



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что уравнение имеет 2 разл. действ. корня
тогда и только тогда его дискриминант $D > 0$.

$$\Rightarrow D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0$$

То е. Внета произведение корней равно $4t^2 - 4$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (2\sqrt{3}t)^2 - 4(4t^2 - 4) > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4t^2 > 0 \\ t^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 \in (1; 4) \Leftrightarrow t \in (-4; -1) \cup (1; 4)$$

Ответ: $t \in (-4; -1) \cup (1; 4)$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия: $\begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40, a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)^2 + 15(a-b) = 17p^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15) = 17p^5 \end{cases}$

Заметим, что м.к. $a, b \in \mathbb{N}$, но $a-b < a < 40$

$\Rightarrow (a-b)(a-b+15) < 40 \cdot 55 = 2200 \Rightarrow 17p^5 < 2200$

Если бы $p \geq 3$ ~~то~~ ^{прим. $p \geq 3$ значение}, то $17p^5 \geq 17 \cdot 243 = 4131 \Rightarrow 2200 > 4131$

$\Rightarrow \emptyset \Rightarrow p \leq 2$. П.к. минимальное простое число 2, то

$p=2 \Rightarrow$ задача эквивалентна решению системы:

$\begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (a-b)(a-b+15) = 17 \cdot 2^5 = 544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ (40-2b)(55-2b) = 544 \end{cases}$

~~$\begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ 2200 - 190b + 4b^2 = 544 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40; a, b \in \mathbb{N} \\ 2b^2 - 95b + 828 = 0 \end{cases}$~~

~~П.к. 17 - простое, $10 < a-b < 540$, но либо $a-b=17$, либо $a-b=17 \cdot 2$, либо $a-b=17 \cdot 4$, м.к. $a-b < a-b+15$~~

~~Если $a-b > 0$, то $\begin{cases} a-b=17 \\ a-b=17 \cdot 2 \\ a-b=17 \cdot 4 \end{cases}$, м.к. $a-b < a-b+15$~~

~~Если $a-b < 0$, то $\begin{cases} a+b=40 \\ (40-2b)(55-2b) = 544 = 17 \cdot 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=40 \\ 2b^2 - 490b + 1656 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ~~б имеет макс. 2 р-ва~~~~

~~Приведем к:~~ $\begin{cases} a=4 \\ b=36 \end{cases}$ Заметим, что $40-2b$ и

$55-2b$ разной четн., а b кратн. они дают $17 \cdot 2^5 \Rightarrow$ Одно из них 17 , а другое 2^5 или -17 и $-2^5 \Rightarrow$ м.к. $40-2b$ четно $\Rightarrow \begin{cases} 55-2b=17 \\ 55-2b=-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=19 \Rightarrow a=21 \Rightarrow \emptyset, \text{ м.к. } a-b+15=17, \\ b=36 \Rightarrow a=4 - \text{находим, м.к. } a-b=2 \\ a-b+15=-17, \text{ а } a-b=-32 \end{cases}$

Ответ: $b=36; a=4$

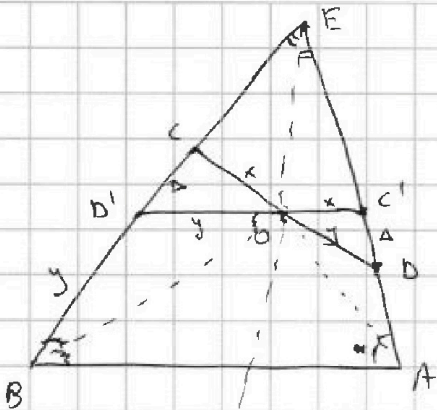
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $BE = 10$ ($EB + BO$)_{min} - ?

O — внутренняя $\triangle ABE$;

$ABCO$ — впис.

Решение: ~~мысл.~~ пусть $\angle BAE = 2\alpha$,

$\angle ABE = 2\beta \Rightarrow$ из впис. $ABCO$: $\angle ECO = 2\alpha$; $\angle EOC = 2\beta$.

~~Гипотеза: через O пр. $\parallel AB$. Пусть она вер.~~

Отразим отн. EO CB . Получим $C'D'$. Т.к. \angle
 $EB \leftrightarrow EA$ при ~~отраж.~~ отражением отн. EO , то
 B' лежит на EB , C' на EA . Также т.к. $\angle EBC = \angle EDC$

$= 2\beta \Rightarrow C'D' \parallel AB$. Пусть $C'D' = C'D = a$, $EO = OC' = x$;

$BO = OD' = y \Rightarrow EC' = kx \Rightarrow EC = kx$, из ~~необходимой~~
 отн. св-ва Евклидова т.к. $ED' = EB = ky \Rightarrow$

$$\Rightarrow EB + BO = ky + y = kx + x + a$$

Т.к. $C'D' \parallel AB \Rightarrow \angle D'O B = \angle D'B O \Rightarrow BO' = y$

$$\Rightarrow ky + y = BE = 10 \Rightarrow EB + BO = BE = 10$$

Ответ: 10.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если в графе из любой вершины в любую другую можно добраться единственным способом, то граф — дерево. Тогда будем рассматривать остров как граф, в котором вершины — деревни, а ребра — дороги между ними. Тогда, по сказанному ранее, этот граф — дерево.

Пусть деревень $n \geq 4$.

Посчитаем суммарное кол-во ребер k в графе.

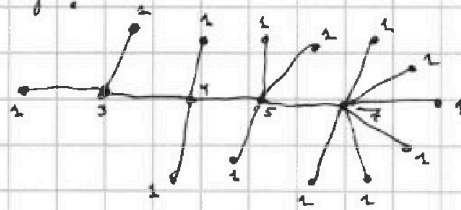
П.к. граф — дерево, то $k = n - 1$.

С другой стороны, $2k = 3 + 4 + 5 + 7 + (n - 4) \cdot 1$ — количество исходящих из вершин ребер равно удвоенному кол-ву ребер, т.к. каждое ребро имеет 2 конца.

$$\Rightarrow k = n - 1 = \frac{3 + 4 + 5 + 7 + (n - 4) \cdot 1}{2} \Rightarrow 2n - 2 = 15 + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 17$$

Ответ: 17 деревень. Пример:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x+y-2 > 0$. Тогда:

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{3-x-y} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x+y=3 \rightarrow -(x^2+y^2-2x-2y) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy=4 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 & y=2 \\ x=2 & y=1 \end{cases}$$

Если $x+y-2 = 0$: $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 & y=2 \\ y=0 & x=2 \end{cases}$$

Если $x+y-2 < 0$: $|x+y-2| = 2-x-y \rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{x+y-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x+y < 2 \end{cases} \Rightarrow x+y=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy=-1 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) \\ x+y=1 \end{cases}$$

П.к. $x, y \in \mathbb{Z}$, то $2xy$ четное $\Rightarrow 2xy \neq -1 \Rightarrow \emptyset$

Ответ:

$$\begin{cases} x=1 & y=2 \\ x=2 & y=1 \\ x=0 & y=2 \\ x=2 & y=0 \end{cases}$$

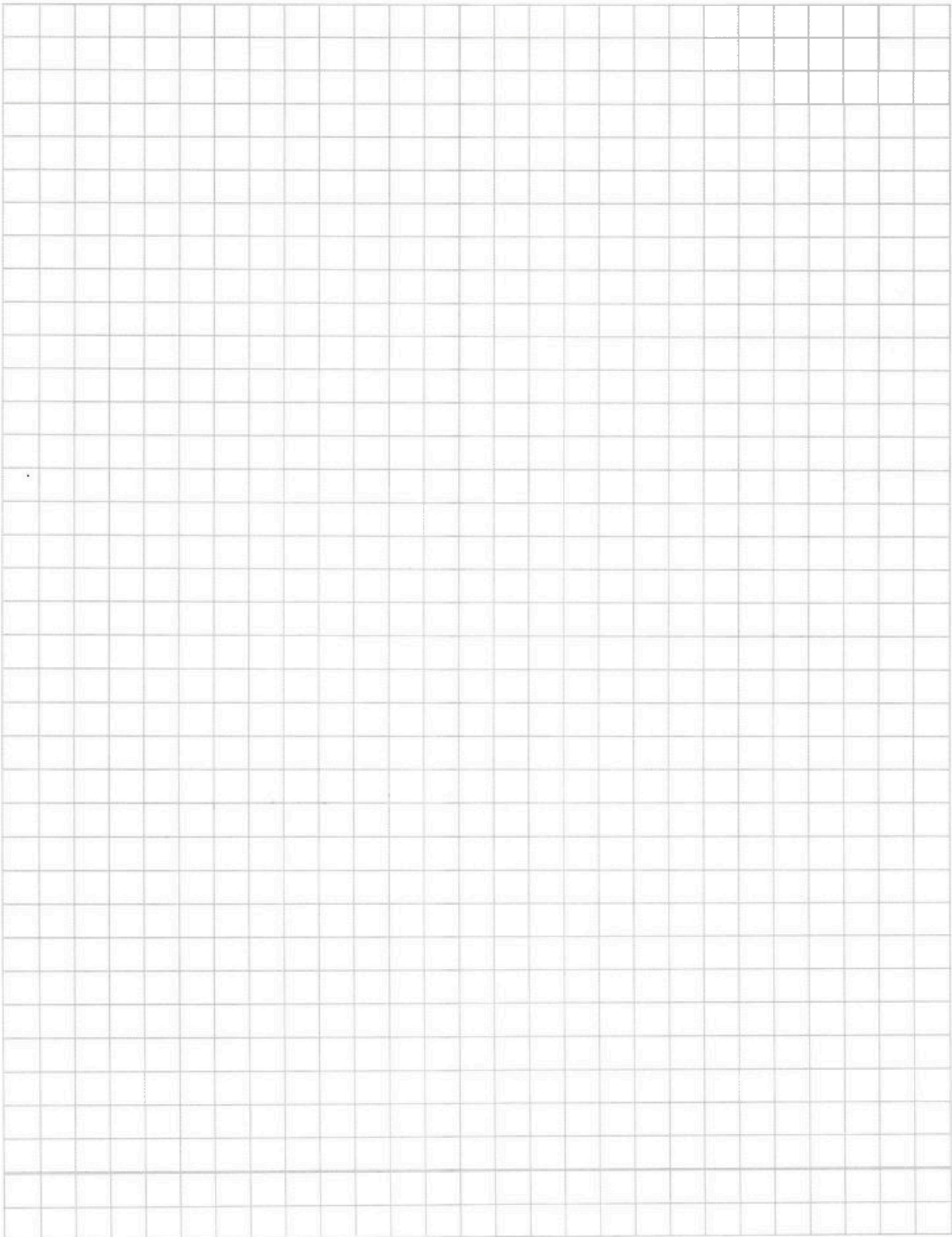


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

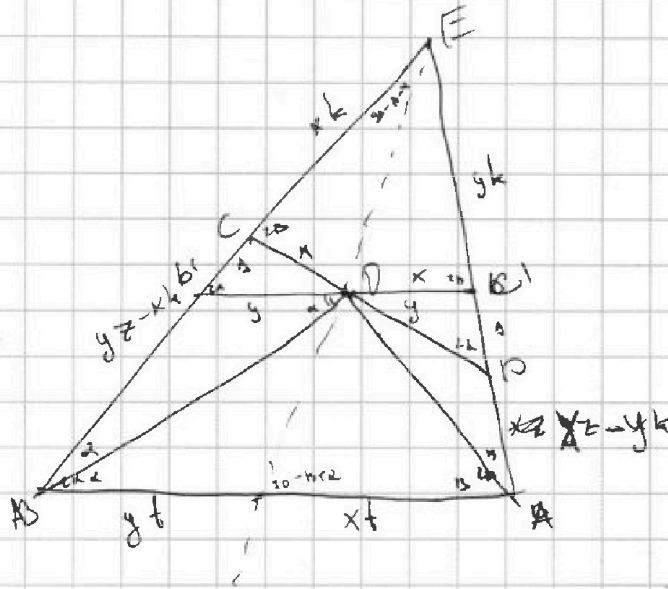
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$yz = 10$$

$$y(k-t) = ?$$

$$k = \frac{z}{t} \Rightarrow z = kt$$

$$ykt = 10$$

$$xk = t + y$$

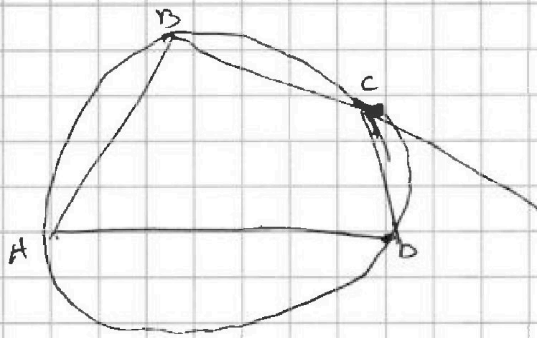


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

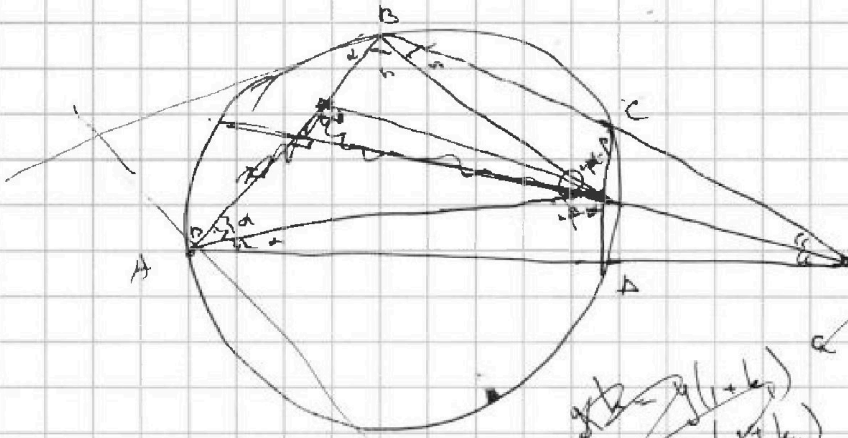


$$\frac{l}{\sin(\alpha)} = \frac{kb}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{l}{\sin(\alpha)} = \frac{yb}{\cos(\alpha)}$$

$$x \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = y \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$x \sin(2\alpha) = y \sin(2\alpha)$$



$$xk = y(l+k)$$

$$yk = x(l+k)$$

$$x(k-l) = y$$

$$y(k-l) = x$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{x}{y} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$\frac{a'}{\sin(\alpha)} = \frac{b'}{\sin(2\alpha)}$$

$$\rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$\rightarrow \sin(2\alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$a \sin(\alpha) = a \sin(\alpha)$$

