



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $143^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
- [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 792$ .
- [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 13/2$ , а  $MZ \cdot MY = 5$ .
- [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$  или  $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ ?
- [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 5 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .

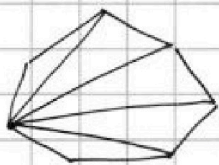


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть исходный многоугольник имеет  $n$  вершин.  
Выберем одну из вершин и проведем отрезки ко всем другим вершинам.  
Тогда образуется  $n-2$  треугольников.  
Сумма их углов  $180^\circ(n-2)$  равна сумме углов исходного многоугольника.



$\Rightarrow$  Сумма углов многоугольника:  $180^\circ(n-2)$

Найдем сумму углов при помощи арифметической прогрессии:

1) Если арифметическая прогрессия — возрастающая:

Углы:  $143^\circ, 143^\circ+2^\circ, \dots, 143^\circ+2^\circ(n-1)$

Их сумма:  $\frac{143^\circ+(143^\circ+2^\circ(n-1))}{2} \cdot n = (142^\circ+n) \cdot n$

Суммы углов равны

$$\Rightarrow 180(n-2) = (142+n) \cdot n$$

$$180n - 360 = 142n + n^2$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0 \quad D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 4(19^2 - 360) = 4(361 - 360) = 4$$

$\Rightarrow n_{1,2}$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{38 + \sqrt{4}}{2} = 19 + 1 = 20, \quad n_2 = \frac{38 - \sqrt{4}}{2} = 19 - 1 = 18$$

2) Если арифметическая прогрессия — убывающая:

Углы:  $143^\circ, 143^\circ-2^\circ, \dots, 143^\circ-2^\circ(n-1)$

Их сумма:  $\frac{143^\circ+(143^\circ-2^\circ(n-1))}{2} \cdot n = (144^\circ-n) \cdot n$

Суммы углов равны

$$\Rightarrow 180(n-2) = (144-n) \cdot n$$

$$180n - 360 = 144n - n^2$$

$$n^2 + 36n - 360 = 0 \quad D = 36^2 + 4 \cdot 360 = 36(36+40) = 36 \cdot 4 \cdot 19$$

$$n_1 = \frac{-36 + \sqrt{36 \cdot 4 \cdot 19}}{2} = -18 + 6\sqrt{19}, \quad n_2 = \frac{-36 - \sqrt{36 \cdot 4 \cdot 19}}{2} = -18 - 6\sqrt{19}$$

Оба решения не подходят т.к.  $n$  должно быть

натуральным числом



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Известно, что многоугольник выпуклый

$\Rightarrow$  во любой угол не может быть больше  $180^\circ$

Значит  $143 + 2(n-1) \leq 179$

$$2(n-1) \leq 36$$

$$(n-1) \leq 18$$

$$\cancel{n \leq 19} \quad n \leq 19$$

$\Rightarrow$  ~~Не существует подходящего многоугольника~~

$\Rightarrow n = 20$  не подходит

Наибольшее число вершин — 18

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \cdot \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x \cdot \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z \ln (6 \cdot 2^2) = \ln 6$$

$$4x \cdot \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 2 + z \ln 6 = \ln 6$$

$$\ln 2 (4x + 3y + 2z) + z \cdot \ln 6 = \ln 6, \quad x, y, z \text{ — целые}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ z \cdot \ln 6 = \ln 6 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2(2x+1)}{3}$$

$$\text{Значит } x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \frac{4}{9}(2x+1)^2 + 1 = \frac{9x^2 + 4(4x^2 + 4x + 1) + 9}{9} = \frac{25x^2 + 16x + 13}{9}$$

Т.к.  $x, y, z$  — целые то  $\Rightarrow 3y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0$

Если  $y = 0$ , то  $x = -0,5$ , не целое число

Если  $y = 2$ , то  $x = -2$

Если  $y = -2$ , то  $x = 1$

}  $\Rightarrow$  минимальное  $y^2 = 4$

Если  $x = 0$ , то  $y$  — не целое

Если  $x = 1$ , то  $y = -2$

Если  $x = -1$ , то  $y$  — не целое

}  $\Rightarrow$  минимальное  $x^2 = 1$

Сумма  $x^2 + y^2 + z^2$  тем меньше, тем меньше каждый из её членов если  $x = 1, y = -2$  то достигается минимальный  $x^2$  и  $y^2$

$$\rightarrow \text{Наименьшее значение } x^2 + y^2 + z^2 = (1)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

Ответ: 6





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

Пусть  $p = M - a$ ,  $q = M - b$ , где  $M$  — сумма элементов  $M$

$p - q = b - a$ . Элементы множества  $M$ :  $n, n+1, \dots, n+6$

$\Rightarrow p - q$  может быть 1, 2, 3, 4, 5, 6 т.к.  $p - q > 0$  (т.к.  $p^2 - q^2 > 0$ )

$p, q$  — простые натуральные числа

$\Rightarrow$  либо одно из них 2, но тогда второе нечетное и  $(p - q)(p + q)$  — нечетное

либо они оба нечетные  $\Rightarrow p - q$  — четное,  
 $p + q$  — четное

$\Rightarrow p - q$  может быть 2, 4, 6

Проверим  $p - q = 2$ :

$$p - q = 2 \Rightarrow p + q = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 4 \cdot 99 = 396$$

$$p - q = (M - a) - (M - b) = b - a, \quad p + q = 2M - (a + b)$$

$$\Rightarrow b = a + 2, \quad p + q = 2M - 2a - 2$$

$$2M - 2a - 2 = 396$$

$$2M - 2a = 398$$

$$M - a = 199$$

Найдем, чему может быть равно  $M$ :

Представим ряд чисел:

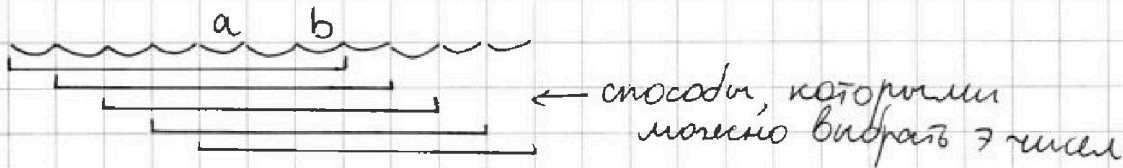


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Тогда возможные суммы:

$$(a-1) \cdot 7, a \cdot 7, (a+1) \cdot 7, (a+2) \cdot 7, (a+3) \cdot 7$$

Подставим в  $M - a = 199$ :

$$\begin{cases} (a-1) \cdot 7 - a = 199 \\ a \cdot 7 - a = 199 \\ (a+1) \cdot 7 - a = 199 \\ (a+2) \cdot 7 - a = 199 \\ (a+3) \cdot 7 - a = 199 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 206 \\ 6a = 199 \\ 6a = 192 \\ 6a = 185 \\ 6a = 178 \end{cases}$$

Т.к.  $a$  — натуральное, то число справа должно делиться на 2 и на 3

$$\Rightarrow \text{вычеркнуто} \Rightarrow 6a = 192$$

$$a = \frac{192}{6} = 32 \Rightarrow b = 34. \quad M = \{29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$$

$$M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\} \Rightarrow N = 33 \cdot 7 = 231$$

$$p = N - a = 231 - 32 = 199, \quad q = 231 - 34 = 197$$

$13^2 < 199$  и  $197 < 17^2 \Rightarrow$  в простоте можно убедиться, проверив 2, 3, 5, 7, 11, 13

$$\text{Также } p^2 - q^2 = 199^2 - 197^2 = (199 - 197)(199 + 197) = 2 \cdot 396 = 792$$

Найденное множество целиком соответствует условиям

$$\text{Ответ: } \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$



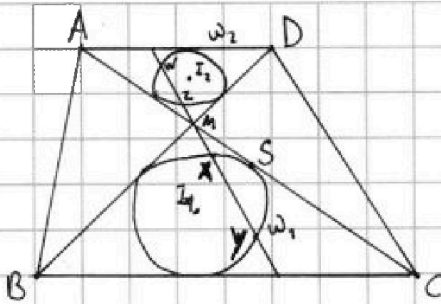
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle AMD \sim \triangle CMB \text{ т.к. :}$$

$$\cdot \angle AMD = \angle CMB \text{ как вертикальные}$$

$$\cdot \angle ADM = \angle MCB \text{ т.к. } AD \parallel BC \text{ (т.к. медианы "основания"), } BD - \text{ секущая}$$

$$\frac{BC}{AD} = 2 \Rightarrow \text{это коэффициент подобия}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI_2 \sim \triangle CMI_1 \text{ т.к. } \angle I_2MA = \frac{1}{2} \angle AMD = \frac{1}{2} \angle BMC = \angle I_1MC$$

$$\angle I_2AM = \frac{1}{2} \angle MAD = \frac{1}{2} \angle MCB = \angle MCI_1$$

примем с тем же коэффициентом подобия  
 $\Rightarrow$  (т.к. общее отношение  $AM:MC$ )

$$\Rightarrow \frac{MI_2}{MI_1} = 2, \quad MI_1 + MI_2 = I_1I_2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{медиана на одной прямой} \\ \text{т.к. на биссектрисе } \angle AMD \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow MI_1 = \frac{13}{3}, \quad MI_2 = \frac{13}{6}$$

Пусть  $\omega_1$  касается  $MC$  в точке  $S$

$$\Rightarrow MS^2 = MX \cdot MY$$

$$\frac{MX}{MZ} = 2 \text{ (из подобия фигур относительно т. M, гомология)}$$

$$\Rightarrow MS^2 = 2MZ \cdot MY = 2 \cdot 5 = 10$$

т.к.  $S$  - т. касания  $I_1S$  - радиус, то по т. Пифагора:

$$MI_1^2 = MS^2 + I_1S^2 \Rightarrow I_1S^2 = MI_1^2 - MS^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10$$

$$I_2S = \sqrt{\frac{169}{9} - 10} = \sqrt{\frac{169-90}{9}} = \sqrt{\frac{79}{9}} = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{79}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{14} \right) = \sin \frac{5\pi}{14}$$

$$1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} + X = 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$X = 4 \left( \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14} \right) - 5 \left( \sin \frac{\pi}{14} + \sin \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= 4 \left( \sin \frac{5\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14} \right) - 5 \left( \sin \frac{\pi}{14} + \sin \frac{7\pi}{14} \right) =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \sin \frac{8\pi}{28} \cdot \cos \frac{2\pi}{28} - 5 \cdot 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{28} \cdot \cos \frac{6\pi}{28} =$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \left( 4 \cos \frac{\pi}{14} - 5 \cos \frac{3\pi}{14} \right), \quad \sin \frac{2\pi}{7} > 0$$

$$\cos \frac{\pi}{14} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7} \right) = \sin \frac{3\pi}{7}$$

$$\cos \frac{3\pi}{14} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7} \right) = \sin \frac{2\pi}{7}$$

$$\Rightarrow X = 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \left( 4 \left( \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) - \sin \frac{2\pi}{7} \right) = 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot$$

$$\cdot \left( 4 \left( \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{-2\pi}{7} \right) - \sin \frac{2\pi}{7} \right) = 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \left( 8 \cdot \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{2\pi}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из условия, если 4 точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость —  $\alpha$  следует, что если в основании пирамиды лежат  $\geq 4$  точек, то все точки основания из плоскости  $\alpha$  (выбор из 7), а вершина вне (выбор из 5)

Если в основании:

7 вершин:  $5 \cdot 7$  вариантов

6 вершин:  $5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} = 5 \cdot 7$

5 вершин:  $5 \cdot \frac{7!}{5!(7-5)!} = 5 \cdot 7 \cdot 3$

4 вершин:  $5 \cdot \frac{7!}{4!(7-4)!} = 5 \cdot 7 \cdot 5$

Если в основании 3 вершины, то можно выбрать любые 4 точки из 12, за исключением тех комбинаций, когда они лежат в одной плоскости:

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 11 \cdot 5 \cdot 9$$

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 5 \cdot 7$$

Значит для 3 вершин в основании:  $C_4^{12} - C_4^7 = 11 \cdot 5 \cdot 9 - 5 \cdot 7 =$

$$= 5(11 \cdot 9 - 7) = 5 \cdot 92$$

Значит всего пирамид:  $5 + 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \cdot 5 + 5 \cdot 92 =$

$$= 5 + 5 \cdot 7(1 + 3 + 5) + 5 \cdot 92 = 5 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + 5 \cdot 92 = 5(1 + 63 + 92) = 5 \cdot 156 =$$

$$= 780$$

Ответ: 780





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

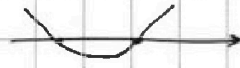
Остатки: ~~3~~, 5, ~~7~~

$$\cos \frac{\pi}{7} = \cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{14}$$

$$4\cos \frac{\pi}{7} - 5\sin \frac{\pi}{14} = 4 - 8\sin^2 \frac{\pi}{14} - 5\sin \frac{\pi}{14} \approx D = -8\sin^2 \frac{\pi}{14} - 5\sin \frac{\pi}{14} + 4$$

$$D = 25 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 25 + 128 = 153$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{153}}{-16}$$



$$12 < \sqrt{D} < 13$$

$$17 < 5 + \sqrt{D} < 18$$

$$\frac{5 + \sqrt{D}}{16}$$

$$7 < 5 + \sqrt{D} < 8$$

$$\frac{7}{16} < \frac{5 + \sqrt{D}}{16} < 0,5$$



Если основание из 4:

$$5 \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 5 = 5^2 \cdot 7$$

Если основание из 5:

$$5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5^2 \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Если основание из 6:

$$5 \cdot 7$$

Если основание из 7: 5

Если основание из 3:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 11 \cdot 10 - 7 \cdot 5 = 220 - 35 = 200 - 15 = 185 = 5 \cdot 37$$

Умно:  $5 + 5 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5^2 \cdot 7 + 37 \cdot 5 = 5(1 + 7 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 37) =$   
 $= 5(1 + 7(1 + 3 + 5) + 37) = 5(38 + 7 \cdot 9) = 5(38 + 63) = 5 \cdot 101 = 505$

$$\frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9$$

$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 5!}{4!} = 7 \cdot 5$$

$n, n+1, \dots, n+6$

q/n

$$(p-q)(p+q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

76

$$p = M - n_i$$

$$q = M - n_j$$

$$\Rightarrow p - q \leq 6$$

- $\Rightarrow p - q = 6$
- $p - q = 4$
- $p - q = 3$
- $p - q = 2$
- $p - q = 1$

p-q	p+q
6	4.33
4	99.2
3	8.33
2	4.99
1	792

$$\begin{array}{r} +64 \\ 92 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +156 \\ 30 \\ \hline +25 \\ 5 \\ \hline 780 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 792 \overline{) 3} \\ \underline{72} \phantom{0} \\ 72 \phantom{0} \\ \hline 99 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p+q$	$p+q$
6	4.33
4	2.99
3	8.33
2	4.99
1	8.99

$$p-q=6: \quad p=q+6 \quad \text{сумма: } \frac{2q+6}{2} \cdot 7 = q+3$$

$$\begin{aligned} p &= M-a \\ q &= M-b \end{aligned}$$

$$p-q=6 \Rightarrow b-a=6$$

$$b=a+6$$

$$M = \frac{2a+6}{2} \cdot 7 = (a+3) \cdot 7$$

$$p = 6a + p + q = 2M - (a+b) = (a+3) \cdot 14 - (a+6) =$$

$$= 12a + 3 \cdot 14 - 6 = 12a + 6(7-1) = 12a + 36$$

$$12a + 36 = 4 \cdot 33$$

$$4a + 12 = 4 \cdot 11$$

$$a + 3 = 11$$

$$a = 8 \Rightarrow b = 8 + 6 = 14$$

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

$p, q$  - простые  $\Rightarrow p+q$  и  $p-q$  близкие

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 6 \\ \hline 792 \end{array}$$

$$M = \frac{8+14}{2} \cdot 7 = (4+7) \cdot 7 = 11 \cdot 7 = 77$$

$$p = 77 - 8 = 69$$

$$q = 77 - 14 = 63$$

$$p^2 - q^2 = 69^2 - 63^2 = (69-63)(69+63) =$$

$$= 6 \cdot (69+63) = 6 \cdot 132 = 6 \cdot 11 \cdot 12 =$$

$$p-q=1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} p &= M-a \Rightarrow b-a=1 \\ q &= M-b \quad b=a+1 \end{aligned}$$

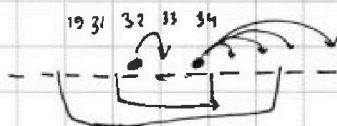
~~1, 2, 3, 4~~, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ~~19, 23~~

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \\ -199 \\ \hline 99 \\ -11 \\ \hline 88 \\ -59 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$p+q = 2M - (a+b) = 2M - 2a - 1 = 8 \cdot 99 = 792$$

$p-q$	$p+q$
6	4.33
4	2.99
3	8.33
2	4.99
1	8.99

$$p, q - \text{нз} \Rightarrow p-q - \text{нз}$$



$$\begin{aligned} p-q &= 2 \\ p &= M-a \Rightarrow b-a=2 \\ q &= M-b \quad b=a+2 \end{aligned}$$

$$M_{\min} = \frac{a+a+6}{2} \cdot 7 = \frac{(a+2) \cdot 2 + 6}{2} \cdot 7 = (a+1) \cdot 7$$

$$M_{\max} = \frac{(a+6) \cdot 2 + 6}{2} \cdot 7 = (a+3) \cdot 7$$

$$p+q = M \cdot 2 - (a+b) = 2M - 2a - 2 = 4 \cdot 99 = 396$$

$$2M - 2a = 398$$

$$M - a = 199 \stackrel{?}{=} 3 \Rightarrow a \stackrel{?}{=} 4$$

$$(a-1) \cdot 7 - a = 199$$

$$6a = 206 \quad \times 3a$$

$$(a-2) \cdot 7 - a = 199$$

$$6a = 199 \quad \times$$

$$(a+1) \cdot 7 - a = 199$$

$$6a = 192$$

$$a = \frac{192}{6} = 32$$

$$(a+2) \cdot 7 - a = 199$$

$$6a = 185 \quad \times$$

$$b = 34$$

$$(a+3) \cdot 7 - a = 199$$

$$6a = 178 \quad \times$$

~~29, 30, 31, 32, 33, 34, 35~~

$$M = (a+1) \cdot 7 = 33 \cdot 7 = 231$$

$$p = 33 \cdot 7 - 32 = 32 \cdot 7 + 7 - 32 = 32 \cdot 6 + 7 = 192 + 7 = 199$$

$$q = 33 \cdot 7 - 34 = 33 \cdot 6 - 1 = 197$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 7 \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 6 \\ \hline 192 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \\ \times 6 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 197 \overline{) 13} \\ \underline{13} \\ 67 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \times 4 \\ \hline 52 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \times 5 \\ \hline 65 \end{array}$$

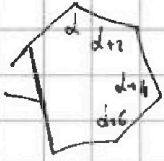


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $n$  углов

их сумма:

$$= (142+n) \cdot n$$

$$\frac{143+143+2(n-1)}{2} \cdot n = (143+n-1) \cdot n =$$

умножить на углы:

$$180^\circ (n-2)$$

$$\begin{array}{r} -179 \\ 143 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ +19 \\ \hline 177 \\ +19 \\ \hline 367 \end{array}$$

$$\Rightarrow (142+n) \cdot n = 180(n-2)$$

$$142n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0 \quad D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 4(19^2 - 360) = 40$$

или обратное:  $\frac{143+143-2(n-1)}{2} \cdot n = (143-n+1) \cdot n = (144-n) \cdot n$

$$180(n-2) = (144-n) \cdot n$$

$$180n - 360 = 144n - n^2$$

$$n^2 + 36n - 360 = 0 \quad D = 36^2 + 4 \cdot 360 = 36(36 + 40) = 36 \cdot 76 = 109^2$$

$$\sqrt{D} = 6 \cdot 2 \sqrt{109} = 12\sqrt{109}$$

$$(20-1)(20-1) = 400 - 40 + 1 = 361$$

$$36 + 40 = 76 = 4$$

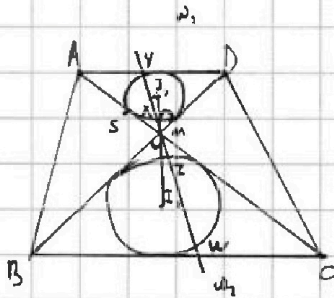
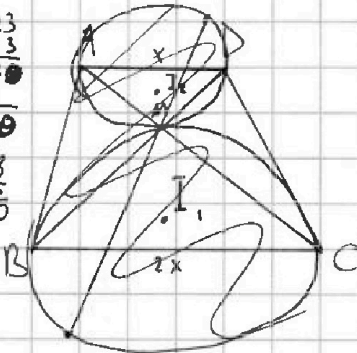
$$\begin{array}{r} 76 | 2 \\ 38 | 2 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$\cos \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 60^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cdot \cos \frac{90^\circ}{2} \cdot \sin \frac{30^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 15^\circ$$



$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline 169 \\ \times 18 \\ 18 \\ \hline 306 \end{array}$$



$$I_1 I_2 = \frac{13}{2} \quad MZ \cdot MY = 5$$

радиус  $\omega$  - ?

$$\angle MI_2 = \angle I_2 MD = \angle I_1 MB = \angle I_1 MC$$

Пусть коэффициент подобия  $k=2$

$$\Rightarrow \frac{MI_1}{MI_2} = 2 \Rightarrow MI_1 = \frac{13}{3}$$

$$MI_1 = \frac{13}{6}$$

$$MZ = 2MX$$

$$MW = 2MY$$

$$5 = MZ \cdot MY = 2MX \cdot MY = 2MS^2 \Rightarrow MS = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$I_2 S^2 = I_2 M^2 - MS^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \frac{5}{2} = \frac{169}{36} - \frac{5}{2} = \frac{169 - 90}{36} = \frac{79}{36}$$

$$I_1 S = \sqrt{\frac{79}{36}} = \frac{\sqrt{79}}{6}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

семь подряд идущих чисел

$$M = \{n, n+1, n+2, \dots, n+6\}$$

$\sum M = n_i$  — простое число

$$792 = 2 \cdot 396 = 2 \cdot 2 \cdot 198 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 99 = 2^3 \cdot 9 \cdot 11$$

$$M = \frac{7n+6}{2} \cdot 7 = (n+3) \cdot 7 \quad M \geq 28$$

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$$

$$0 \ 1 \ 4 \ 2 \ 2 \ 4 \ 1 \pmod{7}$$

$$p^2 - q^2 = 792$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 2, q^2 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$p \equiv 3 \text{ или } 4, q \equiv 1 \text{ или } 6$$

$$p^2 \equiv 1, q^2 \equiv 0$$

$$q = 7$$

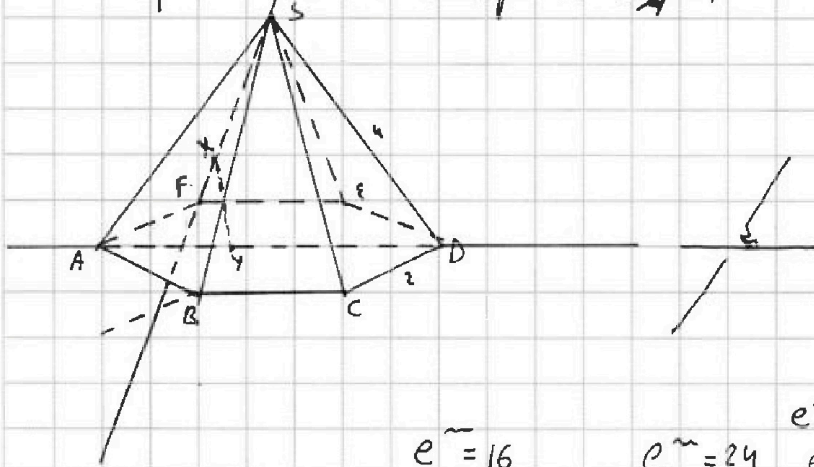
$p_{\max} = 13 \rightarrow$  не подходит

Оба числа нечетные

$$p = (7+1)2+1 \text{ или } p = (7+2) \cdot 2 + 1$$

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$$

$$0 \ 1 \ 4 \ 0 \ 7 \ 7 \ 0 \ 4 \ 1$$



$$a^x \cdot b^y = a^{xy}$$

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

$$e^{\tilde{m}} = 16$$

$$e^{\tilde{m}} = 24$$

$$e^{\tilde{m}} \cdot e^{\tilde{m}} = 24$$

$$e^{\tilde{m} + \tilde{m}} = 24 =$$

$$x \ln 16 + y \ln 6 + z \ln 24 = 2 \ln 4 + 4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 4 + z \ln 6 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 2z \ln 2 + z \ln 6 = \ln 6$$

$$\ln 2 \cdot (4x + 3y + 2z) + z \ln 6 = \ln 6 \Rightarrow z = 1, 4x + 3y + 2z = 0$$

$$4x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-(2+4x)}{3}$$

$$(5x+a)^2 = 25x^2 + 10ax + a^2$$

$$10a = 16$$

$$a = \frac{16}{10}$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 = x^2 + y^2 + 1 = x^2 + \frac{4(1+2x)^2}{9} + 1 =$$

$$\frac{9x^2 + 4(4x^2 + 4x + 1)}{9} = \frac{25x^2 + 16x + 4}{9} = (5x + 1,6)^2$$

$$(5x + 1,6)^2$$

$$4x + 3y + 2 = 0$$

$$1 = 2$$

$$4 - 6 + 2 = 0$$

$$y = \frac{0}{2}$$

$$4 + 4 + 1 = 1 + 16 + 1 = 18$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

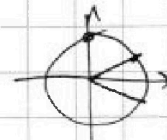
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Остаток: 5, 7.

$$\underbrace{3+4+4+5+5+4+6}_{= 31} = 31$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{14}}{14} + x = 4 \cos \frac{\sqrt{14}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$$x = 4 \left( \cos \frac{\sqrt{14}}{7} + \sin \frac{3\sqrt{14}}{14} \right) - 5 \left( \sin \frac{\sqrt{14}}{14} + 1 \right)$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \beta &= 2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin 30^\circ + \cos 60^\circ &= 1 = 2 \cdot \sin \frac{60^\circ+30^\circ}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ-30^\circ}{2} = \\ \sin 60^\circ + \cos 60^\circ &= 2 \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{5\sqrt{14}}{14}$$

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} &= 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}) + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \right) = \\ &= 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) = \sin \alpha + \sin \beta \end{aligned}$$

или  $\sin \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin(90^\circ - \beta)$

$$2(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) = 2(a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4)$$

$$(a_1 a_3 + a_1 a_4) + (a_2 a_3 + a_2 a_4)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left( \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}) + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \beta \end{aligned}$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} (\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} \sin \beta$$

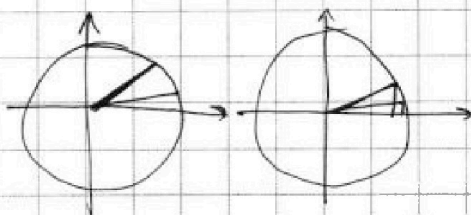
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin(90^\circ - \beta) = 2 \sin \frac{\alpha+90^\circ-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta-90^\circ}{2}$$

$$\sin \frac{3\sqrt{14}}{14} = \sin \left( \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{4\sqrt{14}}{14} \right) = \cos \frac{4\sqrt{14}}{14}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{14} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{3\sqrt{14}}{14} = \frac{7\sqrt{14} - 3\sqrt{14}}{14} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

