014$

Возможные значения  $p$ :  $p=2 \Rightarrow p^5 = 32 \quad 14 \cdot 32 = 544 \leq 2014$  (и.)

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ + 1890 \\ \hline 243 \end{array}$$

$p=3 \Rightarrow p^5 = 27 \cdot 3 = 81 \quad 14 \cdot 81 = 1134 < 2014$  (и.)  $\Rightarrow p=2$

$$\begin{array}{r} 2401 \sqrt{49} \\ 343 \sqrt{7} \\ \hline 49 \sqrt{7} \\ \hline 7 \end{array}$$

Итого:  $t(t+15) = 544$   
 $t^2 + 15t - 544 = 0$   
 $t_1 = 40 - 2b = -32 \Rightarrow -2b = -72 \Rightarrow b = 36 \Rightarrow a = 4$   
 $t_2 = 40 - 2b = 14 \Rightarrow -2b = -26 \Rightarrow b = 13 \notin \mathbb{N}$

$$D = 15^2 + 544 \cdot 4 = 225 + 2176 = 2401 = 49^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{49^2}}{2} \quad t_1 = \frac{-15 - 49}{2} = -\frac{64}{2} = -32$$

$$t_2 = \frac{-15 + 49}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Ответ:  $a=4, b=36$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|}}{\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)}} = 1$$

$$1 - |x+y-2| \geq 0$$

$$-1 + y - 2x \geq -1$$

$$1 + x + y - 2 \leq 1 \iff \begin{cases} x+y-2 \leq 1 \\ x+y-2 \geq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{cases}$$

✓3

$$AB=CD \quad BC=12, \quad \cos(\angle CAN) = -\frac{1}{4}$$

$$BC=12 \implies BM=MN=NC = \frac{12}{3} = 4$$

$$\triangle ACN \sim \triangle DCM, \quad k=2 \implies CD=2AC = AB$$

Заметим,  $\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{NB} \implies AN$  - дуга  $\implies \angle CAN = \angle CAB$

Попр. косинусов:  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle CAB \neq$

$$12^2 = AC^2 + (2AC)^2 - 2 \cdot AC \cdot (2AC) \cdot (-\frac{1}{4})$$

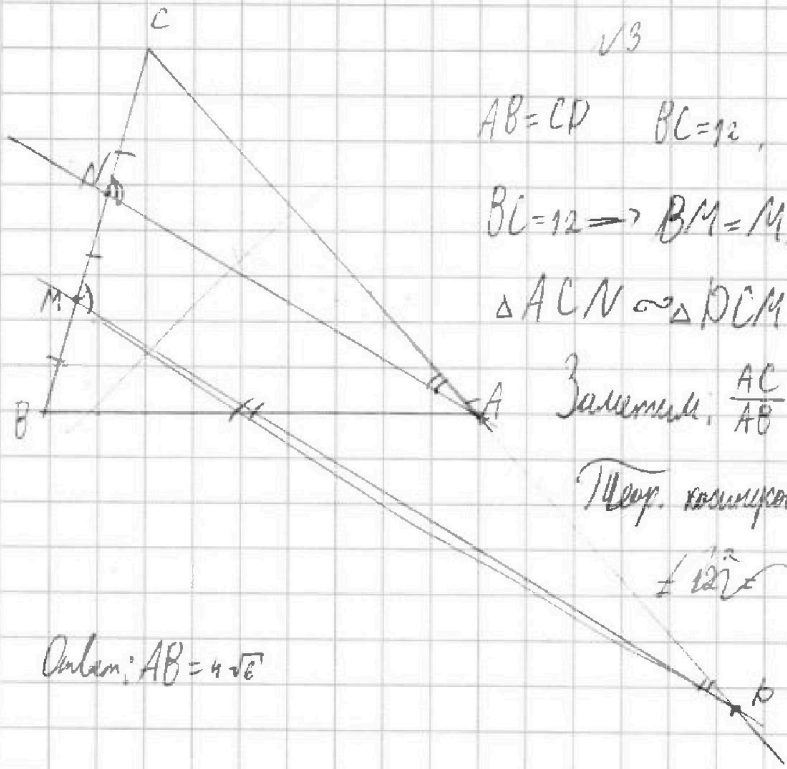
$$AC^2 + 4AC^2 + AC^2 = 144$$

$$6AC^2 = 144$$

$$AC^2 = 24$$

$$AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \implies AB = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB = 4\sqrt{6}$



$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1 \quad \begin{cases} 2(x+y)-(x^2+y^2) \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases} \quad x+y \geq 1 \implies x^2+y^2 \geq 1$$

$$-2(x+y)-(x^2+y^2)+1-|x+y-2|$$

$$1 \geq 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$1 \geq \frac{1}{2}(x(2-x) + y(2-y)) \geq 0$$

$$2(x+y)-(x^2+y^2) + 1 - |x+y-2| + 2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)}(1-|x+y-2|) = 1$$

$$1) \quad x+y \geq 2 \quad 2(x+y)-(x^2+y^2) - (x+y) + 2 + 2\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)}(2-(x+y)) = 0$$

$$-x^2-y^2+2xy = -2\sqrt{\dots}$$

$$2x+2y-x^2-y^2 = 2x+2y + \dots + x^2-y^2-2x^2 = 2(x+y) + (x-y)(x+y) - 2x^2 = (x+y)(x-y+2) - 2x^2$$

$$= 2x+2y - (x+y)^2 + 2xy = (x+y)(x+y+2) + 2xy$$