



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0.$$

$$\begin{cases} D > 0 & - \text{решаем}$$

$$\begin{cases} 9t^2 - 9 > 0 & - \text{приведем к квадратному трехчлену по т. Виета.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32t^2 - 36t^2 + 36 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4t^2 + 36 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \in \mathbb{N} \quad a - b = 12. \Rightarrow a = b + 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4, \quad p - \text{простое}$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4 \Rightarrow 19p^4 : 2 \Rightarrow p^4 : 2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow p = 2.$$

$\div 2$

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2^4$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 8.$$

$$2b^2 + 27b + 90 - 19 \cdot 8 = 0.$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0.$$

$$\left[b = -\frac{31}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \right]$$

$$\left[b = \frac{4}{2} = 2. \right]$$

$$b = 2 \Rightarrow a = 14$$

Ответ: $a = 14 \quad b = 2.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

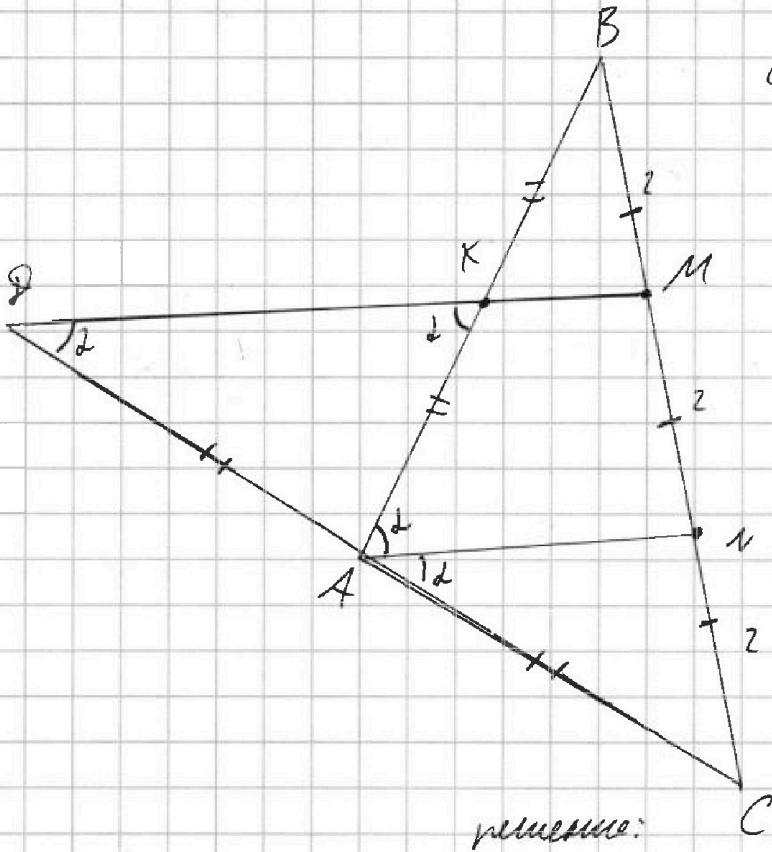
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = CD = ?$$

$$BC = 6$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$



1) $MK \parallel NA$ \Rightarrow KM - ср. лин. $\Rightarrow BK = AK = \frac{1}{2} AB$
 M - ср. BN

2) $AN \parallel MP$ \Rightarrow AN - ср. лин. $\Rightarrow PA = AC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$
 N - ср. MC

т.е. $AP = AC = BK = KA$.

тогда $\triangle AKP$ - н.о. , $\angle A$ и $\angle C$ равны $\Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$
 $\angle APK = \angle PMN = \angle PKA$ (т.к. AKP - н.о.) $\Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$

3) по теореме $AC = x$, тогда $AB = 2AK = 2AC = 2x$.

по т. косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC = 4x^2 + x^2 - (-\frac{3}{4}) \cdot 2x \cdot x = 5x^2 + 3x^2 = 8x^2$$

$$6^2 = 8x^2$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{8}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = 2x = 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1,5\sqrt{2}$$

ответ: $3\sqrt{2}$ $[AB = 2x = 3\sqrt{2}]$ ответ: $3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

переходим на язык графов. ~~граф~~ - вершины, ребра - ребра, тогда по усл. граф связный и не имеет циклов (т.к. маршрут между городами ^{среди них} единственен), но тогда наш граф является звездой.

Пусть x - кол-во деревьев из которых вытекает 1 город, тогда в графе x вис. вершин (их столько равно!)

Всего в графе $(x+4)$ вершин, тогда ребер в графе $(x+4-1) = \underline{x+3}$

посчитаем кол-во ребер через сумму степеней вершин:

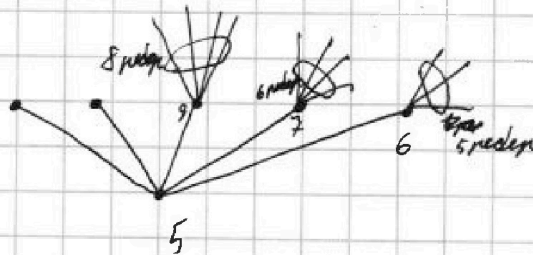
$$\text{кол-во ребер} = \frac{5+6+3+3+x}{2} = \frac{27+x}{2}$$

$$\text{т.е. } x+3 = \frac{27+x}{2}$$

$$2x+6 = 27+x$$

$$x = 21 \Rightarrow \text{вершин в графе равно } \underline{\underline{25}}$$

пример:



$$\text{всего вершин: } 1 + 5 + (8 + 6 + 3) = 11 + 14 = \underline{\underline{25}}$$

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2.$$

ОПЗ:

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x-y-1| \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2+2x-1-y^2-2y-1 \geq 2 \\ |x-y-1| \leq 1 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-y-1=1 & (1) \\ x-y-1=0 & (2) \\ x-y-1=-1 & (3) \end{cases}$$

1) $x-y-1=1 \Rightarrow x=y+2.$

$$(y+2-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$2(y+1)^2 \leq 2$$

$$(y+1)^2 \leq 1$$

$$\forall x \begin{cases} y+1=1 \\ y+1=0 \\ y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ x=1 \\ y=-1 \\ x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

подставляем в уравнение и получаем, что должны быть x и y не являются логично возвращены

2) $x-y-1=0 \Rightarrow x=y+1$

$$(y+1-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

заметьте, что при $y \leq -2$: $y^2 + (y+1)^2 \geq 5$ - т.е. не подходит
и также при $y \geq 1$: $y^2 + (y+1)^2 \geq 5$ - т.е. не подходит.
 $y=0$ и $y=-1$ - подходят.

$\begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ подставляем в уравнение и получаем, что $(1;0)$ и $(0;-1)$ - корни

$$(3) \quad x - y - 1 = -1 \Rightarrow x = y$$

$$(y-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$2y^2 + 2 \leq 2$$

$$2y^2 \leq 0$$

$$y^2 \leq 0$$

$y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ подставляем в уравнение и получаем, что $(0;0)$ - не решение

Ответ: $(1;0)$ $(0;-1)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

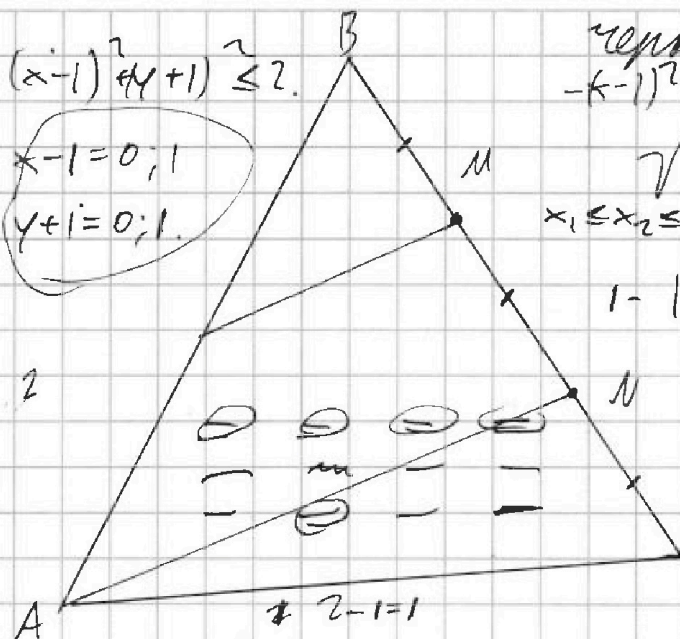
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-1=0; 1 \\ y+1=0; 1. \end{cases}$$

Чернышкин
 $-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 \geq 0 \Rightarrow 2$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} =$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$



$$1 - |x-y-1| \geq 0 \quad (1) \quad x-y=2$$

$$x=2+y$$

$$(2+y-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

$$2(y+1)^2 \leq 2$$

$$\begin{cases} x-y-1=1 \\ x-y-1=0 \\ x-y-1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} (y+1)^2 \leq 1 \\ y \leq -2 \end{cases}$$

$$-x^2 + 2x - y^2 - 2y \geq 0$$

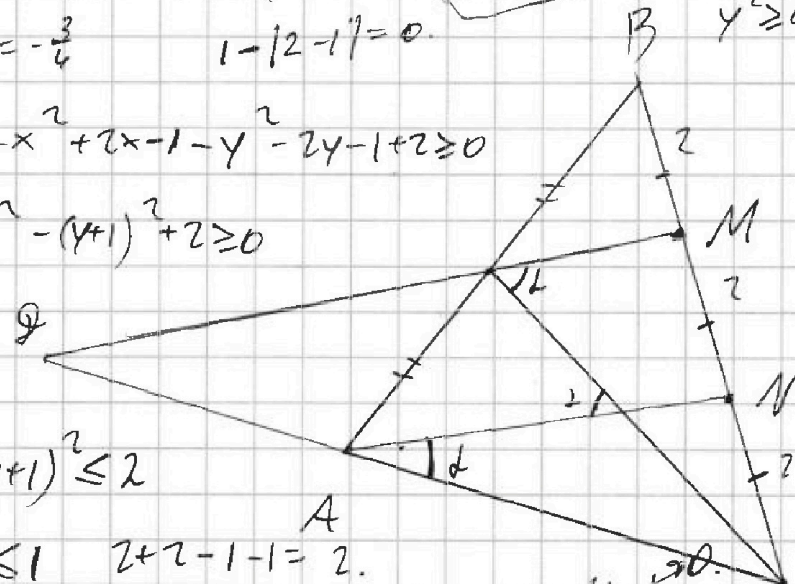
$$\begin{cases} x-y=2 \\ x-y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

AB-CQ=?
 (2) $x=y+1$
 $y^2 \geq 4$

$$\cos(\angle EM) = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4} \quad 1 - |2-1|^2 = 0$$

(2) 0:
 $4 \rightarrow 0$
 $-x^2 + 2x - 1 - y^2 - 2y - 1 + 2 \geq 0$
 $-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 \geq 0$



(CAN)
 $y^2 + (y+1)^2 \leq 2$
 $y = -1, 0;$

093:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ |x-y-1| \leq 1 \end{cases} \quad 2+2-1-1=2$$

(3) $x=y$
 $(y-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$
 $y^2 - 2y + 1 + y^2 + 2y + 1 \leq 2$
 $2y^2 \leq 0 \quad 2y^2 + 2y + 1 \leq 2$
 $y=0 \quad 2y^2 + 2y - 1 \leq 0$
 $y = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$

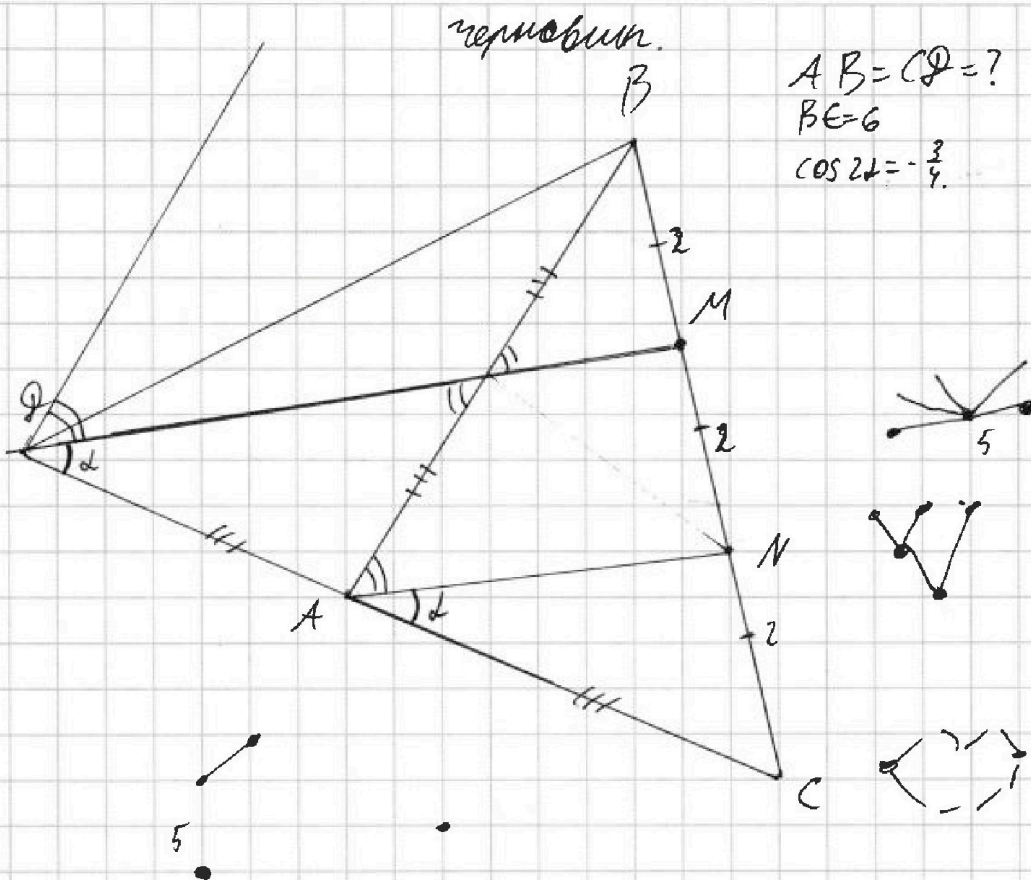


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

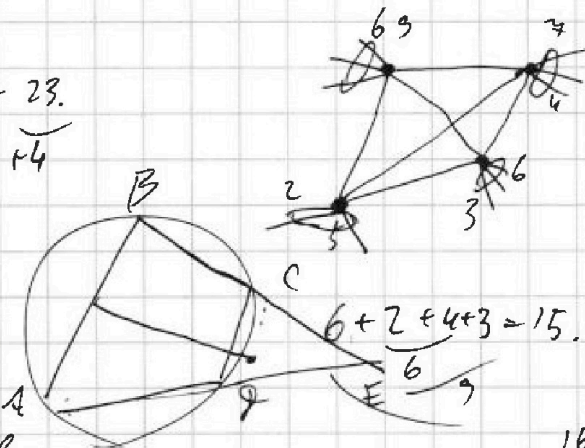
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\leq 4 + 5 + 6 + 8 = 23$
 $\uparrow 4$ $\uparrow 4$

max 23 - од.
 min 15 - од.



ев матрица \rightarrow
 \Rightarrow нет циклов
 \Rightarrow дерево.

$1 + 5 + 7 + 6 + 5 =$
 $= 10 + 3 + 6 = 25$

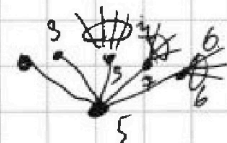
x - в.с. в.

$(x + 4 - 1)$ - ребер.

$x + 3$ ребра в графе.

$x + 3 = \frac{9 + 7 + 6 + 5 + x}{2}$

$2x + 6 = 27 \Rightarrow x = 21$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

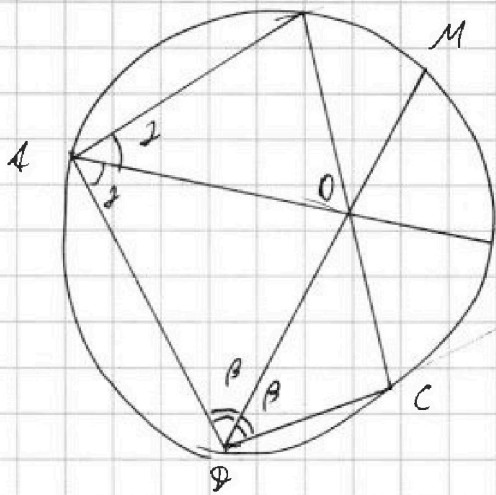
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 0
1 2
2...11 3...11

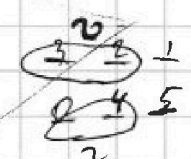
$10+9+...+1=55$ черновик.

$55+110+55=220$



M 1...10
2...11

$\begin{cases} BN = NP \\ AM = MP, MC \end{cases}$

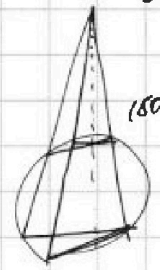
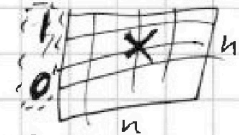


$BN - AM = NP - MC$

$MN - AB = MP + PC - MN$

$AB = PC, AB + CD = 2MN$

$MN = \frac{AB + CD}{2}$



$180 - 90 + 2 = 90 + 2$

$1 \times 2 = 2$

$7 \cdot 7 \cdot 7$

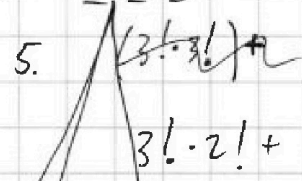
$2 \times 3 = 6 +$

$\frac{5}{D}$

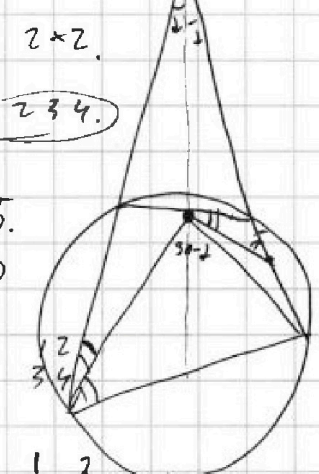
за 5 - сподогно

$n \times n = n!$ черновик?

$n \times n = (n+1)!$	1	2	4
$n(n+1)$		3	5
	1	2	4 1:



$3! \cdot 2! + 1234$



1 3	2 3	1 3	1 2	1 2
2 4	4	2 4	3 4	4 3

1: 7, 1: 7, 2: 7, 6

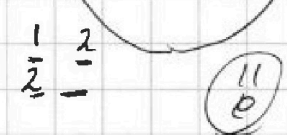
1, 2: 7, 7, 2, 3: 6

1, 3: 6, 7, 8, 2, 4: 5

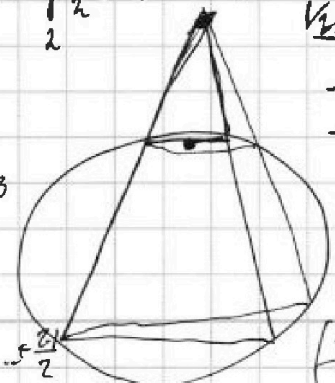
1, 8: 1, 7, 8, 9, 2, 8: 1

1	1 2	1 2	1 2	1 2
1 3	3 4	3 4	4 3	1 3
2 4	2 4	2 4		

V_1, V_2, V_3, \dots



1...7, 2...8, 3...9, 2...7, 3...8, 4...9, 1, 2...10



-	-	-
-	-	-
1	-	-
-	-	-

1 3	3 1
2 4	4 2
1 2	2 1
3 4	4 3
1 2	2 1
4 3	3 4

$1 \dots 9 = \frac{9 \cdot 8}{2} + \frac{6 \cdot 7}{2} + \dots + \frac{2 \cdot 1}{2}$

$(\frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{6 \cdot 7}{2} + \dots + \frac{1 \cdot 2}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

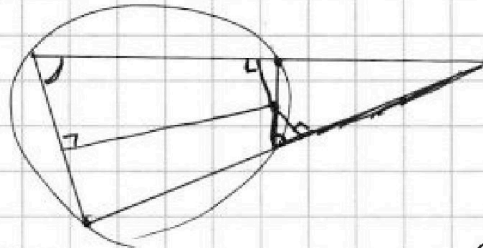
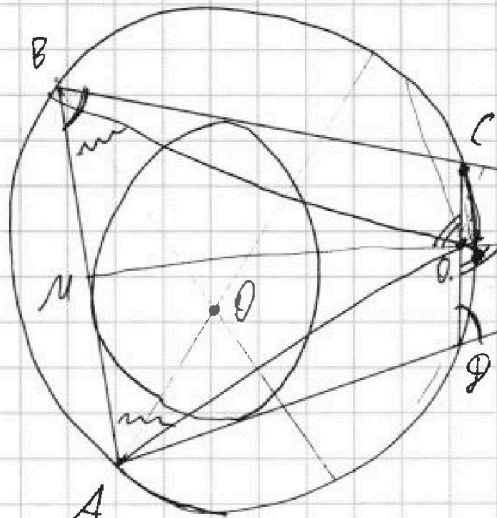
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$BE \sim \triangle EBO$.

черновик



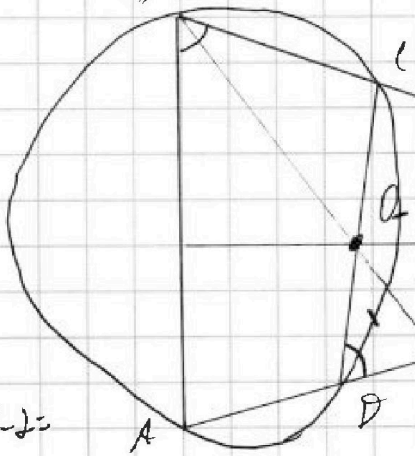
$$EM^2 = EC \cdot EB = EP \cdot PA$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow b = 2a$$

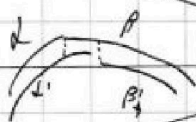
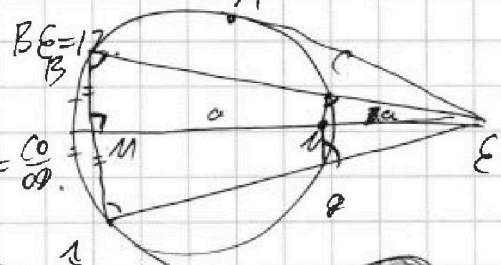
$$\frac{a}{2} \cdot (AE + AM) = EP = 3a \cdot 2AM = 6a \cdot AM$$

$$\frac{EA}{6a} = \frac{AM}{MB} = \frac{CO}{OP} \quad \frac{AE + AM}{12} = EP + PO \quad ?$$

$EP + PO \quad ?$



$$AM = \frac{12}{11} \quad \frac{EA}{12} = \frac{AM}{MB} = \frac{CO}{OP}$$



$$\angle = \beta \quad \angle - \alpha' = \beta - \beta'$$

$AME \sim \triangle PKE$

$$\frac{AM}{PN} = \frac{ME}{NE} = \frac{3}{2}$$

$$PN = \frac{2AM}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{11} = \frac{16}{11}$$

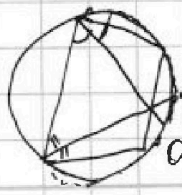
$$EP + PN = \frac{2}{3} \left(\frac{EA}{12} + \frac{AM}{12} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{33}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1$$

$$1 + x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 = 1$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$y^2 = 1$$



$$\begin{matrix} 0 & \pm & 1 \\ \pm & 1 & 0 \end{matrix}$$

