



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.] q -шаг прогрессии, тогда $q^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} =$

$$= 2-x \quad \text{и} \quad q^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^8 = \sqrt{(3x+2)^{-4}} \quad \text{при выполнении ОДЗ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \pm \sqrt[4]{\sqrt{(3x+2)^{-4}}} = \pm \sqrt{(3x+2)^{-2}} = \pm (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow$$

Т.к. прогрессия состоит из действ. чисел $q^2 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^2 = (3x+2)^{-1/2} \Rightarrow (3x+2)^{1/2} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} =$$

$$= 2-x \Rightarrow \sqrt{25x+34} = 2-x \quad \text{при выполнении ОДЗ.}$$

$$25x+34 = 4-4x+x^2 \Rightarrow x^2 - 29x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \quad \text{или} \quad x = 30. \quad \text{При } x = -1 \text{ не выпол-}$$

няется ОДЗ, т.к. подкоренное выражение

$$(25x+34)(3x+2) < 0 \Rightarrow x \neq -1. \quad \text{При } x = 30 \text{ 12-й}$$

шаг прогрессии отрицательный, чего не мо-

жет быть так как он является про-

изведением арифм. корня и квадрата дей-

ствительного числа $q \Rightarrow x \neq 30 \Rightarrow$ таких x

не существует.

Ответ: таких x не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2.} \quad \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение: $|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$. Заметим, что $|y+2| + |y-18| \geq y+2 - y+18 = 20$; $|y-18| \geq 0$, а $\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20 \Rightarrow$ равенство достигается только при $|y-18| = 0$; $z=0 \Rightarrow y=18, z=0$. Тогда первое

уравнение примет вид: $\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$. Пусть $x+6=a$ $3-x=b$:

~~$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab} \leq a+b \text{ по нерав-ву средних} \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 \leq a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq 2$$~~

~~$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b+7 = a+2\sqrt{ab}+b = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$~~

~~$$a+b=9 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 16 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \quad | \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$$~~

~~$$a-b+16(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3$$~~

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + 7 = 2\sqrt{ab}, \quad a+b = x+6+3-x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + 7 = \sqrt{a} - \sqrt{b} + a+b-2 = 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} + a - 2\sqrt{ab} + b - 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a^2 - b^2} + (\sqrt{a^2 - b^2})^2 - 2 = 0. \quad t = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ или } t = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \\ \sqrt{a^2 - b^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x} = 1 \\ \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{3-x} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+7 = 8 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \\ -2+7 = 5 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+6)(3-x) = 16 \\ 4(x+6)(3-x) = 25 \end{cases}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$-4x^2 - 12x + 72 = 25 \Rightarrow -4x^2 - 12x + 47 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 47}}{-8} =$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{9+47}}{-8} = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{14}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{14}$$

Проверим, удовл. ли эти x $\in \mathbb{R}$. $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq 3 \quad 0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{14} \vee 3 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{14} \vee -6 \Leftrightarrow 14 \vee 4,5^2 > 16 \underset{14}{\Rightarrow} \text{неудовл.}$$

$$0 < -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \vee 3 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{удовл.}$$

$$0 > -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \vee -6 \Leftrightarrow \frac{17}{4} \vee 4,5^2 > 16 > \frac{17}{4} \Rightarrow \text{неудовл.}$$

Значит подходят только $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{14}$ и $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$

Ответ: $(-\frac{3}{2} + \sqrt{14}; 18; 0)$, $(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}; 18; 0)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}. \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0;$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0;$$

$$(\cos x + 1)^3 = (1-p) \cos^3 x;$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x; \Rightarrow$$

$$1 = \cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$$

\Rightarrow чтобы было хотя бы одно решение $\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \right| \leq 1$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} \geq 2 \\ \sqrt[3]{1-p} \leq -1 \\ \sqrt[3]{1-p} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq -1 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -1 \\ p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[3]{1-p} - 1 \right| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1 \\ \sqrt[3]{1-p} - 1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-p \geq 8 \\ 1-p \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \leq -7 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

При таких p $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$ $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{1-p^2-1}}\right) + 2\pi k$
 $k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

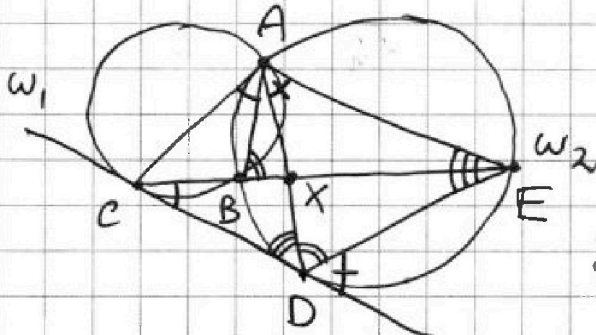
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$\frac{CX}{XE} = \frac{7}{20} \quad \frac{ED}{CD} = ?$$



$$(1) S_{\triangle CXA} = \frac{1}{2} h \cdot CX = \frac{1}{2} CD \cdot DX \sin \angle CDX$$

$$(2) S_{\triangle DXE} = \frac{1}{2} h \cdot EX = \frac{1}{2} DE \cdot DX \sin \angle XDE$$

где h - высота $\triangle CDE$ из

точки D на CE .

$$(1) : (2) \Rightarrow \frac{CX}{EX} = \frac{CD}{DE} \frac{\sin \angle CDX}{\sin \angle XDE} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{CX}{EX} \frac{\sin \angle XDE}{\sin \angle CDX}$$

По св-ву хорды и касательной: $\angle XCD = \angle CAB = \angle UBC$;

$$\angle XDC = \angle BED = \frac{\angle UBD}{2}; \quad \angle EDY = \angle EAD = \frac{\angle UDE}{2}.$$

$\angle XDE = \angle ABE$ как вписанные в одну дугу на одной стороне.

$$\Rightarrow \sin \angle AED = \sin \angle XDE \Rightarrow \frac{\sin \angle XDE}{\sin \angle CDX} = \frac{AE}{AD} \frac{\sin \angle XDE}{\sin \angle CDX} = \frac{AD}{AD} \frac{\sin \angle CDX}{\sin \angle AED} =$$

$$= \frac{AE}{AD} \quad (\text{по Т. Синусов}) \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{20}{7} \frac{AD}{AE} \text{ Катетам } \frac{AD}{AE} :$$

]] - α]]- β]]- $\delta \Rightarrow$ Аполомимо 1) и 2) $\frac{AE \sin \angle AEX}{DE \sin \delta - \angle AEX} =$
на рис.

$$= \frac{AX}{XD} = \frac{AE \sin(\pi - \alpha - \beta + 2\delta)}{DE \sin(\pi - \alpha - \beta - \delta)}; \quad AD = AX + XD$$

$$AX \cdot XD = BX \cdot XE$$

$$\Rightarrow CD^2 = CE \cdot CB$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Разберём 3 случая симметрии: относительно горизонт. и верт. ср. лин.
~~и диагональ~~, относительно вертикальной средней линии;

3) относительно горизонтальной средней линии.

В 2) и 3) случае достаточно выбрать ~~четыре~~ ^{четыре} клетки ~~из~~ ^{из} соответств. половины прямоуголь-

ника (в 2)  в 3) ). В обоих случаях мы выбираем 4 объекта без учёта порядка (т.к. клетки одинаковые) ~~из~~ ^{из} $\frac{500 \times 120}{2} = 30000$ объектов.

Значит таких способов ~~остаётся~~ ^{остаётся} для каждого случая C_{30000}^4 .

В 1) случае достаточно выбрать ~~две~~ ^{две} клетки ~~из~~ ^{из} соответв. четверти прямоугольника (т.к. остальные 6 букв определены симметрией, как и в случаях 2) и 3) оставшиеся 4 клетки определяются симметрией). Мы выбираем 2

объекта без учёта порядка ~~из~~ ^{из} $\frac{500 \times 120}{4} = 15000$ объектов \Rightarrow таких способов C_{15000}^2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

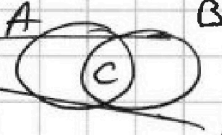
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Множество клеток шахматной в 1) случае - C
в 2) случае A в 3) случае B. Тогда

~~$A \cap B = C$, м.к. ^{какими} симметрией отн. центра это
есть ~~какие симметрии отн. обеих средних~~
~~линий. Тогда ~~способ~~ клеток которые симме-~~
~~туются ~~взаемно~~ ~~на~~ ~~каждой~~ ~~из~~ ~~двух~~ ~~средних~~ ~~линий~~ ~~и~~
~~тогда, считая ~~способы~~ для A и B~~~~~~

~~$C = A \cap B \Rightarrow$ кол-во способов для 
таких симметрий $P(A) + P(B) - P(C)$,
где P возвращает кол-во способов~~

Тогда $C = A \cap B$, а посчитать кол-во способов
можно как $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2$. Т.к.
иногда два раза подсчитываем клетки удовл.
 $C (C = A \cap B)$.

Посчитаем теперь кол-во способов выбрать точки, ко-
торые обладают только центральной сим-
метрией. Для этого достаточно выбрать четыре
точки из какой-то из двух четвертинок пря-
моугольника ( или ). Остальные будут
определены симметрией. Выбираем 4 из $\frac{50000}{2} =$
 $= 10000$ объектов - C_{15000}^4 для каждой четвертинки.

Тогда всего способов: $C_{30000}^4 + C_{30000}^4 - C_{15000}^2 +$
 $+ C_{15000}^4 + C_{15000}^4 = 2C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + 2C_{15000}^4$

Ответ: $2C_{30000}^4 - C_{15000}^2 + 2C_{15000}^4$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N6. (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = \pm p \\ \begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b - \text{не может быть, т.к. } a < b \\ \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a+b^{2c} = \pm p^2 \pm 1 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = \pm 1 \mp p^2 \\ a-b = \pm p^2 \mp 1 \end{cases} \end{cases}$$

$a-b < 0 \Rightarrow 1) a-b = 1-p^2 < 0$ - не подходит; $2) -1+p^2 < 0$ - не подходит; $3) p^2-1 < 0$ - не подходит; $4) -p^2+1 < 0$ - не подходит.

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ \begin{cases} a-b = 1-p^2 \\ a-b = -p^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b^{2c} = \pm 1 \pm p^2 \\ a-b = -p^2 \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = a + p^2 - 1 \Rightarrow b - a = p^2 - 1. \text{ Т.к. } b - a \not\equiv 3$$

$$a^2 + b = a^2 + a + p^2 - 1 = 1000 \Rightarrow a^2 + a + p^2 - 1001 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(p^2 - 1001)}}{2} \quad \begin{cases} p^2 - 1 \equiv 2 \\ p^2 - 1 \equiv 3 \end{cases}$$

Если $p^2 - 1 \equiv 2$, но $p^2 \equiv 0 \Rightarrow p = 3$

Если $p^2 - 1 \equiv 1$, но $p^2 \equiv 2$. Но такого не может быть, т.к. $p \not\equiv 3$ (если разбирать случай $p \equiv 3$).

Тогда $\begin{cases} p = 3k+1 \\ p = 3k+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = 9k^2 + 6k + 1 \equiv 1 \\ p^2 = 9k^2 + 12k + 4 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow p = 3$

Значит $b - a = 9 - 1 = 8 \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b = a^2 + a + 8 = 1000 \Rightarrow a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a+1) = 992 = 31 \cdot 32 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ a = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 39 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2c = a + b + 1 + p^2 \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ c = -23 \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } (31, 39, 30); (-32, -24, -23).$$

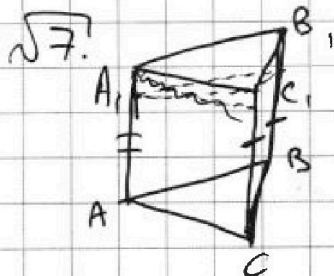
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Боковые грани - трапеции с одинаковой высотой. Основания трапеций: AA_1 , CC_1 , BB_1 .

Тогда $S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h$; $S_2 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$

$\cdot h$; $S_3 = \frac{1}{2}(BB_1 + CC_1)h \Rightarrow$ Если две площади

равны, то и две образующие равны. Без ограничения общности будем считать, что $S_1 = S_2 \Rightarrow BB_1 = CC_1 \Rightarrow S_3 = \frac{2BB_1h}{2} = BB_1 \cdot h$.

h - сторона равностороннего треугольника, лежащего в основании. Его площадь $S = \frac{1}{2}h \cdot h \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 = 4 \Rightarrow$

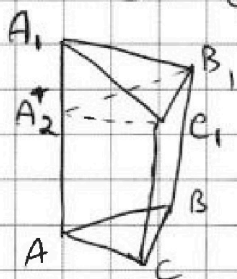
$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_3 = BB_1 \cdot h = BB_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 5 \Rightarrow BB_1 = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

$S_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1)h = \frac{1}{2}(AA_1 + \frac{5}{4}\sqrt{3}) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{12}{\sqrt{3}} - 5) =$

$= 3 - \frac{5}{4}\sqrt{3}$. Тогда $V = V_{ABCA_2B_1C_1} + V_{A_2B_1C_1A_1}$ (см. рис.).



$V_{ABCA_2B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = 4 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$V_{A_2B_1C_1A_1} = \frac{1}{3}S_{A_2B_1C_1} \cdot AA_2 = \frac{1}{3}S_{ABC}(AA_1 - BB_1) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (3 - \frac{5}{4}\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{3}) = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3}$

$= 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{3} = 4 - \frac{10}{3}\sqrt{3} \Rightarrow V = 5\sqrt{3} + 4 -$

$-\frac{10}{3}\sqrt{3} = 4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$ Ответ: $4 + \frac{5}{3}\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad a+b=9$$

$$a-b+7=2ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+7=2\sqrt{ab}$$

$$a-ab+1-b+6=ab$$

$$a+\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+7=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$(a+1)(1-b)+6=ab$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+a+b-2=2\sqrt{ab}$$

$$2 \frac{10000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!}$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-2=0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 42 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad 2C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

30000
30000

$$(p-1)(\cos^3 x) + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{p-1} \cos x = -\cos x - 1$$



$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} - 1 \quad (\sqrt[3]{p-1} + 1)$$

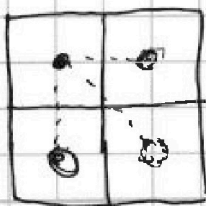
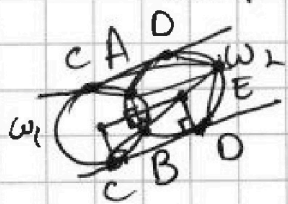
$$(p-1)^{1/3} + 1^{1/3} = \sqrt[3]{p-1+1+3(p-1)^{2/3}+(p-1)^{1/3}}$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \geq 1$$

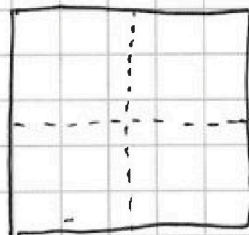
$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$\sqrt[3]{1-p}-1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$



2 15000



$$4 = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

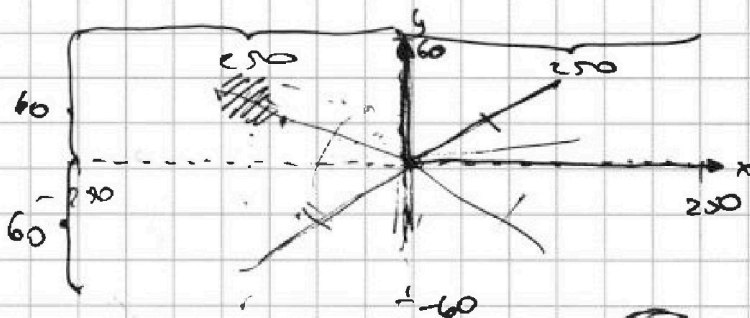


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

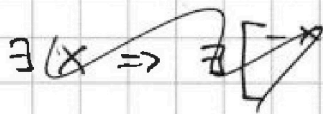
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x_1 y_1$
 $x_2 y_2$
 $x_3 y_3$
 $x_4 y_4$



$$\exists (x, y) \Rightarrow \exists (x, y) \Rightarrow \exists \begin{cases} -x + y \\ -y + x \\ -x - y \end{cases}$$

$\exists \leq 4$ ушм. дим векторов

$$\sqrt{250^2 + 60^2} = 10 \sqrt{25^2 + 6^2} =$$

$$\sqrt{130^2 + 100^2} = 4 \text{ шма}$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ -43 \\ \hline 13 \\ -9-9 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ 52 \\ \hline 104 \end{array} + \begin{array}{r} 625 \\ 36 \\ \hline 661 \\ 26 \\ \hline 687 \end{array}$$



A - шимм. отк. верт.

B - шимм. отк. гор.

A ∩ B - шимм. отк. центра

A + B - A ∩ B

$$C_{15000}^4 + C_{15000}^4 + C_{15000}^2$$

$$A = \cancel{250 \times 60} \times \cancel{500 \times 60} \quad B = 120 \times 250$$

$$C_4 C_{3000 \times 60}^4 + C_{500 \times 60}^4 - C_{250 \times 60}^2 =$$

$$= 2 \frac{30000 \cdot 29999 \cdot 29998 \cdot 29997}{4!} - \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

$$- 2 \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{4!} + \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

$$\frac{2}{4!} \left(\frac{30000!}{29996!} - \frac{15000!}{14996!} \right) = \frac{2}{2!} \left(\cancel{30000} \cdot 29998 \cdot \frac{15000}{14998!} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

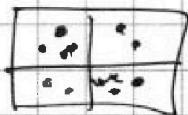
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$2C_{15000}^2$~~ $\stackrel{?}{=} 2C_{30000}^4 - C_{15000}^2$

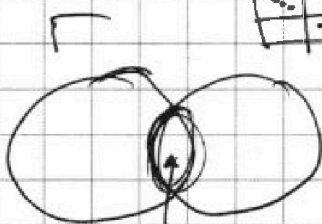
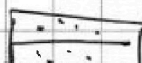
$1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$

$$\begin{array}{r} 3123 \\ 1001 \overline{) 3123} \\ \underline{3001} \\ 122 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 143 \overline{) 1001} \\ \underline{1001} \\ 0 \end{array}$$

1)



$(3k+1)(3k+2)$

$$\begin{array}{r} 143 \overline{) 1001} \\ \underline{1001} \\ 0 \end{array}$$

2)



3)



4)



$501 \overline{) 1001}$

$A + B - AB + C$

$1001 = 143 \cdot 7 = p^2 - 1001 = n^2 = 37 \cdot 11 \cdot 7$
 $(p-n)(p+n) = 1001$

$a(a+1) + b - a = 1000$
 $0,2 \quad 4,2 \quad 3,1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 3 \\ a \equiv 1 \\ b - a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ b \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+1) \equiv 0 \\ b - a \equiv 0 \\ a(a+1) \equiv 2 \\ b - a \equiv 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-n=13 \\ p+n=77 \\ p-n=81 \\ p-n=7 \\ p+n=143 \\ p=75 \end{cases}$$

$a - c = b - c$

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=\pm 1 & \begin{cases} a-c=\pm p^2 \\ b-c=\pm 1 \end{cases} \\ b-c=\pm p^2 & \begin{cases} a-c=\pm 1 \\ b-c=\pm p^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-n=1001 \\ p+n=1 \\ p-n=1 \\ p=501 \\ ap=501 \end{cases}$$

$$a^2 + a + p^2 - 1 = 1000$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{p^2 - 1001}}{2}$$

$$\begin{cases} a = b + 1 - p^2 \\ a = b + 1 - p^2 \end{cases} \begin{cases} b = p^2 + a - 1 \\ b = p^2 + a - 1 \end{cases}$$

$(p-n)(p+n) = 13 \cdot 11 \cdot 7$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases} \Rightarrow a = b \text{ (не!)} \\
 \begin{cases} a-c = \{\pm p^2; \pm 1\} \\ b-c = \{\pm 1; \pm p^2\} \end{cases}$

$a^2 + a + p^2 - 1001 = 0 \Rightarrow a = -23 - 9(-1) = -22$
 $a_1 + a_2 = -1 \quad (-32 - c)(-24 - c) = 9$
 $a_1 \cdot a_2 = p^2 - 1001 = p^2 - 7 \cdot 11 \cdot 13$

$a(-1-a) = p^2 - 7 \cdot 11 \cdot 13$
 $a + a^2 = 1004 - p^2 \quad 4005 - 4p^2 = n^2$

$4005 = n^2 + 4np + 4p^2 - 4np = (n+2p)^2 - 4np = 4005$

$60 \times 60 = 3600 \quad (31-c)(39-c) = 9$
 $c = 30$

$63^2 + 36 = 63^2 + 6^2 = 4005$
 $63^2 + 6^2 - (2p)^2 = n^2$
 $(63-2p)(63+2p) = (n-6)(n+6)$

$450 + 45 + 1 = 496$
 $2 \cdot 982 = (a)(a+1)$

$31 \cdot 38 = 30$

$3k+2$
 $p^2 - 1 \equiv ? \pmod{3}$

$33 \cdot 33 = 1089$

$32 \cdot 5 = 160$
 390
 4225
 64
 64
 256
 384
 4096

$11:3 \equiv 2$
 $11:2 \equiv 3$
 $13:3 \equiv 1$

63
 63
 189
 378
 3969

63
 63
 189
 378
 4079

63
 63
 189
 378
 4079

63
 63
 189
 378
 4079

63
 63
 189
 378
 4079

63
 63
 189
 378
 4079

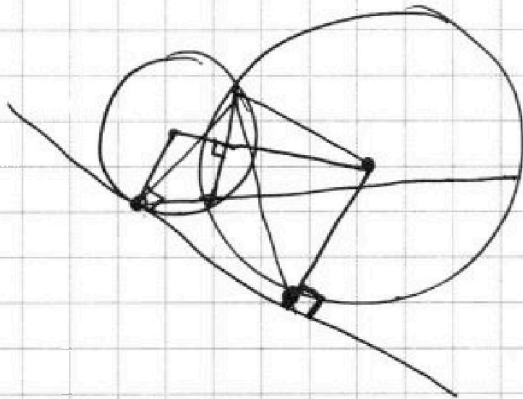
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BX \cdot XE = AX \cdot XD$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BC}{2R_1} &= \sin \alpha \\ \frac{AC}{2R_1} &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{2R_2} = \sin \beta$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{R_1}{R_2} \quad \frac{AE}{BC} = \frac{R_1 \sin \beta}{R_2 \sin \alpha}$$

$$\frac{(CX - BX)}{(CX - BC) \cdot XE} \quad \delta - 180 + \alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + 2\delta$$

$$\frac{AE}{AD} = ?$$

$$XD = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + \delta)$$

$$AX = 2R_2 \sin(\alpha + \beta + 2\delta)$$

$$CD^2 = \cancel{CX} \cdot \cancel{CE}$$

$$= CB \cdot CE$$

$$\gamma - (180 - \alpha - \beta - \delta) =$$

$$= 2\gamma + \alpha + \beta - 180^\circ$$

$$180^\circ - (2\delta + \alpha + \beta - 180^\circ) - \beta =$$

$$= 360^\circ - 2\delta - 2\beta - \alpha$$

$$(CB + BE) \cdot CB = CD^2$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin(\alpha + \beta + 2\delta)} \frac{AX}{AD}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

