



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) = -4t^2 + 36 = -4(t^2 - 9) = -4(t-3)(t+3)$$

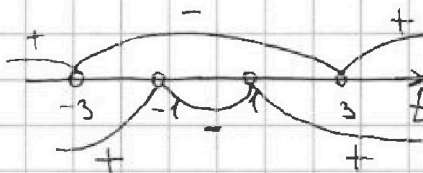
Чтобы было 2 различных корня, D должен быть больше 0,
т.е. $-4(t-3)(t+3) > 0$

По т. Виета: $x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9 = 9(t^2 - 1) = 9(t-1)(t+1)$, произведение корней должно быть положительным по условию, т.е.

$$9(t-1)(t+1) > 0;$$

Решим систему:

$$\begin{cases} -4(t-3)(t+3) > 0 \\ 9(t-1)(t+1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$a^2 + b^2 + 2ab + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

Если $a-b=12$, $b=a-12$, тогда $(2a-12)(2a-9) = 2(a-6)(2a-9) = 19p^4$;

$2(a-6)(2a-9) \equiv 0 \pmod{2}$, значит и $19p^4 \equiv 0 \pmod{2}$, но $19 \not\equiv 0 \pmod{2}$,
тогда $p^4 \equiv 0 \pmod{2}$, но p - простое, единств. простое число, кратное 2 - 2;
тогда $p=2$, $2(a-6)(2a-9) = 19 \cdot 16$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 152$$

$$2a^2 - 21a - 98 = 0$$

$$D = 441 + 98 \cdot 2 \cdot 4 = 1225 = 35^2$$

$$a = \frac{21 + 35}{4} = 14$$

$$a = \frac{21 - 35}{4} = -3,5$$

но по условию a - натуральное, значит
 $a=14$, $b=a-12=14-12=2$.

Ответ: $a=14$, $b=2$.

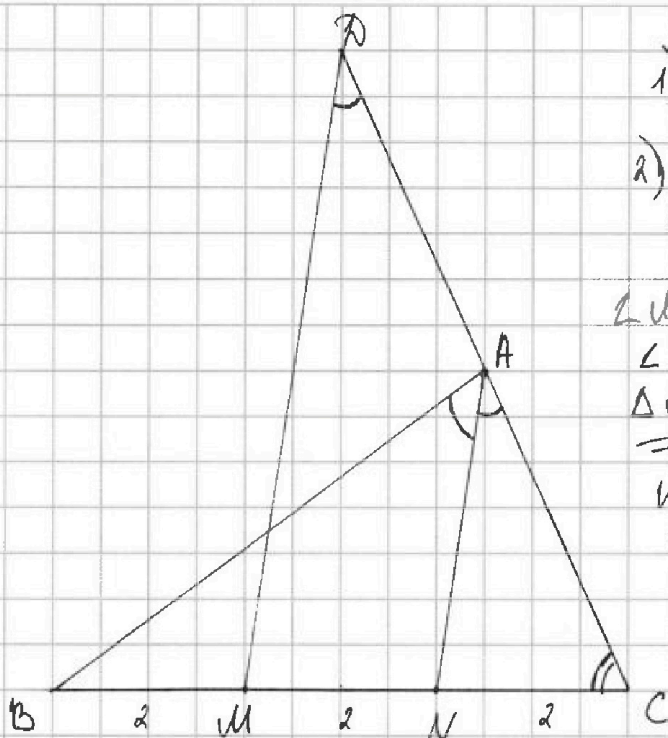


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.



1) $BC = 6, BM = MN = NC = 2;$

2) $MD \parallel AN$ (по условию)
 CD - секущая, значит

$\angle MDC = \angle NAC$ (как соотв.);

$\angle MCD$ - общий \angle
 $\triangle MDC$ и $\triangle NAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle NAC$

по 2 углам;

тогда $\frac{CD}{AC} = \frac{MC}{NC} = \frac{4}{2} = 2$

значит $CD = 2AC, AC = AD,$
 $AB = CD = 2AC$ (по усл.)

3) $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{BM}{NC} \Rightarrow AN$ - бис-са $\angle BAC$ (по св-ву бис-сы)

4) Пусть $AC = x$, тогда $AB = 2x$;
Замкнем \triangle косинусов для $\triangle BAC$:

$BC^2 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(2\angle CAN)$

$36 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 8x^2$

$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}, x = \frac{3}{\sqrt{2}}, 2x = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}.$

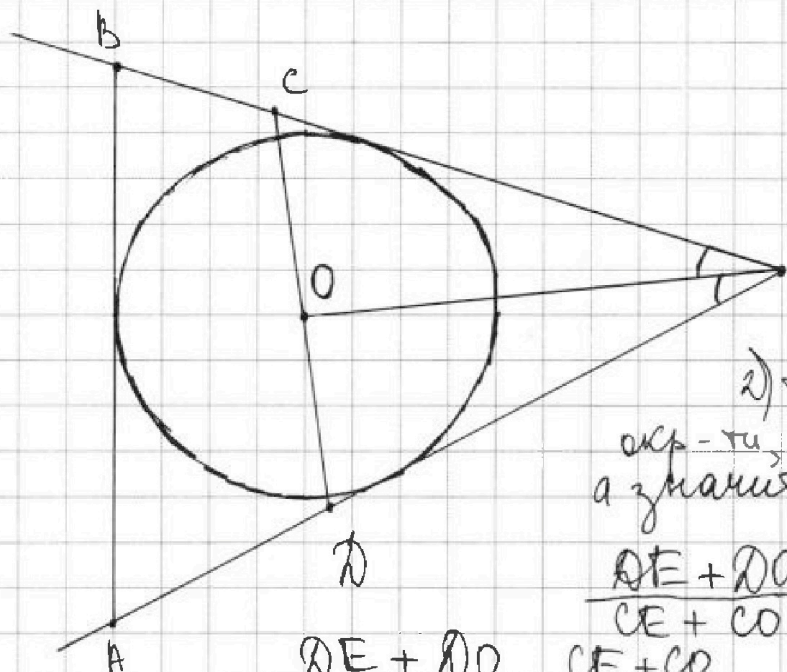


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



1) согласно теореме
Е относительно окружности
(ABCD):
 $BE \cdot CE = EA \cdot ED$

$$E \quad \frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE}$$

2) т.к. O - ц. впис.
окр-ти, O ∈ дуге-се ∠BEA,
а значит $\frac{DE}{CE} = \frac{DO}{OC} = \frac{BE}{AE}$

$$\frac{DE + DO}{CE + CO} = \frac{BE}{AE}$$

$$\frac{DE + DO}{BE} = \frac{CE + CO}{AE}$$

3) если $CO > BE$ или $DO > AD$, то $DE + DO > AE$, тогда

$$\frac{DE + DO}{BE} < 1;$$

если $DO = AD$, то $DE + DO = AE$, $\frac{DE + DO}{BE} = 1$,

$$DE + DO = AE.$$

Ответ: 12.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16

Представим деревья и дороги между ними в виде графа.

По условию мы можем добраться из любой вершины

в любую другую, причем единственным образом, а значит

это связный граф без циклов. По определению такой

граф - дерево, а значит если в нем n вершин, то

ребер $n-1$. Также в связном графе сумма степеней

всех вершин равна удвоенному кол-ву ребер, т.к. если

мы сложим все степени, каждое ребро посчитается

2 раза. Тогда пусть кол-во деревьев - n , тогда

дерево $n-1$, а сумма степеней ~~в~~ вершин ~~степеней~~ 1

равна $5+6+7+9+(n-4) = n+23$.

Получаем уравнение:

$$23+n = 2(n-1)$$

$$n = 25.$$

Ответ: 25.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

$$2) \sqrt{1-|x-y-1|} \geq 0 \quad | \quad 1) 2x-2y-x^2-y^2=1-(x-y-1)^2-2xy$$

$$1-|x-y-1| \geq 0$$

$$-1 \leq x-y-1 \leq 1$$

$0 \leq x-y \leq 2$, но т.к. x и y - целые, возможно 3 случая:
 $x-y=0$; $x-y=1$; $x-y=2$. Рассмотрим каждый из них.

2.1) $x-y=0$, $x=y$

$$\sqrt{1-(x-x-1)^2-2x^2} = \sqrt{1-1-2x^2} = \sqrt{-2x^2} \geq 0, \text{ только если } x=0, \\ \text{тогда } 0+0=0 \neq 2 \text{ - не подходит}$$

2.2) $x-y=1$, ~~$x=y$~~ $y=x-1$

$$\sqrt{1-(x-x+1-1)^2-2x(x-1)} + \sqrt{1-|x-x+1-1|} = \\ = \sqrt{-2x^2+2x+1} = 1$$

$$-2x^2+2x+1 = 1 \quad \text{~~2x^2+2x+1=0~~} \\ -2x(x-1) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 & y=-1 \text{ - подходит} \\ x=1 & y=0 \text{ - подходит} \end{cases}$$

2.3) $x-y=2$, $y=x-2$

$$\sqrt{1-(x-x+2-1)^2-2x(x-2)} + \sqrt{1-|x-x+2-1|} = \\ = \sqrt{-2x^2+4} = 2 \\ -2x^2+4 = 4 \\ x=0, y=-2 : 0 \neq 2 \text{ - не подходит.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Итак, $x - y = 0$ и $x - y = 2$ не подходят,

значения $x - y = 1$,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(0; -1), (1; 0)$

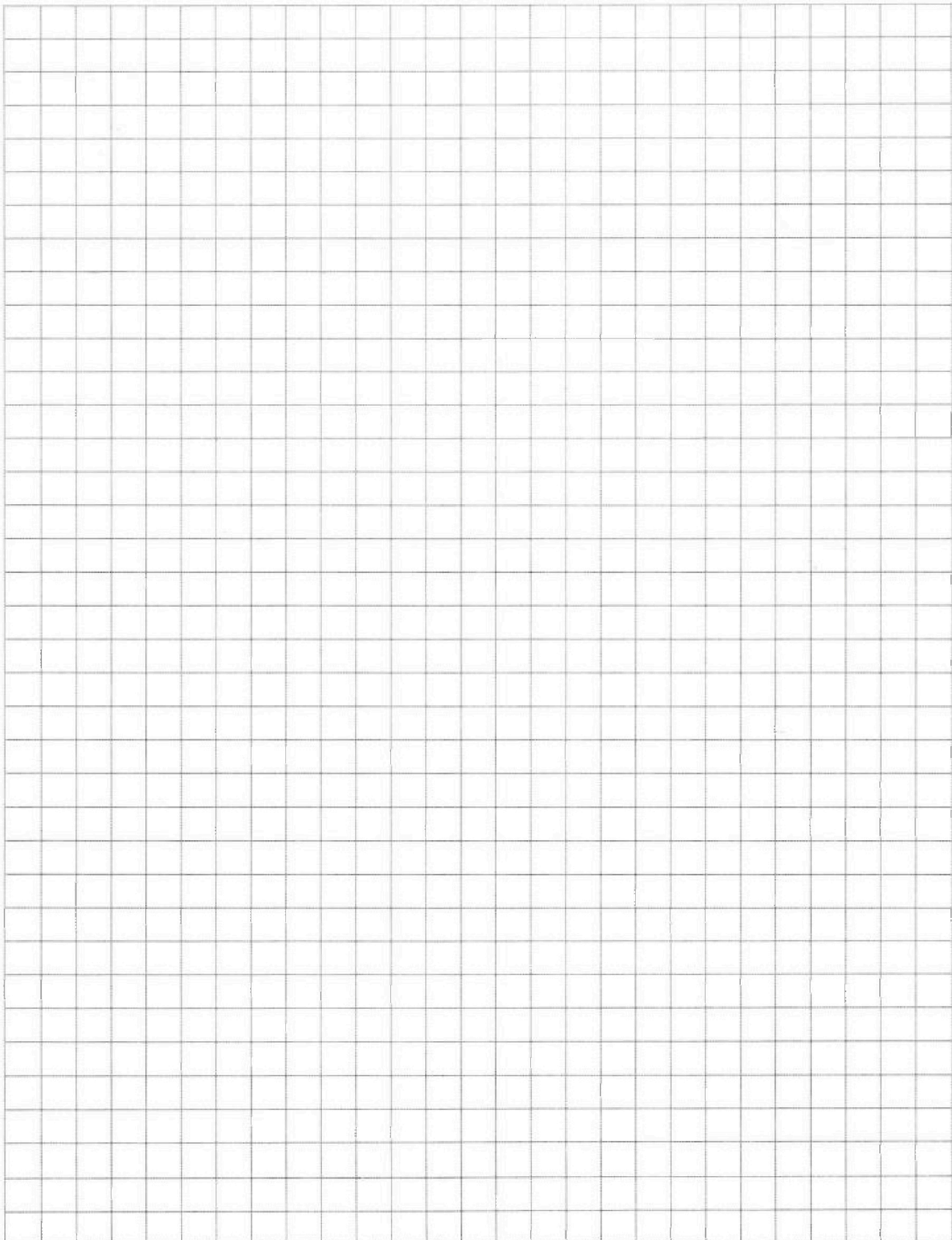


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

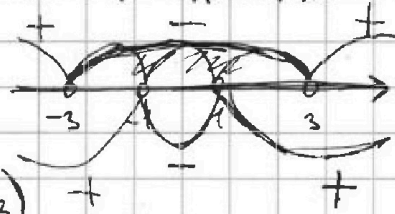
$$\cos 2(\angle CA \dots N) = \dots$$

$$32t^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = -4(t^2 - 9) = -4(t-3)(t+3) \geq 0$$

$$x_1 + x_2 = -4\sqrt{2}t$$

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$$

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) \leq 0 \\ 4(t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$



$$(-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$x^2 + 8\sqrt{2}x + 27 = 0$$

$$D = 128 - 4 \cdot 27 = 20 = 4 \cdot 5$$

$$x = \frac{-8\sqrt{2} \pm 2\sqrt{5}}{2} = -4\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$$

$$2) a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 5b = (a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = (2b+12)(2b+15) = 2(b+6)(2b+15) = 4(2b+15) = 4(2a-12)(2a-9) = 2(a-6)(2a-9)$$

$P: 2$

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 168$$

$$2b^2 + 15b + 12b + 90 = 152$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$128 + 524 - 62 = 0$$

$$2a^2 - 9a - 12a + 54 = 152$$

$$2a^2 - 21a - 98 = 0$$

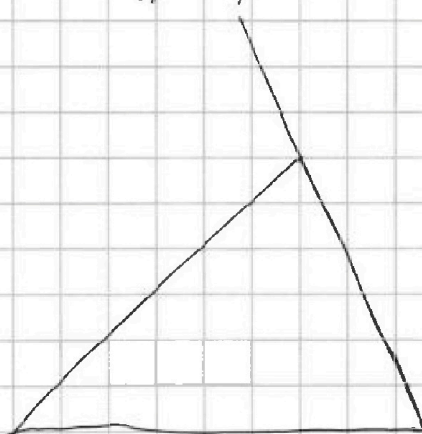
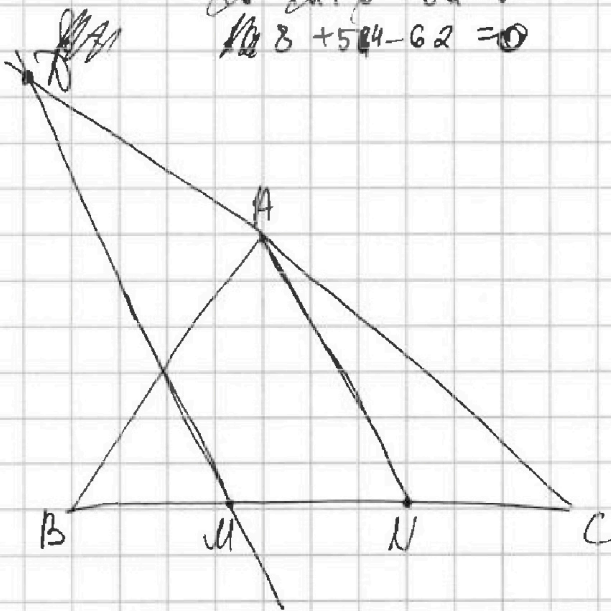
$$D = 441 + 98 \cdot 8 = 1225 = 35^2$$

$$a = \frac{21 \pm 35}{4}$$

$$a = 14, b = 2$$

$$a = -3,5$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ + 35 \\ \hline 1225 \\ + 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1 - (x-y-1)^2 - 2xy} + |1 - (x-y-1)| = 2$
 $\sqrt{(1 - (x-y-1))(1 + (x-y-1) - 2xy)}$
 $x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y - 4$
 $+ 2x - 2y - 2 + 1$
 $a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
 $BE \cdot CE = AE \cdot ED$
 $\frac{BE}{AE} = \frac{CE}{ED}$
 $\sqrt{1 - a^2 - 2b} + \sqrt{1 - a} = 2$
 $1 - a^2 - 2b + 1 - a = 2$
 $\frac{BE}{AE} = \frac{OE}{CE} = \frac{OE}{CO} = \frac{OE + OD}{CE + CO} = \frac{BE}{AE}$
 $\frac{OE + CE}{2C} = \frac{BE}{AE}$
 $\frac{27 + (n-4)}{2} = n-1$
 $27 + n = 2n - 2$
 $29 = n$
 $25 = n$

n вершин
 n-1 ребер



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a} = 2$~~ ~~$\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a} = 2$~~ $2(x-y) \geq x^2 + y^2$

$\sqrt{1-(x-y-1)^2-2xy} + \sqrt{1-x-y-1} = 2$ $1-(x-y-1)^2 \geq 2xy$

$|x-y-1|=a, xy=b$ $0 \leq |x-y-1| \leq 1$ $-1 \leq x-y-1 \leq 1$ $x-y \geq \frac{x^2+y^2}{2}$
 $\sqrt{1-a^2-2b} + \sqrt{1-a} = 2$ $0 \leq x-y \leq 2$

~~$1-2b + 1-a + 2\sqrt{1-a} + a - a^2 + a^3 - 2b + 2ab = 4$~~ $x-y \geq \frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$

$2\sqrt{a^3-a^2+a(2b-1)+1-2b} = 2 + 2b + a^2 + a$

$2\sqrt{a^2(a-1) + (2b-1)(a-1)} = 2b + 1 + a(a+1) + 1$ $x \geq \frac{y(x+1)}{1-y} \geq 0$

$2\sqrt{(a-1)(a^2+2b-1)} = 2(b+1) + a(a+1)$ $-xy \geq 0$
 $xy \neq \emptyset$

$4(a^3+2ab-a-a^2-2b+1) = 4b^2+8b+2+a^2(a^2+2a+1)+4a(b+1)(a+1)$
 $4a^3 + 8ab - 4a - 4a^2 - 8b + 4 = 4b^2 + 8b + 2 + a^4 + 2a^3 + a^3 + 4a^2b + 4ab + 4a^2 + 4a$

$4ab + 2a^3 - a^4 - 2a^2 - 8a - 16b - 4b^2 - 4a^2b + 2 = 0$

$2a^2(a-2b) + 8(a-2b)$

$-2xy + (a+1)^2 = x^2 + y^2 - 2xy - x^2 - y^2$
 $-2xy = (a+1)^2 - x^2 - y^2$

$2(x-y) + (x-y)(x+y) + 2x^2$
 $(x-y)(x+y+2) + 2x^2$ 11: 10-10,