



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$n | b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}$  - члены арифметической, геометрической,  $q$ -членная прогрессии  
 $(13x-35=0)$   
 $b_2 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \Rightarrow x \neq -1$  Если  $b_1 = 0$ , то  $b_{15} \neq 0$ , что невозможно  $\Rightarrow b_1 \neq 0$   
 $b_{15} = 5 - x \Rightarrow b_{15} \neq 0 \Rightarrow q \neq 0$   
 $b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$  Тогда  
 $b_1 \cdot q^4 = b_{15}$ , т.е.  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \cdot q^4 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$q^4 = (x+1)^2$ . Т.к.  $13x-35 > 0$   
 1.  $x < -1$ :  $q^2 = \sqrt{-(x+1)}$   
 $b_{15} \cdot q^4 = b_{15}$ , т.е.  $(5-x) \sqrt{-(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$   
 $\sqrt{-(x+1)(x-5)^2} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$   
 $(x+1)(x-5)^2 + 13x-35 = 0$   
 $(13x-35)(x+1) \geq 0$   
 $(x+1)(x^2+3x-10) = 0$   
 $\begin{cases} x < -1 \\ x \leq \frac{35}{13} \end{cases}$   
 $\begin{cases} x = -1; 2; -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5$ . Проверка:  
 $x < -1$

$b_1 = \frac{10}{8}$   
 $b_{15} = 10$   
 $b_{15} = 20$   
 либо арифметическая либо  $q = \sqrt{2}$

2.  $x > -1$ :  $q^2 = \sqrt{x+1}$ :  $(5-x) \sqrt{x+1} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$   
 2.1.  $x \leq 5$ :  $\sqrt{\frac{x+1}{(5-x)^2}} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$   
 $(x+1)(x^2-10x+25-13x+35) = 0$   
 $(13x-35)(x+1) \geq 0$   
 $(x+1)(x^2-23x+60) = 0$

$b_1 = \frac{1}{4}$   
 $b_{15} = 2$  - прогрессия при  $q = \sqrt{2}$   
 $b_{15} = 4$   
 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq \frac{35}{13} \\ x \leq 5 \end{cases}$   
 $(x = -1, 3) \cup 20 \Leftrightarrow x = 3$  Проверка  
 $x \geq \frac{35}{13}$   
 $x \leq 5$

2.2.  $x > 5$ : Тогда  $13x-35 > 0$   
 $(5-x) \cdot \sqrt{x+1} < 0 \Rightarrow (5-x) \sqrt{x+1} \neq \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{13x-35}$

Ответ: -5; 3





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N2 \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \quad (1)$$

$$(y+1) + 3|y-12| = \sqrt{65-z^2} \quad (2)$$

Рассмотрим (1):  $\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} + \sqrt{4-x-z}$

$$x+3 + 10\sqrt{x+3} + 25 = 4(y+x-x^2+z) + 4\sqrt{y+x-x^2+z}\sqrt{4-x-z} + 4-x-z$$

ОАВ:  $\sqrt{65-z^2} \geq 0$   $(13-z)(13+z) \geq 0$

$$x+3 \geq 0 \quad x \geq -3$$

$$4-x-z \geq 0 \quad x \leq 4-z$$

$$y+x-x^2+z \geq 0 \quad y \geq x^2-x-z$$



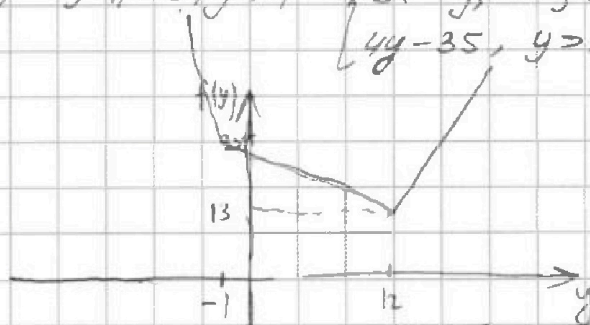
$z \in [-13; 13] \Rightarrow x \in [-3; 14]$

$$y+x-x^2+z \geq 0$$

$$y \geq x^2-x-z \geq -4 = -4, \text{ т.к. } 4-x-z \geq 0$$

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow -x \leq 3 \Rightarrow 4-x-z \geq 4-$$

Рассмотрим  $f(y) = |y+1| + 3|y-12| = \begin{cases} 35-4y, & y \leq -1 \\ 37-2y, & -1 < y \leq 12 \\ 4y-35, & y > 12 \end{cases}$  Построим график



То же  $f(y) \geq 13$ , но  $f(y) = \sqrt{65-z^2} \leq 13$ . Тогда р-во составляет только  $\emptyset$  13, т.е.  $y = 12$

$\sqrt{65-z^2} = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$  Подставим в систему (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$x+3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 5 = 4(12+x-x^2) - 10\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$x+3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 4-x + 4-x = 4(x+3)(4-x) - 10\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$4(x+3)(4-x) - 18\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 18 = 0$$

Пусть  $t = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+3}$ . Тогда

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm 3}{4} = 3; \frac{3}{2}$$

Вернемся к  $x$ :

$$\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+3} = 3$$

$$\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+3} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} (4-x)(x+3) = 9 \\ (4-x)(x+3) = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3=0 \\ x^2-x-\frac{33}{4}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$   
 $x = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2}$   
 $x \leq 4$   
 $x \geq -3$

Подставим  $y=12, z=0$  в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad (= 2\sqrt{(x+3)(4-x)})$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5 \quad |^{\wedge}$$

$$x+3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} + 4 - x = 4(x+3) - 20\sqrt{(x+3)(4-x)} + 25$$

$$4(x+3)(4-x) - 18\sqrt{(x+3)(4-x)} + 18 = 0$$

$$2(x+3)(4-x) - 9\sqrt{(x+3)(4-x)} + 9 = 0 \quad \text{Пусть } t = \sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$t = 3; \frac{3}{2} \quad \text{Вернемся к } x:$$

$$\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x} = 3$$

$$\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 = 9 \\ -x^2 + x + 12 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \geq -3$$

$$x \leq 4$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - x - \frac{35}{4} = 0 \end{cases}$$

$$x \geq -3$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 4$$

$$x \leq 4$$

(x; y; z)

Ответ:  $\left(\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$

$\left(\frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$CF : FE = 3 : 10$$

1) Пусть  $\angle BAF = \alpha$  ( $\angle CAD = \beta$ ).

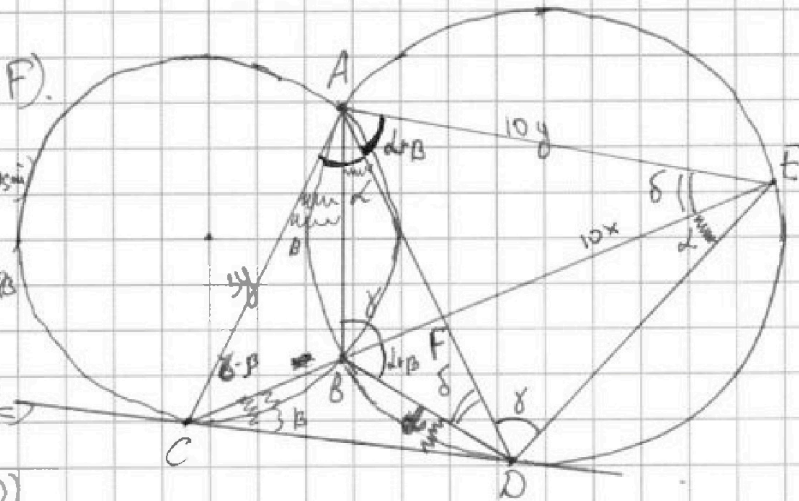
Тогда  $\angle BDC = \alpha$  (углы между хордами).

2) Пусть  $\angle CAB = \beta$ . Тогда  $\angle CBD = \beta$  (аналогично).

3)  $\angle EBD = \alpha + \beta$  (как внеш.  $\angle$   $\angle CBD$ )

$\Rightarrow \angle EAD = \alpha + \beta$  (опер. на  $ED$ )

Тогда  $\angle CAD = \angle EAD = \alpha + \beta \Rightarrow AF$  - бисс.  $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{FC} = \frac{10}{3}$



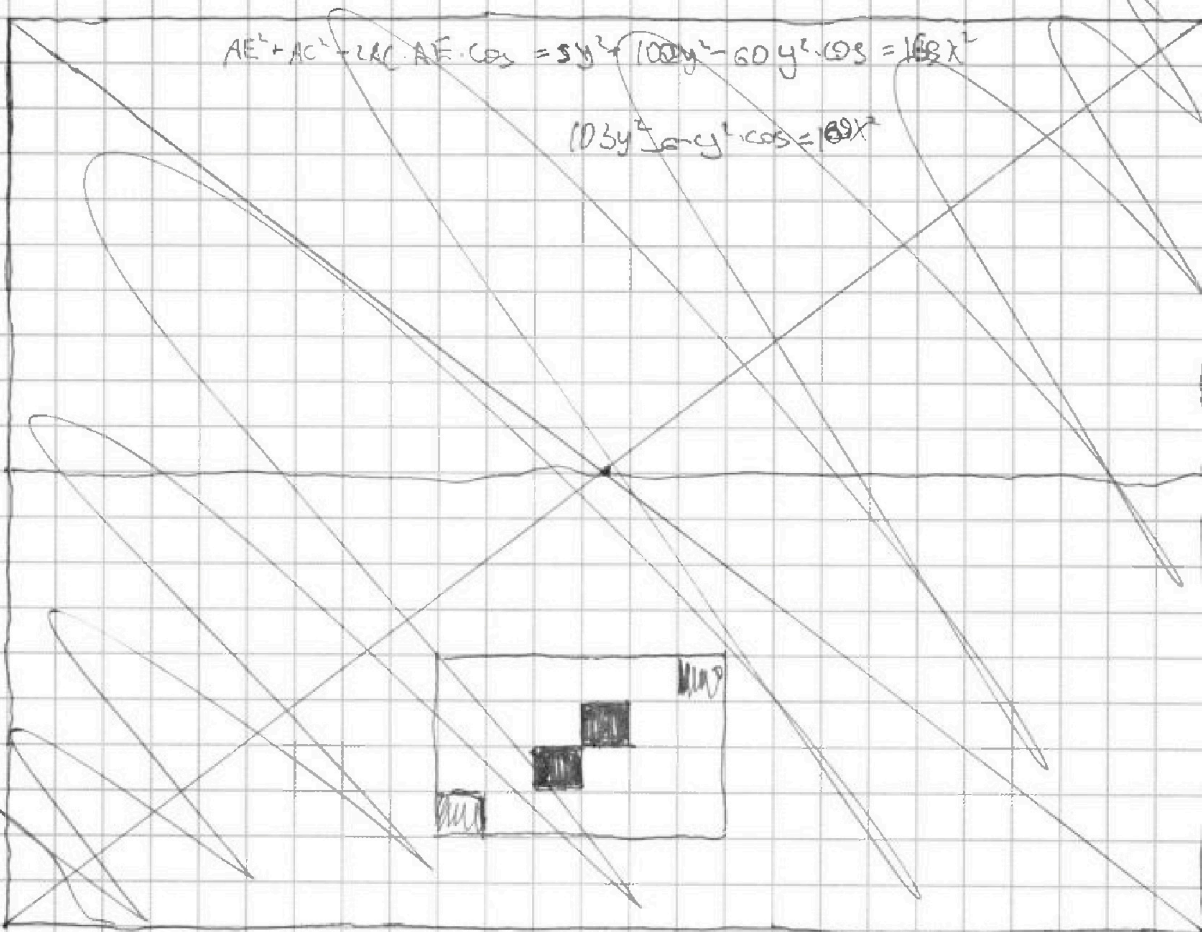


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



NS ↑ Таблицы размещены одна из средних линий. В каждом из образовавшихся четырехугольников размещаемся гранью бытия по 4 записанные клетки, при этом положение клетки в одной из четырех углов определяет положение или клетки симметричной ей ⇒ всего случаев  $C_{100,250}^4 = \frac{25000 \cdot 24999 \cdot 24998 \cdot 24997}{4!}$

Аналогично  $C_{25000}^4$  для 2-й средней линии, 2 раза для горизонтальных линий, когда известны размещаемые клетки симметричные относительно

обеих средних линий. Тогда 1 записанная клетка определяет положение

спустя 3-х средних линий или состоит из 4-х четырехугольников 100x125p размещают расположить 2 записанные клетки. Число способов  $C_{12500}^2$ . Остаток учитывать число симметричных относительно центра, не возмущая в  $C_{12500}^2$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5 В этом случае пометим по любой группе машин наши сетьюкурышки.

любая закрашенная метка означает метку в этой группе сетьюкурышки

и, которая будет закрашено и метку в этой г-ке, которая закрашена

и будет (симметрично относительно групп средней линии. Тогда

случаев  $\frac{25000 - 24999 - 24998 - 24997}{4!}$

Ответ:  $2 \binom{4}{25000} - \binom{2}{24999} + \frac{25000 - 24999 - 24998 - 24997}{4!}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 / ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№  $a+b^2=560 \equiv 2 \pmod 3$

Пусть  $a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow b^2 \equiv 2 \pmod 3$  — W

$a \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow b \equiv 2 \pmod 3$  (или  $b \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow (a-b) \equiv 3$ )

$a \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow b \equiv 1 \pmod 3$  ~~(или  $b \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-b) \equiv 3$ )~~

$a > b \Rightarrow (a-c) > (b-c)$ , где  $(a-c)(b-c) = p^2$ , где  $p$  — простое, значит, или  $b-c = 1$  (тогда  $a-c = p^2$ ) или  $a-c = -1$  (тогда  $b-c = -p^2$ )

1)  $b-c = 1 \Rightarrow c = b-1$ . I)  $b \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 3$ . Тогда  $\begin{cases} a-c \equiv 3 \\ a-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow a-c = 9 \Rightarrow a = b+9 = b+c$ . Подставим:

$b+8+b^2=560$

$b^2+b-552=0$

$b = 23$  — не кор., т.к.  $b \equiv 0 \pmod 3$   
 $b = -24$

$b = 24$  — проверим:  $a = -16; c = -25$

$(-16; -24; -25)$

1)  $-16 > -24$

2)  $-16 + 24 \neq 3$

3)  $(-16+25) - (-24+25) = 9 = 3^2$

4)  $576 - 16 = 560$

II)  $b \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 3$ . Далее аналогично сл. 1:  $\begin{cases} b-c = 1 \\ b = 23 \end{cases}$

проверим  $b = 23$ :  $a = 31, c = 22 \Rightarrow \begin{cases} 1) 31 > 23 \\ 2) 31 - 22 = 9 \\ 3) (31+22) - (23-22) = 56 = 7^2 \\ 4) 31 + 23^2 = 560 \end{cases}$  — проверим  $(31; 23; 22)$

2)  $a-c = -1 \Rightarrow c = a+1$ . I)  $a \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow b-c \equiv 3$ . Тогда  $\begin{cases} b-c = 3 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow b-c = -9$ .

тогда  $b = c-9 = a-8$ . Тогда подставим

$a + (a-8)^2 = 560$

$a^2 - 15a - 492 = 0$

$\begin{cases} a = 31 \\ a = 16 \end{cases}$  — проверим оба

$a = 31 \Rightarrow b = 23, c = 32 \Rightarrow$

1)  $31 > 23$

2)  $31 - 23 = 8 \neq 3$

3)  $(31+32) - (23-32) = 9 = 3^2$  — проверим

4)  $31 + 23^2 = 560$   $(31; 23; 32)$

$a = 16 \Rightarrow b = 24, c = 15 \Rightarrow$

1)  $16 > 24$

2)  $16 - 24 = -8 \neq -9$

3)  $(16+15) - (24-15) = 9 = 3^2$

4)  $16$

1)  $-16 > -24$

2)  $-16 + 24 = 8 \neq 3$

3)  $(-16+15) - (-24+15) = 9 = 3^2$  — проверим

4)  $-16 + 24^2 = 560$   $(-16; -24; -15)$

Ответ:  $(-16; -24; -25)$   $(31; 23; 22)$   
 $(-16; -24; -15)$   $(31; 23; 32)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$

$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$

$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$

$\cos 3x + \cos(x+2x) + \cos x = \cos x + \sin x \cdot \sin 2x + \cos x = 2 \cos^2 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$x+z \leq 4$   
 $x \leq 5$   
 $x \in [-13; 13]$

$y + 1 + 3y - 36 = \sqrt{169 - 2^2}$

$4y - 35 = \sqrt{(5-2x)(12+2x)}$

$b_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$b_3 = 5 - x$

$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$2 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 + x \leq 180^\circ$   
 $180^\circ = 2 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 + x$

$(5-x)(x+1)^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$(5-x)^2(x+1)^4 = (13x-35)(x+1)$

$x \leq 5$

$(x+1)(x+1)^3(5-x)^2 - 13x + 35 = 0$

$x \leq 0$

$b_1 = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{|x+1|}$

$(5-x) \cdot \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$x < -1: (5-x) \cdot \sqrt{5(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$\sqrt{(5-x)^2(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1)$

$(13x-35)(x+1) \geq 0$

$(x+1)(x^2 - 10x + 25 + 13x - 35) = 0$

$(x+1)(x^2 + 3x - 10) = 0$

$x = -1; 2; 5$

2)  $x > -1:$

2.1.  $x \leq 5$

$(5-x) \sqrt{x+1} \Rightarrow 38x - 35 \geq 0, \text{ т.е. } x \geq \frac{35}{38}$

$(x+1)(5-x)^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$(x+1)(5-x)^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$(x+1)(x^2 - 10x + 25 - 13x + 35) = 0$

$(x+1)(x^2 - 23x + 60) = 0$

$x = -1; 2; 5$

2.2.  $x > 5$

$2 \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$

$(\beta - \alpha) \neq (\alpha - \gamma) \Rightarrow \beta^2 = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{x+1} + 2$

$\beta - \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \beta - 1$



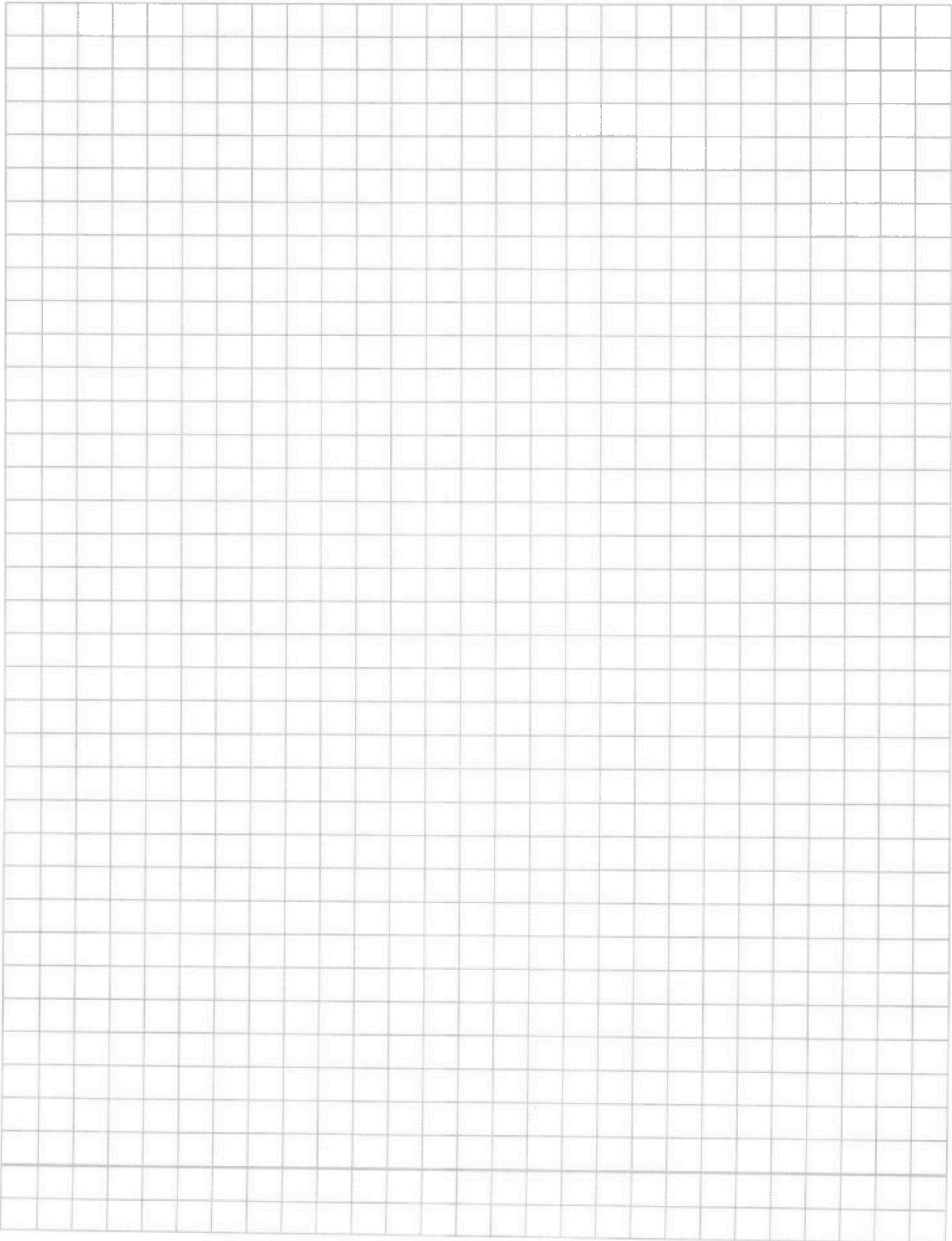


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n6 \quad (a-b) \div 3 \Rightarrow a \equiv b \pmod{3}$$

$$a + b^2 = 560 \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{Пусть } a \div 3. \text{ Тогда } b^2 \equiv 2 \pmod{3} - \text{W}$$

$$\text{Пусть } a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow b^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv b \pmod{3} - \text{W}$$

$$\text{Тогда } a \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow b^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow b \div 3$$

Пусть

$$a > b \Rightarrow a - c > b - c. \quad (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{ простое, значит}$$

$$\text{или } b - c = 1 \text{ или } a - c = 0 \text{ или } a - c = -1 \text{ (тогда } b - c < 0 \text{ и } (a-c)(b-c) > 0 \text{)}$$

$$\text{или } b - c = a - c \text{ или } a - c = p^2 \text{ или } b - c = -p^2$$

$$1) \quad b - c = 1. \quad c = b - 1 \Rightarrow c \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (a - c) \div 3, \text{ т.е. } a \equiv c, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} (a - c) = p^2 \\ a - c \div 3 \end{cases} \Rightarrow a - c = 9. \text{ Тогда } a = c + 9 = b + 8. \text{ Подставим } a = b + 8:$$

$$b^2 + b + 8 = 560$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$\begin{cases} b = 23 - \text{не подходит} \\ b = -24 - \text{проверим: } c = -25; a = -16: (-16; -24; -25): \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 1) -16 \div 3 \\ & 2) -24 \div 3 \\ & 3) (-16 + 25) - 24 + 25 = 9 = 3^2 \\ & 4) -16 + 552 = 536 - \text{не подходит} \end{aligned}$$

$$2) \quad a - c = -1. \quad c = a + 1 \Rightarrow c \div 3 \Rightarrow (b - c) \div 3, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} b - c = -p^2 \\ (b - c) \div 3 \end{cases} \Rightarrow b - c = -9. \text{ Тогда } b - c = a - 8. \text{ Тогда}$$

$$-y < -1: -y - 1 = 3y + 36 =$$

$$= 35 - 4y$$

$$-1 \leq y < 12: y + 1 + 36 = 37 - 2y =$$

$$= 37 - 2y \geq 13$$

$$\text{Подставим: } a + (a - 8)^2 = 560$$

$$a^2 - 16a + 496 = 0$$

$$\begin{cases} a = 31 \\ a = 16 \end{cases}$$

$$\text{не подходят оба, т.е. } a \equiv 2 \pmod{3}$$

$$(31; 23; 32)$$

$$(y + 1) + 3(y - 12) = 13$$

$$y + 1 + 3y - 36 = 13$$

$$4y = 48 \quad D = 81$$

$$y = 12$$

$$1 + 39 = (2\sqrt{10})^2 \text{ или } \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{9}{4} - 12 = \frac{9 - 48}{4} = -\frac{39}{4}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{21}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$\begin{aligned} t - s + s &= 2t \\ t - s - 2t + s &= 0 \\ t(1 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x + 3 - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 2(12+x-x^2) - 10\sqrt{(x+3)(4-x)}$$