



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \quad x^2 + 4\sqrt{2}t \cdot x + (9t^2 - 9) = 0$$

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9t^2 - 9) = 36 - 4t^2 = 4(9 - t^2) \Rightarrow 9 - t^2 > 0 \Rightarrow t \in (-3; 3)$$

$$x = \frac{-4\sqrt{2}t \pm 2\sqrt{9-t^2}}{2} = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2} = x$$

скобки кружком, т.к. два различных действ. корня

Произведение корней положительно  $\Rightarrow$  либо они оба отрицательны, либо оба положительны.

(1) оба отрицательны  $\Rightarrow$  больший из них отрицателен:

$$-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} < 0$$

при  $t < 0$  ничего не выйдет  $\Rightarrow t > 0$

$$-2\sqrt{2}t < -\sqrt{9-t^2}$$

$$2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 \Rightarrow t \in (1; 3)$$

(2) оба положительны  $\Rightarrow$  меньший из них положительен:

$$-2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2} > 0$$

при  $t > 0$  ничего не выйдет  $\Rightarrow t < 0$ .

$$2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$t^2 > 1 \Rightarrow t > 1 \text{ ИЛИ } t < 0 \Rightarrow t < -1 \Rightarrow t \in (-3; -1)$$

$$\text{Ответ: } (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Поскольку  $a-b=12$ , и числа  $a$  и  $b$  одинаковой четности (то есть либо оба четные (4.), либо оба нечетные (н.)). Проверим оба случая:

(1) оба 4.

$$a^2-4.; 2ab-4.; b^2-4.; 3a-4.; 3b-4. \Rightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b = 19b^4 - \text{тоже } 4.$$

Значит  $19b^4$  4.  $\Rightarrow b^4-4$ . Но  $b$ -простое  $\Rightarrow b=2$ .

(2) оба н.

$$a^2-н.; 2ab-4.; b^2-н.; 3a-н.; 3b-н. \Rightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b = 19b^4 - 4. (н.+н.+н.+н.+4=4)$$

Значит аналогично (1)  $b=2$ .

Получаем в обоих случаях  $b=2$  и  $19b^4=304$

$$a^2+2ab+b^2+3a+3b=304$$

$$(a+b)^2+3(a+b)-304=0$$

$$D=3^2+4 \cdot 1 \cdot 304=9+1216=1225=35^2$$

$$a+b = \frac{-3 \pm 35}{2}$$

$$(1) \begin{cases} a+b = \frac{-3-35}{2} = -19 \\ a-b = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a = -7 \Rightarrow a = -3,5$ . Но  $a$  и  $b$  - натуральные  $\Rightarrow$  не подходит.

$$(2) \begin{cases} a+b = \frac{-3+35}{2} = 16 \\ a-b = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a = 28 \Rightarrow a = 14$  и  $b = 2$ . Все подходит.

Ответ:  $a=14; b=2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③

$DM \parallel AN$  и  $EM = 2EN \Leftrightarrow DC \parallel AC$   
( $AC$  лежит на  $DC$ )  $\Rightarrow \triangle DMC \sim \triangle AMC$  с  
коэф. 2. Значит  $AC = 2AM$ . Пусть  
 $AC = x$ . Тогда  $AD = x$  и  $AB = 2x$ .

Вспомним св-во биссектрисы  
каждого угла: она делит противо-  
лежащую сторону в отношении  
прилежащих сторон.

Заметим, что

$$\frac{AC}{CN} = \frac{AB}{BN} = \frac{x}{2}$$

$AN$  - биссектриса  $\angle BAC \Rightarrow$

$$\cos(2\angle CAN) = \cos(\angle BAC) = -\frac{3}{4}$$

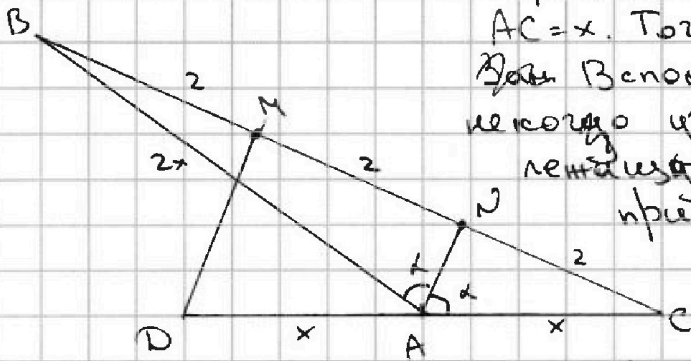
Тогда запишем теорему косинусов для  $\triangle ABC$ :

$$6^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(\angle BAC) = x^2 + 4x^2 + 4x^2 \cdot \frac{3}{4} = 8x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Тогда  $AB = 2x = \boxed{3\sqrt{2} = AB}$

Ответ:  $AB = 3\sqrt{2}$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6 Назовем деревни, из которых выходит 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно 5-ой, 6-ой, 7-ой и 9-ой. Тогда между этими 4-мя деревнями может пройти не более 3 дорог, т.к. иначе из одного из этих городов до другого можно будет добраться как минимум двумя разными маршрутами. Также из каждого из городов 5-го, 6-го, 7-го и 9-го выходят соответственно 5, 6, 7 и 9 дорог, а пока из них суммарно выходят  $3 \cdot 2 = 6$  дорог (умножаем на 2, т.к. каждое ребро мы считаем дважды). Значит оставшиеся дороги идут в города, из которых выходит по одной дороге  $\Rightarrow$  таких городов  $6 + 9 + 7 + 5 - 6 = 21$ . Мы назовем такие города "единичными".

Докажем, что из любого города до любого другого можно добраться единственным маршрутом:

- добраться из единичного города в единичный можно всего одним маршрутом, т.к. между ними 3 дороги (так что из каждого города выходит такая дорога).

- добраться из единичного города можно только до одного неединичного и больше никак, а уже из этого неединичного ем. предыдущий пункт.

Таким образом суммарно  $21 + 4 = 25$  городов это единственный вариант и возможный вариант.

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7) \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

выражение под корнем должно быть  $\geq 0$

$$1 - |x-y-1| \geq 0$$

$$|x-y-1| \leq 1$$

$$x-y-1 \in [-1; 1]$$

$$x-y \in [0; 2]$$

Поскольку числа целые  
есть всего 3 варианта:

$$(1) x-y=0$$

$$(2) x-y=1$$

$$(3) x-y=2$$

$$(1) x-y=0$$

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$x^2+y^2 \leq 0 \Rightarrow x=0 \text{ и } y=0$$

но тогда  $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 0$ , а не 2.

$$(2) x-y=1 \Rightarrow x=y+1$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} = 1 \Rightarrow$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 1$$

$$2 \cdot 1 - x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$(y+1)^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y=0 \text{ и } x=1 \text{ подходит}$$

$$(3) x-y=2 \Rightarrow x=y+2$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} = 0 \Rightarrow 2(x-y) - x^2 - y^2 = 2^2 = 4$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x=0 \text{ и } y=0 \Rightarrow \text{нет.}$$

Ответ:  $x=1; y=0$





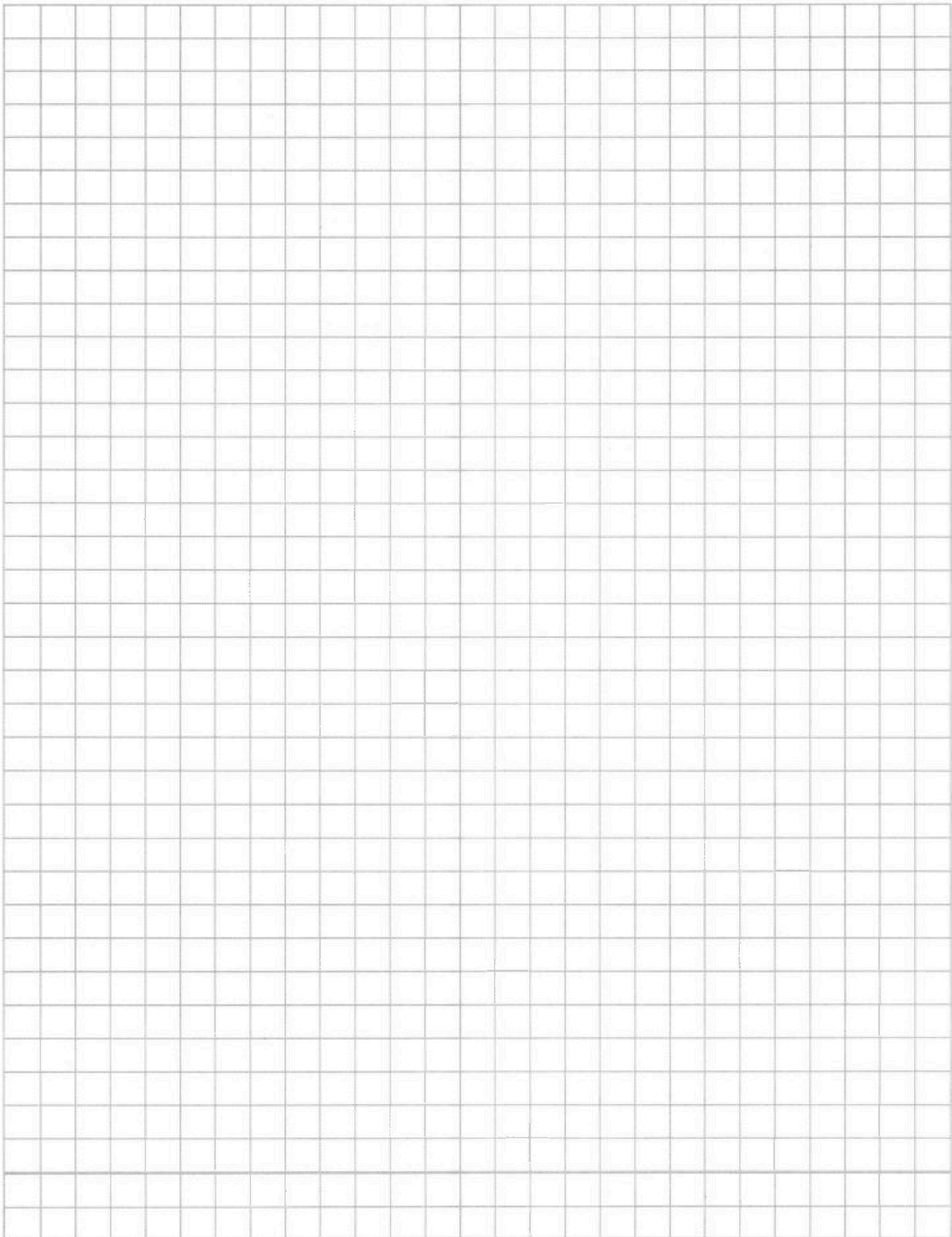
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D = 32t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 = 2^2(9 - t^2)$$

$$t \in [-3; 3]$$

$$x = \frac{-4\sqrt{2}t \pm \sqrt{D}}{2} = -2\sqrt{2}t \pm \sqrt{9-t^2}$$

(1) оба  $> 0 \rightarrow$  (1)  $-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} > 0$

(2) оба  $< 0 \rightarrow$  (2)  $-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} < 0$

(1)  $-2\sqrt{2}t - \sqrt{9-t^2} > 0$

$$-2\sqrt{2}t > \sqrt{9-t^2} \quad t < 0 \quad t \in [-3; -1]$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9 \Rightarrow t > 1, \text{ но } t < 0 \Rightarrow t < -1$$

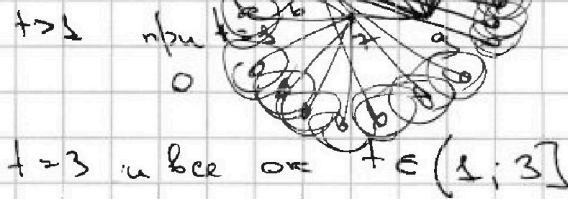
(2)  $-2\sqrt{2}t + \sqrt{9-t^2} < 0 \quad t > 0$

$$-2\sqrt{2}t < -\sqrt{9-t^2}$$

$$8t^2 > 9 - t^2$$

$$9t^2 > 9$$

$$t > 1$$



$$t = 3 \text{ и все ок } t \in (1; 3]$$

$$a - b = 12 \Rightarrow \text{четность } a, b$$

(1) оба чет.

$$4a + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$p = 2 \Rightarrow 19 \cdot 16 = 304$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 304$$

$$D = 3^2 + 4 \cdot 304 = 9 + 1216 = 1225 = 35^2$$

$$a+b = \frac{-3 \pm 35}{2}$$

(1)  $a - b = 12; a + b = -19$

$$2a = -7 \text{ а не натураль}$$

(2)  $a - b = 12; a + b = 16$   
 $2a = 28 \Rightarrow a = 14; b = 3$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ + 1050 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 16 \\ \hline 152 \\ + 171 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \sqrt{1225} \\ \hline 105 \\ 175 \\ \hline 1225 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

16 мест  
12 мест.

поет: 1, 2, 3, ..., 11

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{4} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$-\frac{3}{4} + 2\sin^2 \alpha = 1$

$2\sin^2 \alpha = \frac{7}{4}$

$\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\cos \beta = \frac{3}{4}$

$6^2 = x^2 + 4x^2 + 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{3}{4} = 8x^2 = 36$

$x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$AB = 2x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$4 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$   
 $= x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{2}xy}{2} = 4$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$x-y=2$$

$$2(x-y) - x^2 - y^2 = 4$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет}$$

$$BE=12$$

$$\begin{aligned} x-y &= 2 \\ 2(x-y) - x^2 - y^2 &= 1 \\ 2 \cdot 2 - x^2 - y^2 &= 1 \end{aligned}$$

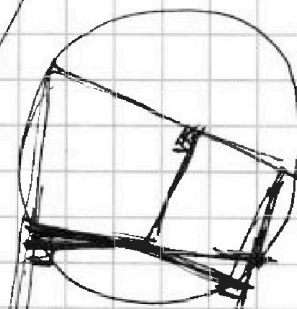
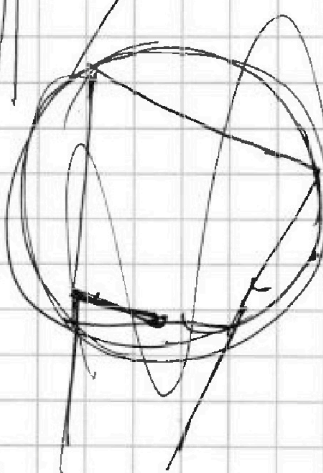
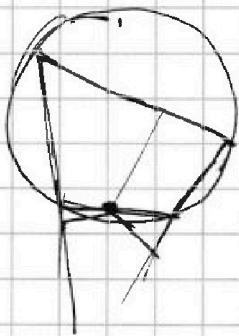
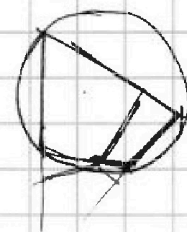
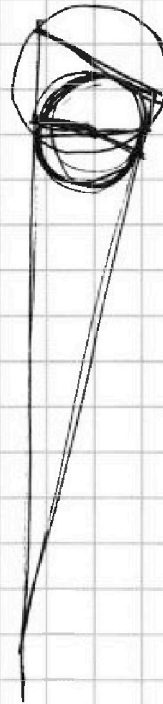
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = y + 2$$

$$y^2 + 2y + 4 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + 2y = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$$



$$2x - 2y - x^2 - y^2 > 0$$

$$x - y - 2 \in [-2; 2]$$

$$x - y \in [0; 2]$$

$$2(x-y) > x^2 + y^2$$

$$\text{цр. ав. } \exists \begin{cases} x-y=0 \\ x-y=2 \end{cases} \rightarrow 2 \cdot 0 > x^2 + y^2 \Rightarrow x=0, y=0$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

