МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Мы знаем, что сумма углов выпуклого многоугольника с n сторонами равна $S = 180°(n-2)$.

Сумма же арифметической прогрессии с разностью d, нулевым членом a_0 и количеством m равна:

$S_1 = \frac{2a_0 + d(m-1)}{2} m$ Заметим, что $m = n$. Рассмотрим два случая:

1) $d = 2°$. Тогда $S_1 = \frac{2 \cdot 143° + 2(n-1)}{2} n = (142+n)n$.

$S_1 = S \Rightarrow n(142+n) = 180(n-2) \Rightarrow n^2 - 38n + 360 = 0$

$D = (2 \cdot 19)^2 - 4 \cdot 360 = 4(361 - 360) = 4 \Rightarrow n = \frac{38 \pm 2}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 20 \\ n = 18 \end{array}\right.$

Очевидно, что найденные n подходят.

2) $d = -2°$. Тогда $S_1 = \frac{2 \cdot 143° - 2(n-1)}{2} n = (144-n)n$.

$S_1 = S \Rightarrow n(144-n) = 180(n-2) \Rightarrow n^2 + 36n - 360 = 0$

$D = (18 \cdot 2)^2 + 4 \cdot 360 = 4 \cdot (324 + 360) = 4 \cdot 684 \Rightarrow$ В этом случае n - не целое число $\Rightarrow n$ не подходит.

Число вершин = числу ребер = количеству углов.

Ответ: 20.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$ $\quad x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ все применённые преобразования корректны

$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6$

$\ln(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \ln 6$ Натуральный логарифм монотонно возрастает, поэтому: $16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$

$2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 6 \Rightarrow 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 6 = 2 \cdot 3$

Исходя из того, что $x, y, z \in \mathbb{Z}$, а также из основной теоремы арифметики, получаем:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-2-3y}{4}$$

Видим, что для целого x y должен быть чётным.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{-2-3y}{4}\right)^2 + y^2 + 1 =$$

$$= \frac{4 + 12y + 9y^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{25y^2 + 12y + 20}{16}$$ – парабола с ветвями вверх

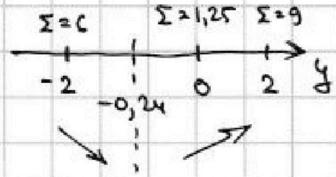
Значит, минимум достигается в вершине при $y = -\frac{12}{50} = -0{,}24$

Но нам подходят только $y \in \mathbb{Z}$ (и чётные) $\Rightarrow$ проверяем ближайшие значения

1) $y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

2) $y = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{100 - 24 + 20}{16} = \frac{96}{16} = \frac{24}{4} = 6$ ~~Минимальное значение 1,25~~

~~Достигается при $z = 1$, $y = 0$, $x = \frac{-2-3\cdot 0}{4}$~~



3) $y = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{100 + 24 + 20}{16} = \frac{25 + 6 + 5}{4} = 9$

Видим, что минимальное значение достигается при $\begin{cases} y = -2 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ и равно 6

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $p^2-q^2=(p-q)(p+q)=2^3\cdot 3^2\cdot 11$. Пусть сумма чисел (всех) S, а не выбранными оказались числа a и b.

Тогда $(p-q)$ ~~$(p+q)=(a-S)(S-a+S-b)=(a$~~ $=a-b$, что по модулю ≤ 6 (ибо числа последовательные) $\Rightarrow (p+q)\,\vdots\,11$. При этом ~~$p+q=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 11}{p-q}$~~ Остаётся перебрать простые числа от 2 до $\frac{792}{2}$ $=$ (т.к. $|p-q|\geq 2$) $=396$, и найти подходящие p и q. Единственное значения: $\begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases}$. ~~Пусть первое из семи чисел k.~~

Но ~~Тогда сумма~~ Соответствующее M подобрать не получится.

Ближайшее значение $M=\{13;14;15;16;17;18;19\}$

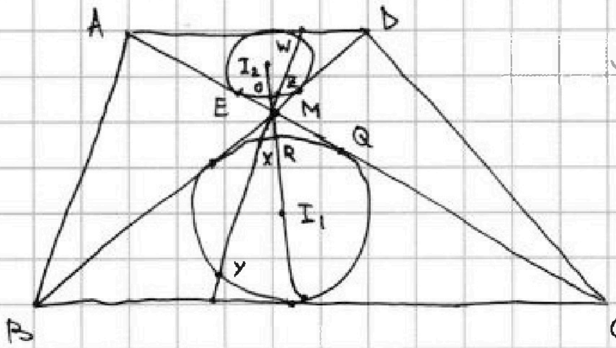
97

Ответ: $M=\{13;\ldots;19\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что картинка в треугольнике AMD ~~...~~ гомотетична картинке в треугольнике BMC (как и сами треугольники) с коэффициентом $k = \frac{AD}{BC} = \cancel{2}$ 0,5

Иными словами, соотношение $\frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} = \frac{1}{k}$ выполняется для $\forall$ двух соответственных отрезков из треугольников (и их „внутренностей“) BMC и AMD. Тогда: $MR = 2MO$; $\cancel{MX = \frac{MZ}{2}}$; $MX = 2MZ$; $MY = 2MW$; $r_{\omega_1} = 2r_{\omega_2}$ (радиусы ω_1 и ω_2).

Проведём прямые MI_1 и MI_2. Они обе являются биссектрисами, так как I_1, I_2 − центры вписанных окружностей.

~~Тогда~~ Тогда
$$\left.\begin{aligned} \angle EMI_2 &= \tfrac{1}{2}\angle AMD \\ \angle QMI_1 &= \tfrac{1}{2}\angle BMC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Т.к. } \angle AMD = \angle BMC,\ \angle EMI_2 = \angle QMI_1$$

Получаем, что вертикальные углы равны $\Rightarrow$ Точки I_1, M, I_2 лежат на одной прямой.

Запишем степень точки M относительно ω_1 и ω_2:

$$\begin{cases} \deg_M(\omega_1) = MR(MR + 2\cdot r_{\omega_1}) = MQ^2 = MX \cdot MY \\ \deg_M(\omega_2) = MO(MO + 2r_{\omega_2}) = ME^2 = MZ \cdot MW \end{cases}$$

$$\begin{cases} \deg_M(\omega_1) = MR(MR + 2r_{\omega_1}) = MX \cdot MY = 2MZ \cdot MY = 10 \\ I_1I_2 = r_{\omega_1} + r_{\omega_2} + MO + MR = \frac{3}{2}r_{\omega_1} + \frac{3}{2}MR = \frac{13}{2} \Rightarrow 3r_{\omega_1} + 3MR = 13 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из второго уравнения, $MR = \frac{13}{3} - r\omega_1$. Тогда, подставив в 1ое получим:

$$\left(\frac{13}{3} - r\omega_1\right)\left(\frac{13}{3} + r\omega_1\right) = 10$$

$$\frac{169}{9} - r^2\omega_1^2 = 10 \Rightarrow r^2\omega_1^2 = \frac{169-90}{9} = \frac{79}{9} \Rightarrow r\omega_1 = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

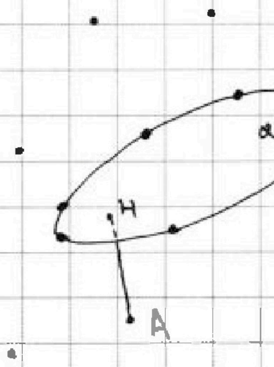
Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что если взять любую из пяти вершин, $\notin \alpha$, и любое количество точек в α (≥ 2), получится выпуклая пирамида.

Действительно, пусть мы взяли точку $A \notin \alpha$. Очевидно, что высота AH полученной пирамиды не равна $0 \Rightarrow$ пирамида не будет вырожденной. Также очевидно, что для $\forall$ количества (≥ 3) выбранных точек в α $\exists$ построенный на них выпуклый многоугольник, и при том только один (достаточно, пройдясь в одном направлении по окружности, соединить точки).

Значит, уже получаем $C_5^1 \cdot (C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)$ пирамид.

вершина основание

$$5\left(C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 + C_7^0 - (C_7^0 + C_7^1 + C_7^2)\right) =$$

$$= 5\left(2^7 - 1 - 7 - \frac{7\cdot 6}{2}\right) = 5(128 - 8 - 21) = 99\cdot 5 = 495$$

~~Могут ли быть ещё пирамиды? Да. Достаточно взять $\forall$ четыре из 12 точек и получиться треугольная пирамида. Она не будет вырожденной, ибо, из условия, эти четыре точки не лежат в одной плоскости. Она будет выпуклой, ибо треугольники, один из которых в основании, другими не бывают. $\Rightarrow$ Все такие нам подходят. Их $C_5^4 = 5$.~~

~~Если же рассмотреть иные варианты пирамид, то точки основания не будут лежать в одной плоскости. Действительно, пусть это не так. Тогда, из условия, это плоскость α - противоречие.~~

Отдельно рассмотрим треугольные пирамиды. Их $C_{12}^4 - C_7^4 =$

(все варианты)

(вырожденные в плоскость α)

$$= \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{24} - \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{24} = 5\cdot 92$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Но мы уже учли $5 \cdot C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^2}{6} = 5 \cdot 35$ штук (они входят в 495)

Значит, общее число увеличится на $5(92-35) = 5 \cdot 57$. Итого,

$5(99+57) = 5 \cdot 156$ вариантов.

Предположим, что есть еще пирамида. Тогда у них в основании как минимум 4 вершины $\Rightarrow$ (Из условия) они лежат в плоскости $\alpha \Rightarrow$ мы их уже учли, противоречие!

Ответ: ~~[illegible]~~ 780

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\cdot\frac{1}{\sqrt2}-4\cdot\frac{1}{\sqrt2}=$ $\quad 1-\frac{x^2}{2}$ $\quad \sin\frac{3\pi}{14}<\frac{1}{\sqrt2}$

$\sin\frac{\pi}{14}>\ \cos\frac{\pi}{7}<\frac{1}{\sqrt2}$

$\sin\frac{\pi}{12}$ $\quad \cos\left(\frac{6\pi}{14}\right)>1-\frac{6\pi^2}{196}\sin\frac{\pi}{198}>0$

$5-\frac{8}{\sqrt2}+5-5\cdot\frac{6\pi^2}{196}$

$10-\frac{8}{\sqrt2}-\frac{30\pi^2}{196}<10-\frac{8}{\sqrt2}-\frac{30\cdot3^2}{196}$

$-\frac{8}{\sqrt2}+\frac{1960-30\cdot9}{196}\vee0$

$\frac{10(196-27)}{196}\vee\frac{8}{\sqrt2}$

$14\cdot7$

$\frac{5\cdot169}{14\cdot7}-\frac{8}{\sqrt2}\vee0$

$5\cdot169\sqrt2\vee8\cdot14\cdot7$

$25\cdot13^4\cdot2\vee8^2\cdot14^2\cdot7^2$

$8\cdot4$

$(170-1)^2=28900-340+1=28561$

$28561\cdot25$

142805
57122
714025

$32\cdot49$: 288, 128, 1568

$1568\cdot196$: 9408, 14112, 1568, 307328

$\cos\frac{\pi}{6}=1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$

$\frac{3}{14}\quad\frac{3}{12}$

$\sin\frac{3\pi}{14}>\sin\frac{3\pi}{12}=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\frac{\sqrt3}{2}=$

$\sqrt{\frac{\frac12-\frac{\sqrt3}{4}}{}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}}$

$\sin\frac{\pi}{14}<\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}}$

$<5-\frac{1}{\sqrt2}\cdot4-4\cdot\frac{\sqrt3}{2}+5\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}}$

$<3-2\sqrt3+5\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{4}}\vee0$

$\sqrt{\frac{25(2-\sqrt3)}{4}}\vee2\sqrt3-3$

$\frac{25(2-\sqrt3)}{4}\vee21-12\sqrt3$

$50-25\sqrt3\vee84-48\sqrt3$

$23\sqrt3\vee34$

$529\cdot3\vee456$

$289\cdot4=1156$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$2b - \frac{13^2}{2} + 2bz + 6z^2 = -15$

$(b+z)^2 - z^2 = \frac{5}{2}$

$2b(b+z) - \frac{13^2}{2} + 6z^2 = -15$

$2b\sqrt{\frac{5}{2}+z^2} - \frac{13^2}{2} + 6z^2 = -15$

$2b\sqrt{\frac{5}{2}+z^2} = \frac{139}{2} - 6z^2$

$2b^2 \cdot \frac{5}{2} + 2b^2 z^2 = \frac{139^2}{4} - 3\cdot 139 \cdot 2z^2 + 36z^4$

$d = \sqrt{\frac{5}{2}}$ $c = \sqrt{10}$

$\begin{cases} (a+z+2a+2z) = \frac{13}{2} \\ a(a+2z) = \frac{5}{2} \end{cases}$ $3a + 3z = \frac{13}{2}$ $a = \frac{13}{6} - z$ $a(a+2z) = \frac{5}{2}$

$\left(\frac{13}{6} - z\right)\left(\frac{13}{6}+z\right) = \frac{5}{2}$

$\frac{169}{36} - z^2 = \frac{5}{2}$ $\frac{169}{36} - \frac{90}{36} = z^2$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$

$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} \vee 5\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} - 5\cos\frac{\pi}{7} + 5\sin\frac{\pi}{14} \vee 0$

$5 + 5\left(\sin\frac{\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{14}\right) + \sin\frac{3\pi}{14} - 5\cos\frac{\pi}{7}$

$5 + 5\cdot 2\cdot \sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{14} - 5\cos\frac{\pi}{7}$

$5 - 10\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{14} - 5\cos\frac{\pi}{7}$

$\sin\frac{\pi}{7} = x$

$5 - 10x(1 - 2x^2) + x - 5(1-2x^2)$

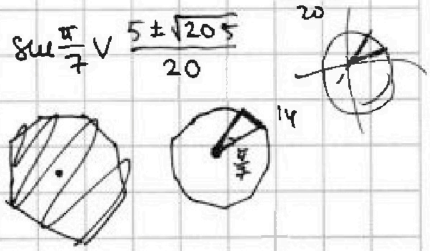
$\cancel{5} - 10x + 20x^3 + x - \cancel{5} + 10x^2$

$x(-9 + 10x + 20x^2) \vee 0$

$25 + 180 = 205$

$\sin\frac{\pi}{7} \vee \frac{5 \pm \sqrt{205}}{20}$

$\frac{5 \pm 14,...}{20}$



14

$\sin\frac{\pi}{7}\cdot 14 < \pi$

$\sin\frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{14}$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{14}$

$\frac{\pi}{\pi}$ 0,71 $1 - \frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{3\pi}{14} > \frac{3\pi}{14} - \frac{27\pi^3}{14^3\cdot 6}$

$5 - 4\left(\frac{3\pi}{14} - \frac{27\pi^3}{14^3\cdot 6}\right)$

$\cos\frac{\pi}{7} < 1 -$

$5 - 4\frac{12\pi}{14} + \frac{27\cdot 2\pi^3}{14^3\cdot 3}$

$() < $

$\sin\frac{\pi}{14} > \frac{\pi}{14} -$

$\sin\frac{\pi}{14} = x$

$4 - \frac{3\pi}{14}$

$\sin(2\alpha+\alpha) = 2\sin^2\alpha\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\cos\alpha$ $\sin(2\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$\sin\alpha\left(2(1-\sin^2\alpha) + 1 - 2\sin^2\alpha\right) =$

$\sin\alpha(3 - 5\sin^2\alpha)$

$5 - 4x(3 - 5x^2) - 4(1-2x^2) + 5x$

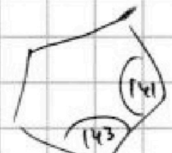
$5 - 12x + 20x^3 - 4 + 8x^2 + 5x = 1 - 7x + 8x^2 + 20x^3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

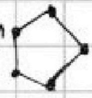
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



141 143

a_0

$180(n-2)=(142+n)n$



$n^2+142n=180n-360$

$n^2-38n+360=0$ 360

$381-360=21$

$(144-n)n$

284

143

141

$n(144-n)$

$180(n-2)$

$(144-n)n=180(n-2)$

$144n-n^2=180n-360$

$n^2+36n-360=0$

$n^2+36n-360=0$

$18\cdot18=324$

$324+360=684$

324

$28\cdot28$

$28^2=4\cdot14^2=4\cdot196=4(200-4)$

784

$28\cdot28=224+56=784$

$180(n-2)=\frac{143+143+(n-1)2}{2}n=(143+n-1)n=(142+n)n$

$\sqrt{684}=26$

4

284

$142n+n^2=180n-360$

$n^2-38n+360=0$

$\frac{D}{4}=361-360=1$

$n=19\pm1 \Rightarrow n=20;18.$

$-2aS+a^2+2bS-b^2$

$180(n-2)=\frac{143\cdot2\pm2(n-1)}{2}n=(143+n-1)n$

$(142\pm n)n$

$\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{24}$ 5·92

$128-1-7-\frac{7\cdot6}{2}-\frac{7\cdot6\cdot5}{6}$ 5·99 $-5\cdot7$

$120-21-35$

$99-35=64$

$p-q=b-a\le6$

$(20-1)^2=400-40$

$156\cdot5=780$

1 a b 7

S

$(S-a)^2-(S-b)^2=792$

прост

$(a-b)(a+b)$

$(b-a)(2S-a-b)=792$

$x\ln16+y\ln8+z\ln24=\ln6$

$\ln16^x+\ln8^y+\ln24^z=\ln6$

$16^x\cdot8^y\cdot24^z=6$

$2^{4x}\cdot2^{3y}\cdot2^{3z}\cdot3^z=6$

$2^{4x+3y+3z}\cdot3^z=6$

792	2
396	2
198	2
99	9
11	11

$396\cdot2=792$

$792=2^3\cdot9\cdot11$

$(p-q)(p+q)=2^3\cdot3^2\cdot11$

±1

±1

2·3²

$-2\ 0\ 2$

$z=1;\ 4x+3y+3=1$

$4x+3y=-2$

$-\frac{12}{50}$ 0

$p,q\ 3\ 2\ 1$

$p+q=22$

$x=\frac{-2-3y}{4}$

$\frac{4+12y+9y^2}{16}+y^2+1$

$\frac{25y^2+12y+20}{16}$

$\frac{20}{16}$

$\frac{100+24+20}{16}=\frac{96}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)$ $\quad p,q \geq 21 \quad 2^3\cdot3^2\cdot11$

$p+q \vdots 22$

23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83

93 97 101 103 107 109 113 127 131 137

$\boxed{198}$ 210 216 224 258 268

$(101-97)(101+97)=4\cdot22\cdot9=2^3\cdot11\cdot9$

$\frac{n+n+6}{2}\cdot7=(n+3)7$

$$\begin{cases} 7n+21-(n+a)=101 \\ 7n+21-(n+a)=97 \end{cases}$$

$7n+21-n-a=101 \qquad 7n+21-n-a=97$

$6n-a=80 \qquad 6n-a=76$

$n=\frac{80+a}{6}\quad 0<a\leq6 \qquad a=\frac{76+a}{6}$

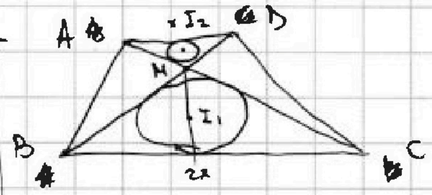
84 78 90

$n=\frac{84}{6}=14,\ a=4 \qquad n=13,\ a=2$

14 15 16 17 18 19 20 $\qquad$ 13 14 15 16 17 18 19

$34\cdot3+17=\underline{119}$ $\qquad$ 112

$5\cdot99 \quad \frac{92+64}{156} \quad 5\cdot84$



$(b+r)^2-r^2=\frac{5}{2}$

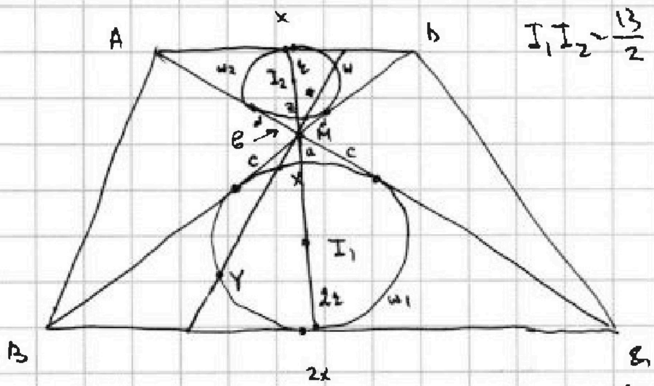
$(a+2r)^2-4r^2=10$

$(b-a-r)(a+b+3r)+3r^2=\frac{5}{2}-10=-\frac{15}{2}$

$(b-a-r)\cdot\frac{13}{2}+3r^2=-\frac{15}{2}$

$(b-a-r)\cdot13+6r^2=-15$

$(b-\frac{13}{2}+b+2r)13+6r^2=-15$



$I_1I_2=\frac{13}{2},\ MZ\cdot MY=5$

$\frac{MY}{2}=\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} d^2=b(b+2r)=MZ\cdot \\ c^2=a(a+4r)=2MZ\cdot MY=10 \\ \boxed{3r+a+b=\frac{13}{2}} \end{cases}$$

$(dc)^2=ab(a+4r)(b+2r)=5MX(MZ+MW)$

$a^2=MX(MX+XY)MY$

$b^2=MZ\cdot MW$

$a^2b^2=5MX\cdot MW$

$d^2=(b+2r)b$

$c^2=$

$$\begin{cases} b(b+2r)=\frac{5}{2} \\ a(a+4r)=10 \\ 3r+a+b=\frac{13}{2} \end{cases}$$

$a+r=\frac{13}{2}-b-2r$

$\cancel{9r^2+a^2+b^2+6ar+6br+2ab=169}$

$b^2+2br+r^2-r^2=$

$(b+r)^2-r^2=\frac{5}{2}$

$(a+2r)^2-(2r)^2=10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

V – знак сравнения двух чисел.

$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} \vee 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$ (Слева и справа можно прибавлять любое число, от этого сравнение не изменится)

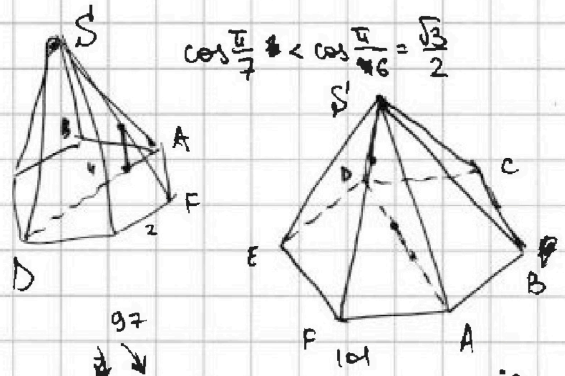
$5 - 4\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{\pi}{7} + 5\sin\frac{\pi}{14} \vee 0$

Заметим, что $\sin\frac{3\pi}{14} < \sin\frac{3\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\frac{\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14}\right) = \cos\frac{6\pi}{14} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{14}\cdot 6\right)^{2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}$

$\cos\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Известное разложение в ряд Тейлора.



$p+q \le$ $2^3\cdot 3^2\cdot 11$

$6^2\cdot 2\cdot 11$

$2\cdot 3^2$

$72 = 36\cdot 2$

97

n n+a

$(p-q)(p+q) = 2^3\cdot 9\cdot 11$

$\vdots 2$ $\vdots 2$ ≤ 6 $\vdots 11$

$\frac{n+n+6}{2}\,7 = 7(n+3)$ $\boxed{97\ 101}$

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29
31 37 41 43 47 53 59 61 67
71 73 83 97 101 103 107 109
113 119 127 131 137
139 143 149
151 153 157 163
167 173 177

$7(n+3) - n - a = 97$ 13 14 ...

$6n - a = 76$

$n = \frac{76+a}{6} = \frac{78}{6} = 13$

13

(37·3)(27·3)

11·9

163 ✓

167 ✓

13 14 15 16 17 18 19

$4\cdot 16 = 112$

$11\cdot 5\cdot 9 -$

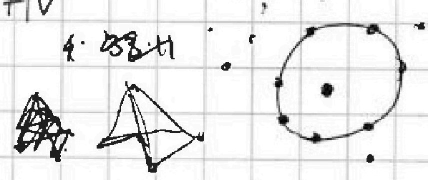
-35

$5(99-7)$ $5\cdot 2$

$4\cdot(11\cdot 3\cdot 10)$

$\boxed{330}$

$4\cdot 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!