



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$bq^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

√1

Пусть b - первый член прогрессии

q - знаменатель, тогда

$$bq^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$q^8 = \frac{\sqrt{15x+6} \cdot (x-3) \sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{15x+6}} = (x-3)^2 \quad \left(\frac{bq^9}{bq^3} = q^6\right)$$

$$bq^9 = x+4$$

$$q = \sqrt[4]{|x-3|} \quad q^6 = \sqrt{(x-3)^3}$$

$$bq^9 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = x+4 \quad (bq^9 \cdot q^6 = bq^9)$$

$$15x+6 = x^2+8x+16 \quad x > 3$$

$$\sqrt{15x+6} = x+4 \quad x > 3$$

$$-15x-6 = x^2+8x+16 \quad -4 \leq x < 3$$

$$\sqrt{-15x-6} = x+4 \quad x < 3$$

$$(x-2)(x-5) = 0 \quad x > 3$$

$$x = \{5\} \quad (x > 3)$$

$$(x+22)(x+1) = 0 \quad x < -\frac{3}{2}$$

$$x = \{-1, -22\} \quad (-4 \leq x < 3)$$

Ответ: $\{5, -1\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x - 19 = 0 \quad \Delta = 20$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: $(-1 + \sqrt{5}; 35, 0)$ ~~$(-1 - \sqrt{5}; 35, 0)$~~

• Если $a > 6$ ($x > 6$) то $2\sqrt{ab} > 6 \quad \sqrt{ab} > 3$

~~$\sqrt{ab} > 3$~~ ~~$ab > 9$~~

~~$ab = 9$~~ ~~$-x^2 - 2x + 35 = \frac{9}{4}$~~ ~~$x^2 + 2x - \frac{131}{4} = 0$~~

~~$x = 1 \pm \frac{\sqrt{435}}{2} = 1 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$~~

~~Подходят только $x = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$~~

Если $a < 6$ ($x < 6$) то $2\sqrt{ab} < 6$

~~$\sqrt{ab} = 4$~~ ~~$ab = 16$~~ ~~$-x^2 - 2x + 35 = 16$~~ ~~$x^2 + 2x - 19 = 0$~~

~~не подходит подходит $x = 1 + 2\sqrt{5}$~~

~~$x = 1 + 2\sqrt{5}$~~ ~~$\leftarrow b < 6 \rightarrow$~~ ~~каждый раз $x > 6$~~

• Если $a < 6$ ($x < 6$) то $2\sqrt{ab} < 6 \quad \sqrt{ab} < 3$

$\sqrt{ab} = \frac{3}{2}$ $ab = \frac{9}{4}$ $-x^2 - 2x + 35 = \frac{9}{4}$ $x = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Подходит только $1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $(1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}; 35, 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x}$$~~

N2

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

Рассмотрим (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq 20 \quad -3y + 90 = \sqrt{225-z^2} \\ \cancel{20 \leq y \leq 35} \quad -y + 50 = \sqrt{225-z^2} \\ \cancel{y \geq 35} \quad 3y - 90 = \sqrt{225-z^2} \end{array} \right.$$

Но тогда $-3y + 90 \leq 15 \quad y \geq 25 \quad (z=0)$

$$-y + 50 \leq 15 \quad y \geq 35$$

$$3y - 90 \leq 15 \quad y \leq 35$$

\Rightarrow Если решение есть, то $y = 35 \quad z = 0$

~~$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{-x^2-2x+2+3z}$$~~

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{-x^2-2x+35} \quad \begin{array}{l} x+2=a \quad 5-x=b \\ a+b=12 \end{array}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 6 = 2\sqrt{ab} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 6$$

$$a+b - 2\sqrt{ab} = 4ab - 24\sqrt{ab} + 36$$

$$ab - \frac{1}{2}\sqrt{ab} + 6 = 0$$

$$(\sqrt{ab} - 4)(\sqrt{ab} - \frac{3}{2}) = 0$$

возводим в квадрат

$$\boxed{\sqrt{ab} = \frac{3}{2}} \quad ab = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{\sqrt{ab} = 4} \quad ab = 16$$

~~$$x^2 - 2x + 35 = 16$$~~

~~$$x^2 - 2x - 19 = 0$$~~

~~$$\sqrt{ab} = \frac{3}{2}$$~~

не нужно решать по 1 и 2

~~$$(\sqrt{ab} - 4)(\sqrt{ab} - \frac{3}{2}) = 0$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13

$$\cos 2x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + p \quad | \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4 \cos^2 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Рассмотрим производную $f(t) = 4t^2 - 6t + 3 - p$

$$f'(t) = 12t - 6$$

Заметим, что $f'(t) \geq 0$ всегда $\Rightarrow f(t)$ - всегда растёт (в $t = \frac{1}{2}$ - точка перегиба)

Значит $f(t)$ - имеет только один корень вне зависимости от p

Тогда рассмотрим значения p , при которых

$$f(-1) = 0 \quad \text{и} \quad f(1) = 0 \quad | \quad \text{по Т. Безу:}$$

$$(t+1)(4t^2 - 10t + 13) = 0 \quad | \quad 4t^2 - 3t + 13 = 0 \quad p = -10$$

$$(t-1)(4t^2 - 2t + 1) \quad | \quad t^2 - 6t^2 + 3t - 1 = 0 \quad p = 4$$

(p - зависит только на свободный член по этому с помощью Т. Безу мы можем однозначно восстановить многочлен с единственным корнем)

Ответ: при $p \in [-10, 4]$ будет хотя бы

одно решение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

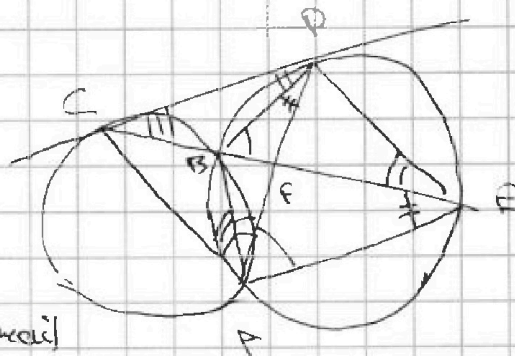
$CE \cap AD = F$

$\angle EAD = \angle EBD$

$\angle DCB = \angle DAB$

$\angle DCB = \angle BAC$

*(интересно
и аксиоматично)*



$\angle DBE = \angle BCD + \angle BDC \Rightarrow AF$ - диаметр в $\triangle ACE$

$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{25}{9}$ по свойствам диаметра, пусть $AE = 25$
(BA - диаметр) *(треугольник равнобедренный)*

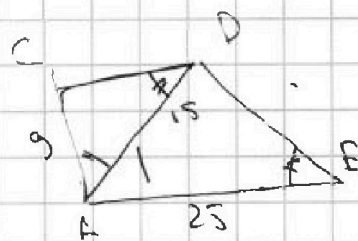
$\angle ADB = \angle BEA \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE \Rightarrow$ ~~равност.~~

$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$

$AD = \sqrt{AC \cdot AE} = 15$

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACD$

$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$
 $\angle CAD = \angle DAE$
 $\angle AED = \angle ACD$



$\frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

Ответ: $\frac{5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Подсчитаем кол-во способов выбрать закуску так, чтобы была симметрия относительно

средней линии:

$$C_{15000}^8 + C_{15000}^4 - \cancel{C_{15000}^8} - \cancel{C_{15000}^4} = 2C_{15000}^4$$

(сначала считаем относительно первой, затем второй, ~~после второго повторения~~)

(можно выбрать чтобы 4-ре в одной половине, а остальные определятся сами) ~~павло~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$2\sqrt{ab} > 6$$

$$x + 7 > 5 - y$$

$$9b > 9$$

$$y > 6$$

$$|40 - 9| = 31$$

$$27$$

$$4$$

$$1 - 6$$

$$\sqrt{1 + 80x}$$

$$2\sqrt{20}$$

$$4\sqrt{50}$$

$$\begin{matrix} 2,2 \\ \times 2,2 \\ \hline \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2,5 \\ \times 2,5 \\ \hline \end{matrix} \quad 62,5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

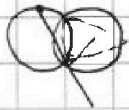
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

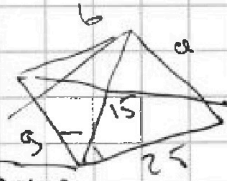
$$CB \cdot \overline{CB} = 9 \cdot 34 = 302$$

~~302~~
302

$$CD = \sqrt{CB \cdot B_3}$$



$$\sqrt{8+\sqrt{5}} - \sqrt{4-\sqrt{5}} = 2$$

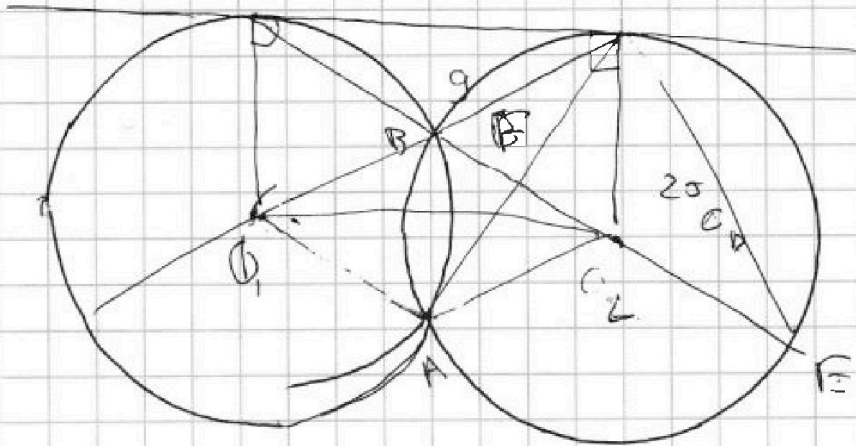
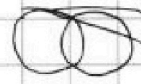


$$2 = \sqrt{27+4\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{8-\sqrt{5}} - \sqrt{4+\sqrt{5}} = 8$$

~~3~~
3\sqrt{5}

$$8-\sqrt{5}+4-\sqrt{5}-2\sqrt{32+4\sqrt{5}-5} = 2\sqrt{22+4\sqrt{5}}$$



$$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB} =$$

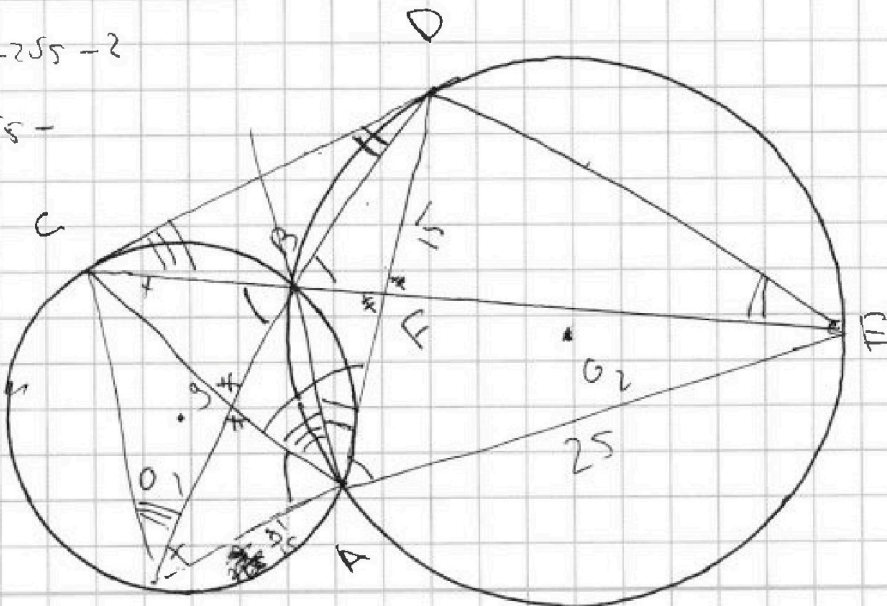
$$8-\sqrt{5}+4-\sqrt{5}$$

$$4-2\sqrt{5}-2$$

345

3\sqrt{5}

$$4-\sqrt{5}-$$



$$\frac{AC}{BO} = \frac{AD}{AE}$$

$$AD = AC \cdot AE$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$AD^2 = AC \cdot AE$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x - 6\cos^2 x + 3 - p = 0$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 = p$$

$$\begin{cases} 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 4 = 0 \\ 4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$12t^2 - 12t + 3$$

$$(\cos y + 1)(4\cos^2 y - 10\cos y + 3) =$$

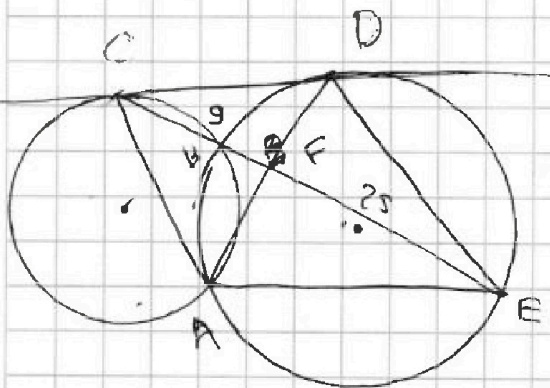
$$4\cos^2 y - 10\cos y + 3 + 3\cos y + 4\cos^2 y - 10\cos y + 3 =$$

$$= 4\cos^2 y - 6\cos^2 y + 3\cos y + 3 =$$

$$(\cos y - 1)(4\cos^2 y - 2\cos y + 3) =$$

$$= 4\cos^2 y - 2\cos^2 y + 2\cos y - 4\cos^2 y + 6\cos y - 3 =$$

$$= 4\cos^2 y - 6\cos^2 y + 3\cos y - 1 = 0 \quad p = 4$$



$$\sum x = \frac{10}{3} = 13$$

$$\frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$$

$$1 - 1$$

$$3\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$3(2\cos^2 x - 1) =$$

$$6\cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 4$$

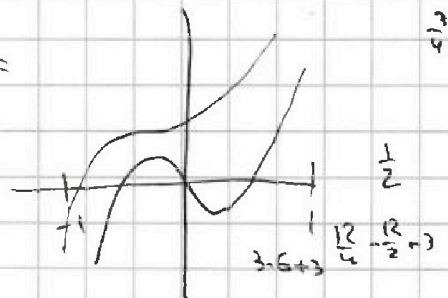
$$4 - 6 + 3 + 4 = 0$$

$$-\frac{4}{2} - \frac{6}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4^2}{2} =$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 4 =$$

$$p = -10$$

$$p \in [-10; 4] - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4$$



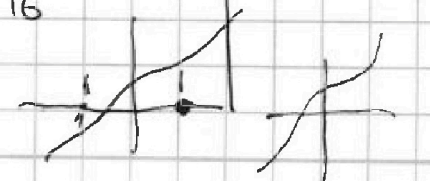
$$4a^2 - 10a + 6$$

$$D = 100 - 16b = 0$$

$$100 = 16b$$

$$b = \frac{100}{16}$$

$$\frac{1}{4}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$ $z < 4$

$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$

$(x+2)(5-x-3z) = 5x+35-x^2-7x-3xz-21z$ $-z-2x+35 = \frac{3}{2}$

$-x^2-2x+35+z-3xz-21z$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 6 = 2\sqrt{ab-3xz-22z}$ $-x^2-2x+35 = -4$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 6 = 2\sqrt{ab}$ $x^2+2x-35=0$

$\sqrt{a} + 6 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}$ $x \leq 5 \quad x > -7$

$a + 12\sqrt{a} + 36 = 4ab + 4\sqrt{b} + b$ $1 \pm \sqrt{1+4x}$

$x+2 + 12\sqrt{x+7} + 36 = -4x^2-8x+140 + (20-4x)\sqrt{x+7} + 5-x$ $1 \pm$

$-1-2+35 \quad 33 \quad -25+10+35 \quad 80$ $\frac{11 \pm 5}{4}$

$\sqrt{2} - \sqrt{10} < 0$ $a+b=12$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} + 6$ $a=3 \quad b=3$

$a - 2\sqrt{ab} + b = 4ab - 24\sqrt{ab} + 36$ $x+2=3 \quad 5-x=3$

$a+b-4ab-22\sqrt{ab} = 35$ $x=-4 \quad x=$

$-4ab + 22\sqrt{ab} = 24$ $\frac{121}{4} - \frac{36}{4} = \frac{25}{4}$

$2ab + 11\sqrt{ab} + 12 = 0$ $\frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x \quad ab > 0$ $-x^2-2x+35 > 0$