



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

b - первый член, q - знаменатель прогрессии

$$b_1 q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad (1)$$

$$b_1 q^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \quad (2)$$

Перемножим (1) и (2):

$$b_1^2 q^{26} = \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}}$$

$$b_1^2 q^{13}$$

$$b_1 q^{11} = 2-x \quad (3)$$

Перемножим (1) и (2):

$$b_1^2 q^{26} = \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}} \Rightarrow b_1 q^{13} = \pm \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}} \quad (4)$$

но подходит только со знаком "+", т.к. $b_1 q^{13}$ существует $\Rightarrow$ его подкоренное выражение имеет знак "+", а его знак такой же, как и у $b_1 q^{11}$.

$$\text{Тогда } q^2 = \frac{25x+34}{(3x+2)(2-x)}$$

$$\text{Также } q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\frac{25x+34}{(3x+2)(2-x)} = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\text{Подставим (2) на (4), получим, что } q^4 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^2}} = \frac{1}{|3x+2|} \Rightarrow$$

$$q^2 = \sqrt{\frac{1}{|3x+2|}}$$

$$\text{Подставим (3) на (4), получим } q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$\text{Тогда: } 2-x = \sqrt{|25x+34|} \quad | \uparrow^2$$

$$x^2+4-4x-25x-34=0$$

$$x^2-29x-30=0$$

$$x_1=30$$

$$x_2=-1$$

Заметим, что $x_2=-1$ не подходит, т.к. $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$ не определен, потому что подкоренное выражение меньше, чем 0. Тогда остается $x=30$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $x=30$ $b_6 < 0$, но при этом $b_{10} > 0$, а такое быть не может, т.к. все b_i имеют одинаковый знак.
 Ответ: ни при каких



1 2 3 4 5 6 7

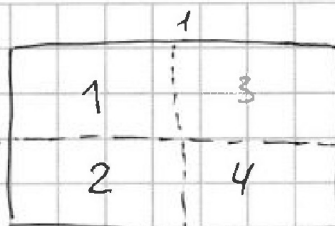
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

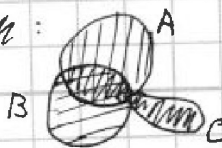
Разделим прямоугольник на 4 меньшие, размером 250×60 как показано на картинке.



Пунктирные линии разделяют стороны 250 и 251 и строки 60 и 61 . Тогда, если выбрать какую-то клетку одного из прямоугольников то при центральной симметрии еще 1 клетка закрашивается одновременно. Тогда, в каждой из прямоугольников должно быть закрашено ровно 2 клетки для центральной симметрии. Если более двух то закрашено больше $3 \cdot 4 = 12$ клеток, если менее двух, то закрашено не более, чем $4 \cdot 1 = 4$ клеток. Тогда кол-во клеточных симметричных пар красок равно количеству способов выбрать $\frac{1}{2} 2$ клеток в одной из прямоугольников, т.е. $C_2^{250 \cdot 60} = C_2^{15000}$.

Чтобы закрасить 8 клеток симметрично средней линией 1, надо выбрать 4 квадратика в клетках прямоугольников 1 и 2, тогда закрашено 4 одинаково определяются 6 клеток 3 и 4. Тогда закрасить 8 клеток симметрично средней линией 2, надо выбрать 4 квадратика в клетках прямоугольников 1 и 3, тогда остальные 4 одинаково определяются в клетках 2 и 4. Тогда раскраска симметрична относительно средней линии $2 \cdot C_4^{250 \cdot 60 \cdot 2} = 2 \cdot C_4^{30000}$.

Заметим теперь, что если раскраска симметрична относительно обеих средних линий, то она симметрична и относительно центра квадрата, т.е. пусть, $ABCD$, есть какой-то квадратик в прямоугольнике 1, тогда есть симметричный ему отн. прямой 2 квадратик в прямоугольнике 2, а также симметричный ему отн. прямой 1 квадратик в пр-ке 4 относительно прямой 1. Он центрально-симметричен исходному квадратiku (т.е. A). Тогда если A - м-во центрально-симметричных раскрасок, B - м-во раскрасок, симметричных относительно прямой 1 и C - м-во относительно 2, то они пересекаются следующим образом:



В задаче нужно найти $A \cap B \cap C$. Для этого мог использовать мощность найден



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

множеств A, B, C ~~отвечать, вывести их~~ ^{потом выведем.} удвоенное пересечение.

Найдем мощность множества A . В первом квадрате может быть 0, 1, 2, 3 или 4 клетки. Если там 0 клеток, то надо в 1 и во втором 4 или 0 $\Rightarrow$ в квадратах 2 и 3 по 4 клетки. Мы надо выбрать (выбрали в 2, они считаем - ринго переносится в 3). Есть $C_{250.60}^4 = C_{15000}^4$ способов.

Если выберем одну клетку $C_{250.60}^1 = C_{15000}^1$ способами, то надо еще выбрать 3 в квадрате 2 C_{15000}^3 способами, итого $C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3$ способами. Аналогично если в первом выбрали 3 и во втором 1 $C_{15000}^3 \cdot C_{15000}^1$. Если в первом в 2 и во втором 2, то $C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2$. Если в первом 4 и во втором 0, то $C_{15000}^4 \cdot C_{15000}^0$. Получили, что мощность A в точности $2 \cdot C_{15000}^4 + 2 \cdot C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2$.

Теперь найдем мощность пересечения множеств. Из рассуждений (*) нужно выбрать в первом квадрате 2 клетки, а во всех остальных раскешенные клетки восстановятся однозначно. Тогда ответ будет

$$2 \cdot C_{30000}^4 + 2 C_{15000}^4 + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2 - 2 \cdot C_{15000}^2$$

$$\text{Ответ: } 2 C_{30000}^4 + 2 C_{15000}^4 + 2 C_{15000}^1 \cdot C_{15000}^3 + C_{15000}^2 \cdot C_{15000}^2 - 2 C_{15000}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a < b \Rightarrow a-c < b-c$$

Если два множителя в произведении дают квадрат простого числа, причем один из них строго меньше второго, то меньший равен 1, а больший p^2 или же меньший $-p^2$, больший -1 .

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

$$\begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow b-a=p^2-1$$

Заметим, что если $p \neq 2$ $p \equiv 0$, то $p^2-1 \equiv 2$; если $p \equiv 2$ и $p \equiv 1$, то $p^2-1 \equiv 0$. Но по условию $b-a$ не кратно 3, поэтому $p \equiv 0 \Rightarrow p=3$

$$\begin{cases} b-a=8 & (1) \\ a^2+b=1000 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a=8 & (1) \\ a^2+b=1000 & (2) \end{cases}$$

Вычтем из (1) из (2)

$$a^2+a=992$$

$$a^2+a-992=0$$

По т. Виета находим $a_1 = -32$, $a_2 = 31$

Найдем соответствующие этим значениям a тройки

$$1) a_1 = -32 \Rightarrow b = 24, c = -23 \text{ или } c = -33$$

$$2) a_2 = 31 \Rightarrow b = 39, c = 30 \text{ или } c = 40$$

Ответ: $(-32; -24; -23)$; $(-32; -24; -33)$; $(31; 39; 30)$;

$(31; 39; 40)$

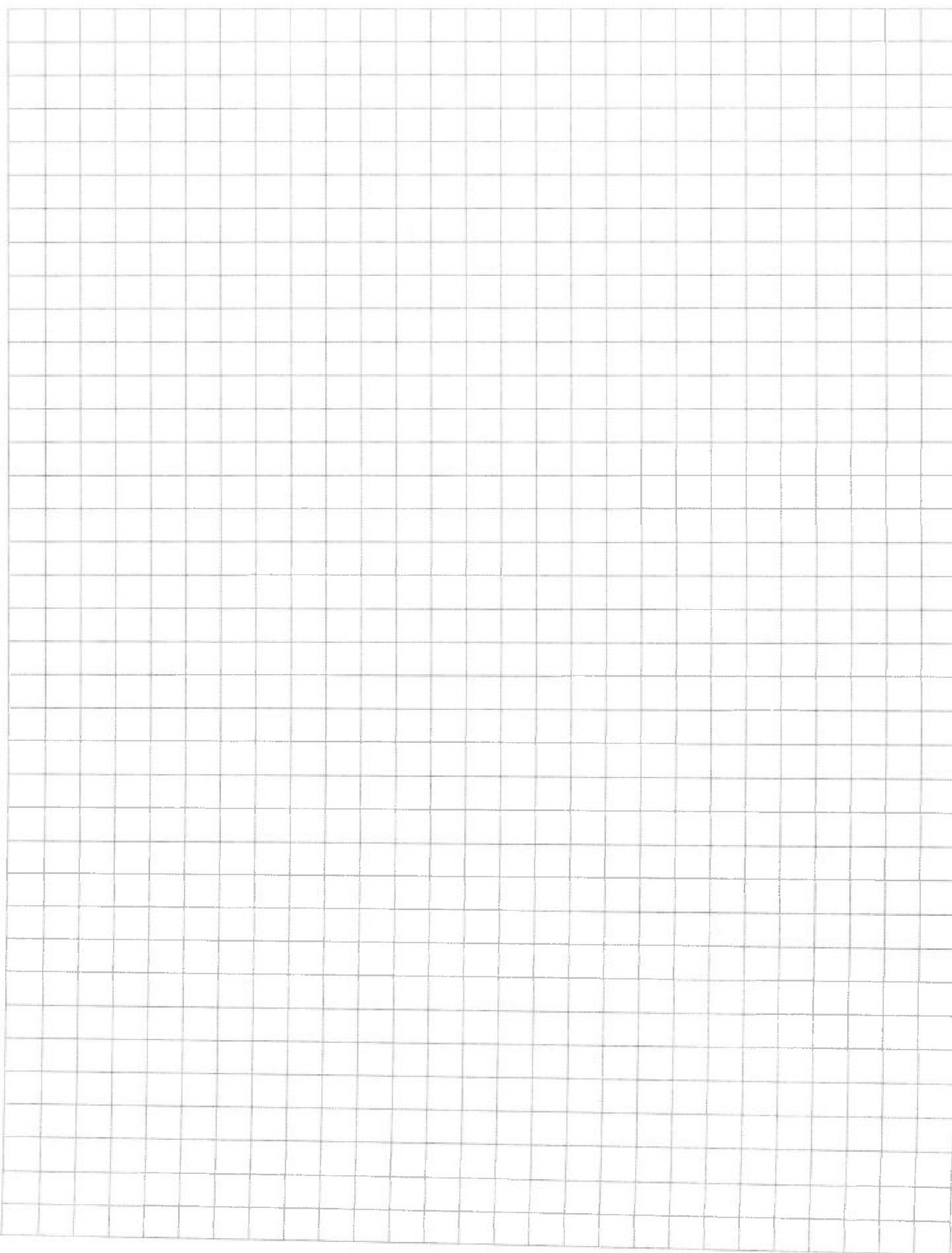


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



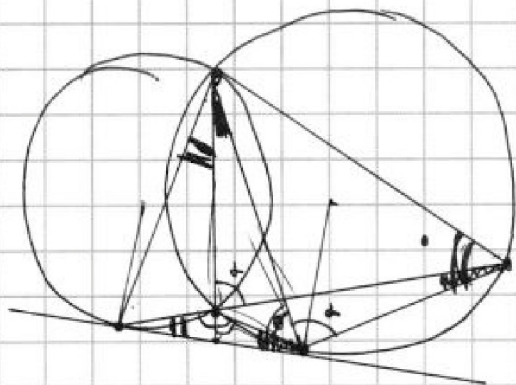


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

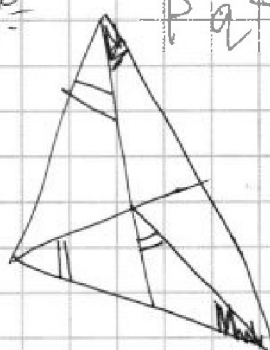
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

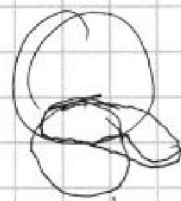
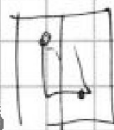
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{b}$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 250 \\ 60 \\ \hline 15000 \end{array}$$



$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2$$

$$(a-c)(b-c)$$

$$a-b=p$$



$$a-c=1$$

$$a-b=$$

$$-c=p^2$$

$$1-p^2$$

$$a-c=-1$$

$$a-b=$$

$$b-c=p$$

$$-1+p^2$$

$$1-p=1/(p+1)$$

31-

40

g

$$\begin{array}{r} 992 \\ 8 \\ 19 \\ -16 \\ \hline 32 \end{array}$$

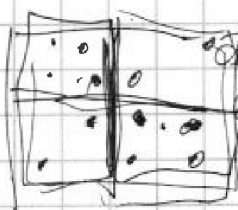
$$\begin{array}{r} 8 \\ 124 \end{array}$$

$$1000-8$$

$$124 \cdot 8$$

$$62 \cdot 16$$

$$31 \cdot 32$$



$$-40+$$

$$-24+32=8$$

$$-32-c=-9$$

$$-c=-9+32$$

$$-c=23$$

$$c=-23$$

$$b-a=8$$

$$+32+23=+9$$

$$-24+$$

$$24+32=56/:$$

$$-32-c=1$$

$$-32+c \quad 32+c=-1$$

$$c=-33$$

$$a \quad 32+c=9$$

$$c=-23$$

$$24+23 \quad -24+$$

$$b+32=8$$

$$b=-46-24$$

$$-32+c=1$$

$$c=-33$$

$$-32+33$$

$$-24+33$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=4$$

$$a^2\sqrt{3}=16$$

$$a=\frac{4}{\sqrt{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

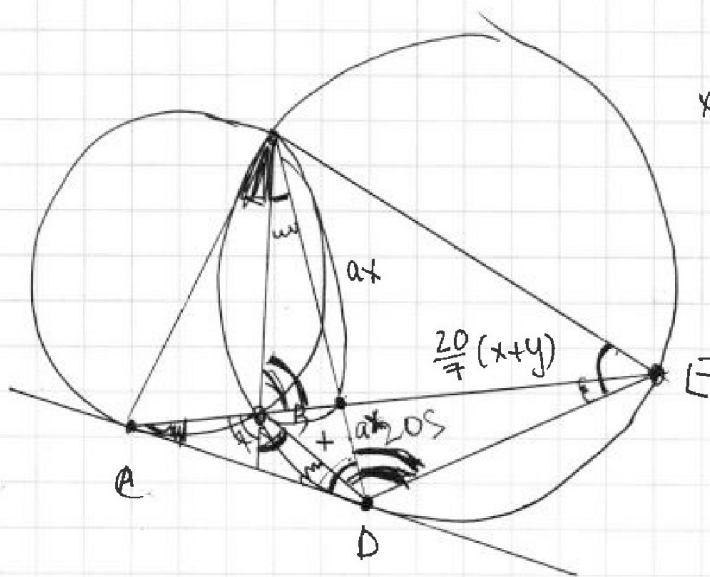
5
☐

6
☐

7
☐

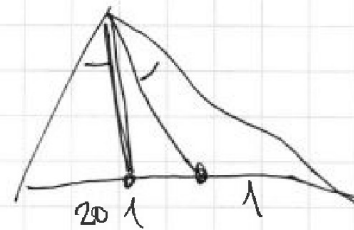
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x \frac{20}{7} (x+y) = a \times a (y-x)$$

$$\frac{20}{7} (x+y) = a^2 (y-x)$$



$$\frac{x \sin \alpha}{y \sin \beta} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{y \sin \alpha}{x \sin \beta} = \frac{7}{20}$$

$$a b = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{7}{20}$$

$$b^2 = \frac{7}{20}$$

$$b = \frac{\sqrt{7}}{20}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z}$$

10 100

$a \leq 100$

$$z \in (-20; +20)$$

$$6+x \geq 0$$

$$3-x-2z \geq 0$$

$$y-3x-x^2 \geq 0$$

$$18+x \geq 0$$

$$18+y-x^2 \geq 0$$

$$9-2z \geq 0 \Rightarrow z \leq 4,5$$

$$x \geq -6$$

$$x(x-3)$$

$$-z \geq -4,5$$

$$a^2+b-b+a=a^2+a=$$

$$100a = p$$

$$3-x-2z \geq 3-x-9 = -6-x \quad a(a+1) \equiv 1001-p$$

$$9-3x-6z \geq 0$$

$$y$$

$$y-3x-x^2 \geq 0$$

$$x+6 \geq 0$$

$$y-2x-x^2+6 \geq 0$$

$$-(x+1)^2 + 7 + 2 + y \geq 0$$

$$b_1 a^a = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_1 a^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$b_1 a^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^4}} = \frac{\sqrt{25x+34}}{3x+2} = 2-x$$

$$\sqrt{25x+34} = (2-x)^2(3x+2)^2$$



$$a < b$$

$$a \neq b$$

$$3$$

$$(a-e)(b-e) = p^2$$

$$\begin{cases} a-e=1 \\ b-e=p \\ b-e=1 \\ a-e=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-e=1 \\ e-b=-p \\ b-e=1 \\ e-a=-p \end{cases} \quad \begin{matrix} a-b=1-p \\ b-a=1+p \end{matrix}$$

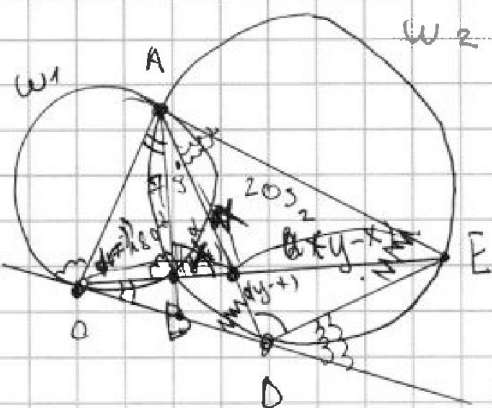


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$180 - (2-1)$$

$$180 - (180 - 2) - 1) = 180 - 180 + 2 - 1) = 1 - 1)$$

$$\sqrt{\frac{1}{g_2}}$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{u+z}{u} = 1$$

$$\frac{y}{x} = \frac{u+z}{u}$$

$$\frac{z}{u} = \frac{y-x}{x}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{z+u}{u} = 1 \Rightarrow \frac{z}{u} = \frac{y-x}{x}$$

$$x \cdot \frac{20}{7} (z+x) = u \cdot \frac{z}{2}$$

$$20(y+x) = (y-x)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{7(y+x)^2}{20} \cdot \frac{16}{3}$$

$$x^2 + a^2 = \frac{7(y+x)^2}{20} \cdot \frac{2y-x}{20}$$

$$\frac{y+x}{(y-x)a^2} = \frac{20(y+x)}{7} \cdot \frac{y+x}{ax} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{y+x}{ax} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{y+b(y-x)}{bx} = \frac{7}{20}$$

$$x = b(y-x)$$

$$2xc(y-x) \cdot (y+x)e = z^2 \quad z = e \cdot 2\sqrt{(y-x)(y+x)}$$

$$\frac{y}{y} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{z+u}{u} = 1$$

$$\frac{y}{y} \cdot \frac{z}{u} = \frac{u+1}{u}$$

$$ax(y-x)a = x(y-x)x^2$$

$$\frac{k}{p} \cdot \frac{x}{y-x} \cdot \frac{2}{7} = 1$$

$$\frac{k}{p} \cdot \frac{x}{y-x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{k}{p} = \frac{y-x}{2x}$$

