



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $143^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 792$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1 I_2 = 13/2$ , а  $MZ \cdot MY = 5$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$  или  $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 5 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у такого многоугольника  $(k+1)$  вершин. Тогда его углы образуют прогрессию:

$$143; 145; \dots; 143 + 2k, \text{ значит сумма углов} = \frac{143 + (143 + 2k)}{2} \cdot (k+1) = (143 + k)(k+1)$$

С другой стороны, сумма углов выпуклого  $(k+1)$ -угольника  $= (k-1) \cdot 180$ . Таким образом  $(143 + k)(k+1) = (k-1) \cdot 180 \Leftrightarrow k^2 - 36k + 323 = 0$   
 $\Leftrightarrow (k=17) \text{ или } (k=19)$

Если  $k=19$ , то самый большой угол

многоугольника  $= 143 + 2 \cdot 19 = 181$  - противоречие, что многоугольник выпуклый, тогда  $k=17$ .

При  $k=17$  углы многоугольника соответственно равны  $143; 145; \dots; 177$ , то есть

данный ~~многоугольник~~ выпуклый многоугольник существует, ~~и не имеет~~ ~~многоугольник~~ ~~так как~~ так как все его углы

$< 180^\circ$ , и сумма углов  $= 18 \cdot 180$ . Тогда полученный

многоугольник имеет 18 вершин

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 &= x \ln 8 + x \ln 2 + \\
 + y \ln 8 + z \ln 8 + z \ln 3 &= (x+y+z) \ln 8 + \\
 + x \ln 2 + z \ln 3 &= (x+y+z) \ln 8 + x \ln 2 + x \ln 3 + (z-x) \ln 3 \\
 &= (x+y+z) \ln 8 + x \ln 6 + (z-x) \ln 3 = \ln 6 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (x+y+z) \ln 8 + (x-1) \ln 6 + (z-x) \ln 3 &= \\
 &= 3(x+y+z) \ln 2 + (x-1) \ln 2 + (x-1) \ln 3 + (z-x) \ln 3 = \\
 &= (4x+3y+3z-1) \ln 2 + (z-1) \ln 3 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (4x+3y+3z-1) \frac{\ln 2}{\ln 3} + (z-1) &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (4x+3y+3z-1) \ln \frac{2}{3} + (z-1) &= 0 \\
 \text{Заметим, что } z-1 \in \mathbb{Z}, \ln \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}, \text{ тогда} \\
 \text{чтобы полученное выражение оказалось целым,} \\
 \text{должно быть верно, что } (4x+3y+3z-1) = 0 \\
 \text{(иначе получится выражение вида } ab+bc, \\
 \text{где } a \in \mathbb{Z}; a \neq 0; b \notin \mathbb{Z} \Rightarrow ab \notin \mathbb{Z}; c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab+bc \notin \mathbb{Z}) \\
 \text{Значит } 4x+3y+3z-1=0, \text{ а значит } z-1=0 \Rightarrow \\
 z=1. \text{ Тогда } 4x+3y+2=0
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow 4x + 2 = -3y : 3$$

Если  $x \equiv 0 \pmod{3}$ , то  $4x + 2 \not\equiv 3$

Если  $x \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $4x + 2 \equiv 4 \cdot 2 + 2 = 10 \equiv 1 \pmod{3}$

Тогда  $x \equiv 1 \pmod{3}$ , т.е.  $x = 3k + 1$  при  $k \in \mathbb{Z}$

$$1) k = -1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 4x + 2 = -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (-2)^2 + 2^2 + 1^2 = 9$$

$$2) k = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ или } x = 4 \Rightarrow 4x + 2 = -3y = 6 \Rightarrow y = -2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$$

3)  $k \leq -2$  или  $k \geq 1$ , тогда  $x \leq -5$  или  $x \geq 4$ ,

значит  $x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 \geq 16 > 6$  - не

$x^2 + y^2 + z^2$  не минимально

т.о.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 6$  и равенство достигается

при  $x = 1$ ,  $y = -2$ ,  $z = 1$

Проверим исходное равенство

$$\ln 16 - 2 \ln 8 + \ln 24 = 4 \ln 2 - 6 \ln 2 + \ln 4 +$$

$$+ \ln 6 = 4 \ln 2 - 6 \ln 2 + 2 \ln 2 + \ln 6 = \ln 6 -$$

равенство верно

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Выяснить~~ Пусть множество  $M$  состоит из чисел  $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$ .

Заметим, что  $p \leq (n+6) + (n+5) + (n+4) + (n+3) + (n+2) + (n+1)$ ,  
~~и~~  $q \geq n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5)$ ,

Тогда  $p - q \leq 6$

Также заметим, что  $p^2 = 792 + q^2 \Rightarrow p > 20 \Rightarrow$

$q > 14$ . В частности это означает, что  $p, q \neq 2$ , то есть оба числа нечетны (иначе они не простые)

Тогда  $p - q \neq 1, p - q \neq 3, p - q \neq 5$  (разница между двумя нечетными четная)  $\Rightarrow (p - q = 2)$  или  $(p - q = 4)$  или  $(p - q = 6)$  (в частности  $p - q > 0$ , иначе  $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) < 0$ )

Рассмотрим полученные случаи

$$\begin{aligned} 1) p - q = 2 &\Rightarrow p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = (p - q)(p - q + 2q) = \\ &= 2(2 + 2q) = 4(q + 1) = 792 \Rightarrow q + 1 = 198 \Rightarrow q = 197 \Rightarrow \end{aligned}$$

$p = q + 2 = 199$ . Оба числа  $p, q$  - простые.

Заметим, что сумма всех чисел  $= 7n + 21$ , тогда

$p = 7n + 21 - x$ , где  $x$  - одно из чисел из  $M$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } 7n + 21 - x = 199 \Rightarrow 7n - x = 178$$

Заметим, что для  $n \leq x \leq n+6$ , т.е.  $6n-6 \leq 7n-x \leq 6n$ .

Пусть тогда  $7n-x = 6n-r$ , где  $r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r \leq 6$ .

Заметим, что  $178$  дает остаток  $4$  при делении на  $6$ , тогда  $6n-r$  дает остаток  $4$  при делении на  $6$ . Тогда подходит только  $r=2$ , значит  $178 = 6n - 2 \Rightarrow$

$$\text{Тогда } 7n-x = 6n-r = 178 \Rightarrow 6n = 178 + r.$$

Тогда  $178+r : 6$ , значит  $r=2$ . Тогда

$$6n = 180 \Rightarrow n = 30, \text{ тогда наше множество}$$

$M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$ . Сумма

всех чисел  $M = 237$ , тогда  $p$  - это сумма всех

чисел без  $32$  ( $p = 237 - 32 = 199$ ),  $q$  - сумма всех

чисел без  $34$  ( $q = 237 - 34 = 197$ ),  $p$  и  $q$  - простые,

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 2 \cdot 396 = 792 \text{ - подходит}$$

$$2) p - q = 4 \Rightarrow p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = (p-q)(p-q+2q) =$$

$$= 4(4+2q) = 792 \Rightarrow q+2 = \frac{792}{8} = 99 \Rightarrow q = 97,$$

$$p = q + 4 = 101 \text{ Оба числа } p, q \text{ - простые}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем обозначения, аналогично п. 1 и проведем аналогичные рассуждения. Тогда

$$p = 7n + 21 - x = 101 \Rightarrow 7n - x = 6n - r = 80 \Rightarrow$$

$$80 + r = 6n : 6 \Rightarrow r = 4, \text{ тогда } n = 84/6 = 14 \Rightarrow$$

$$M = \{14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\} \text{ — значит}$$

$$\text{сумма всех чисел в } M = \frac{14+20}{2} \cdot 7 = 119.$$

Тогда пусть  $p$  — сумма всех чисел из  $M$  без

$$\text{числа } k. \text{ Тогда } q = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 99, \text{ но}$$

$q = 97$  — противоречие, т.е. данный случай невозможен

$$\begin{aligned} 3) \quad p - q = 6 &\Rightarrow p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = (p - q)(p - q + 2q) = \\ &= 6(6 + 2q) = 12(q + 3) = 792 \Rightarrow q + 3 = 66 \Rightarrow q = 63 : 3 \end{aligned}$$

не простое — противоречие ( $p - q \neq 6$ )

$$\text{Т.о. } M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$

$$\text{Ответ: } \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}} \quad \text{Пусть } \frac{\pi}{14} = \alpha,$$

тогда выражение примет вид:

$$5 - 4 \sin 3\alpha \sqrt{4 \cos 2\alpha - 5 \sin \alpha} \quad (=)$$

$$5 + 5 \sin \alpha \sqrt{4 \cos 2\alpha + 4 \sin 3\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot (2 \sin \alpha \cos \alpha) =$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha =$$

$$= -2 \sin^3 \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

Тогда исходное выражение примет вид:

$$5 + 5 \sin \alpha \sqrt{4 - 8 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} \quad (=)$$

$$= 5 + 5 \sin \alpha \sqrt{16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 7} \quad \forall \alpha$$

Рассмотрим  $F(x) = 16x^3 + 8x^2 - 7x + 7$

$$F'(x) = 48x^2 + 16x - 7, \quad F'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48x^2 + 16x - 7 = 0 \quad D = 8^2 + 7 \cdot 48 = 16 \cdot 25$$

$$\sqrt{D} = 20 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm 20}{96} \Rightarrow x = \frac{-16 + 20}{96} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$$



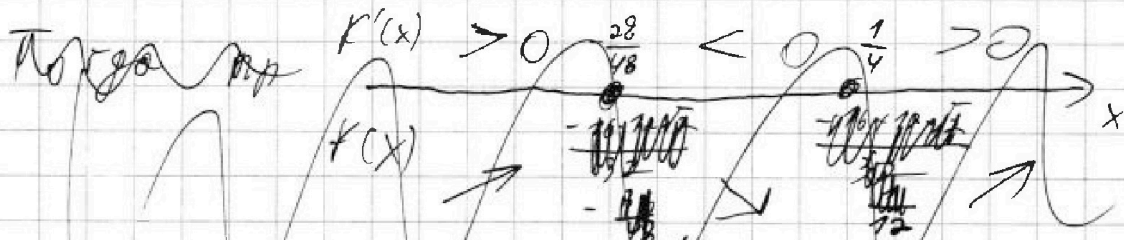


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.е.  $f(x) \rightarrow \max$  на  $[\frac{28}{18}; \frac{1}{4}]$

заметьте, что  $\frac{28}{18} = \frac{14}{9} \approx 1.55$ , т.к.  $1.5 < 1.55 < 2$

$\Rightarrow 256 < 288$

Но если рассмотреть  $x > 0$ , то максимум

$f(x)$  принимает при  $x = \frac{7}{12}$ , т.к.

при  $x \in [0; \frac{7}{12}] f(x) \uparrow$ , а при

$x \in [\frac{7}{12}; +\infty) f(x) \downarrow$

заметьте, что  $\sqrt{2} \approx 1.41$ , т.к.  $1.4 < 1.41 < 1.5$

$\Rightarrow \frac{12\sqrt{2}-16}{32} < \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

Тогда  $f(\frac{12\sqrt{2}-16}{32}) > 1 - 7 \cdot \frac{1}{16} > 0$ , т.е. при

всех  $x > 0$   $f(x) > 0$ . В частности, при  $x = \sin \alpha$

$f(\sin \alpha) > 0$  (т.к.  $\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin \alpha > 0$ ). Когда

мы получаем, что  $16 \sin^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 7 > 0$

$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

Ответ:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $f\left(\frac{1}{12}\right) = 16 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{12} + 1 > 0$ ,

т.о.  $f(x) > 0$  при  $x > 0$ , в частности

$f(\sin \alpha) > 0$  ( $\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin \alpha > 0$ )

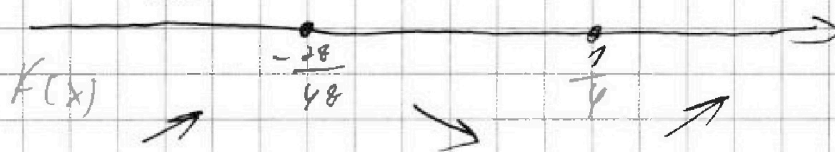
Тогда  $16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 1 > 0$ , т.к.

преобразование равносильно, то и в исходном

неравенстве знак  $>$

Ответ:  $5 - 4 \sin \frac{2\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$

$f'(x) \begin{matrix} > 0 \\ \swarrow \end{matrix} \quad < 0 \quad \begin{matrix} > 0 \\ \swarrow \end{matrix}$



Тогда рассмотрим  $x > 0$ , заметим, что тогда

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{7}{4} = 0 \text{ т.о. } f(x) > 0 \text{ при}$$

$x > 0$  и  $x \neq \frac{1}{4}$  Покажем, что  $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{14} + \frac{1}{4}$

~~Выведем, что  $\sin \alpha \neq$~~

Предположим противное, то есть  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ .

С другой стороны  $\sin \alpha = \sin \frac{8\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{14} = \cos \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$T.O \sin 8\alpha = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны } \sin 8\alpha &= 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha = \\ &= 4 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 8 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \\ &= 2 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \cos \alpha = 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos \alpha, \text{ т.е. } \cos \alpha \neq 0,$$

$$\text{то } 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$2 \cos 2\alpha (2 \cos^2 2\alpha - 1) = 1$$

$$\text{Но } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8}, \text{ тогда}$$

$$2 \cos 2\alpha (2 \cos^2 2\alpha - 1) = 2 \cdot \frac{7}{8} \left( \frac{49}{32} - 1 \right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{17}{32} \neq 1 -$$

противоречие, т.е.  $\sin \alpha \neq \frac{1}{4}$ . В то же время

$\sin \alpha > 0$ , тогда  $f(\sin \alpha) > 0 \Rightarrow$  в исходном

неравенстве должен стоять знак  $>$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим несколько случаев

1) Все выбранные вершины  $\in \alpha$ , тогда выбранные вершины не образуют пирамиду.

2) Одна из выбранных вершин  $\notin \alpha$ , остальные  $k \geq 4$  вершин  $\in \alpha$ . Помните, что данная пирамида будет выуклой (все основания лежат в фигуре, образованная вершинами из  $\alpha$ , данная фигура по условию вписанная)

Посчитаем кол-во таких пирамид (т.е. кол-во способов выбрать  $k \geq 4$  вершин из  $\alpha$ , и одну из  $\alpha$ ).

Помните, что выбрать вершину не из  $\alpha$  можно 5 способами

а)  $k=4$ , тогда  $\frac{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$  - кол-во способов выбрать 4 вершины из  $\alpha$

б)  $k=5$ , тогда  $\frac{2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$  - кол-во способов выбрать 5 вершин из  $\alpha$

в)  $k=6$ , тогда нужно выбрать одну вершину из  $\alpha$ ,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

которую мы не включаем, это можно сделать <sup>7</sup>  
способами

1)  $k=7 \Rightarrow$  1 способ выбрать 7 вершин из 2  
Тогда всего способов выбрать  $k \geq 4$  вершин  
из 2 можно  $35 + 21 + 7 + 1 = 64$  способами,  
для каждого из этих 64 способов 5 способов  
выбирается вершина не из 2, т.е. всего  
исковых пирамид  $64 \cdot 5 = \underline{320}$

3) Заметим, что все остальные пирамиды - треугольные. Действительно, предположим обратное.  
Тогда есть  $k \geq 4$  точек лежащих в одной плоскости (которые образуют основание предполагаемой "пирамиды"), и эти  $k$  точек ~~мы~~ не лежат все в 2 (т.к. эти пирамиды мы уже учли). Но это противоречит условию, что если 4 точки образуют плоскость, то эта плоскость - 2, т.е. предположение неверно. Тогда остается посчитать кол-во треугольных пирамид (т.е. кол-во способов выбора



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рать 4 точки, лежащие в одной плоскости)

Посчитаем кол-во способов выбрать 4

точки из 12, и вычтем кол-во способов выбрать

4 точки лежащие в одной плоскости

$$a) \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495 - \text{кол-во способов}$$

выбрать 4 точки из 12

б) 2<sup>ое</sup> условие эквивалентно тому, что было

выбрано 4 точки из 4. Выбрать 4 точки из

$$4 \text{ можно } \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \text{ способов.}$$

Тогда всего треугольных пирамид  $495 - 6 = 489$ .

Значит всего пирамид  $489 + 291 = 780$

Ответ: 780



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



$$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha + \sin \alpha$$

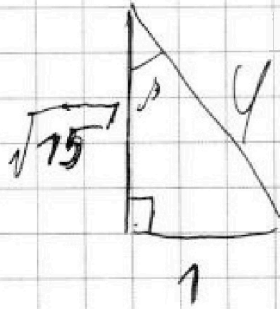
$$\sin \beta = 1/4$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{19}{42} > \frac{7}{42}$$

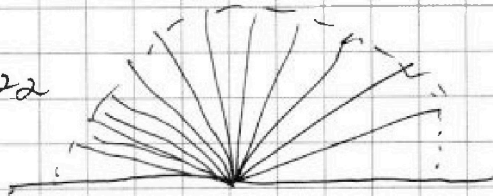
$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$$

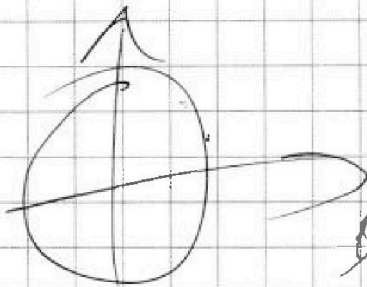


$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha$$



$$\sin \alpha \cos \alpha$$



$$\alpha = \frac{\pi}{14} \Rightarrow 3\alpha = \frac{3}{14}\pi$$

$$\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$$

~~sin~~  
cos

$$\sin \alpha = 4 \sin^3 \alpha$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{96} = \frac{11}{16}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{11}{16} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1-1}{250} < \frac{1}{2}$$

OK

$$\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{7}{8} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 8\alpha = \cos 4\alpha$$

$$\sin 8\alpha = 2 \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\sin \frac{2\pi}{14} \quad 5(1 + \sin \frac{\pi}{14}) \quad 4(\sin \frac{2\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{7})$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} = \sin(\frac{2\pi}{14} + \frac{\pi}{14}) = \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} \sin \frac{2\pi}{14}$$

$$\sin \frac{2\pi}{14} = 2 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}$$

$$\frac{\pi}{14} = \alpha$$

$$3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = -3 \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$5(1 + \sin \alpha) + 4(3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$5 + 5 \sin \alpha + 12 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 \sin^3 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$4 \sin^3 \alpha + 9 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \quad | \quad 12 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 \_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~1 2 3 4 5 6 7~~

1 4 3 1 4 5 ... - k+1 член последний = 143+k-2

n вершин  $\Rightarrow (n-2) \cdot 180$  - сумма углов

$$\frac{143 + 143 + k \cdot 2}{2} = (143 + k) \cdot (k + 1)$$

$$(143 + k)(k + 1) = (k - 1) \cdot 180$$

$$323 = 17 \cdot 18$$

$$\begin{array}{r} \times 198 \\ \underline{4} \\ 792 \end{array}$$

$$197 - 0k$$

$$199 -$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \underline{2} \\ 119 \end{array}$$

~~7n+21~~ ~~4n+197~~

$$\frac{7n+21}{2} = \frac{4n+197}{2}$$

$$\frac{792}{6} = \frac{117}{6}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 7 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 792 \overline{) 92} \\ \underline{72} \phantom{00} \\ 200 \\ \underline{166} \\ 34 \end{array}$$

$$7n + 21$$

$$6n + 21$$

$$p = 7n + 21 - x = 101 \Rightarrow 7n - x = 80$$

$$7n - x = 6n - x = 80 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть одна т. не из  $\alpha$ ;  
 $k$  из  $\alpha$ , другая не из  $\alpha$

$$3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \quad (35 + 35 + 27 + 7 + 0) \cdot 5$$

$$4 = 35 \quad \sqrt{D} = 12\sqrt{2}$$

$$5 = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 17.5$$

$$6 = 7 \quad x = \frac{-76 \pm 12\sqrt{2}}{32}$$

$$7 = 1$$

2) Несколько не из  $\alpha \Rightarrow$  только треугольные

$$\ln 16 = \ln 8 + \ln 2 \quad 64 + 7 \cdot 32 =$$

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 2 = \quad = 76(4 + 14) =$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 16 \cdot 9 \cdot 2$$

~~$(x+y+z) \ln 16 + x \ln 2 + y \ln 8$~~

$$(x+y+z) \ln 8 + x \ln 2 + y \ln 3 = \ln 6$$

$$(x+y+z) \ln 8 + x \ln 6 + (y-x) \ln 3 = \ln 6$$

$$\ln^x a + \ln^y b = \ln^{x+y} ab$$

$$e^x = a \quad e^y = b \quad e^{x+y} = ab \text{ - OK}$$

$$\sin 2\alpha =$$

$$\sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) =$$

$$\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha$$