МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

№ 1

1) Пусть n - количество вершин нашего многоугольника, тогда:

с одной стороны Σ его углов равна $180°(n-2)$ (эта формула справедлива для любого n-угольника).

с другой стороны Σ членов арифметической прогрессии, т.е $\dfrac{132° + (132° + (\pm 2°)(n-1))}{2} \cdot n$

но т.к. не уточнено в условии задачи возрастает прогрессия или убывает, рассмотрим оба случая.

2) $180°(n-2) = \dfrac{132° + (132° + (\pm 2°)(n-1))}{2} \cdot n$

$360°(n-2) = 264n \pm (2n^2 - 2n)$

$360n - 720 = 264n \pm (2n^2 - 2n) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2n^2 - 2n + 264n - 360n + 720 = 0 \text{ (возраст. прогр.)} \\ -2n^2 + 2n + 264n - 360n + 720 = 0 \text{ (убыв. прогр.)} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n^2 - 49n + 360 = 0 \\ n^2 + 47n - 360 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (n-9)(n-40) = 0 \\ n^2 + 47n - 360 = 0 \ (*) \end{array}\right.$

$(*)$ $D = 47^2 + 360 \cdot 4 = 3649$ - не точный квадрат ($60^2 = 3600$ и $61^2 = 3721$), т.к. если 3649 - точный квадрат, т.е $3649 = z^2$, $z \in \mathbb{Z}$, то $60 < |z| < 61$, но между $|60|$ и $|61|$ нет натуральных чисел (модуль целого числа - натуральное число) $\Rightarrow$ ур-е $(*)$ не имеет целых, а значит и натуральных решений.

3) откуда: $n = 9$ или $n = 40$, т.к. оба корня получаются при рассмотрении возрастающей арифметической прогрессии, то для $n = 40$ найдем наибольший угол: $132° + 2° \cdot 39 = 132° + 78° = 210° > 180° \Rightarrow$ при $n = 40$ многоугольник невыпуклый.

проверим $n = 9$: $132° + 2° \cdot 8 = 148° < 180° \Rightarrow$ 9-угольник выпуклый.

и ещё несложно проверить: $\dfrac{132° + 148°}{2} \cdot 9 = \dfrac{280°}{2} \cdot 9 = 140° \cdot 9 = 20° \cdot 7 \cdot 9 = 180° \cdot 7 = 180°(9-2)$, поэтому подходит ровно $n = 9$.

<u>Ответ</u>: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 3

а) Заметим, что p и q отличаются не более, чем на 6:

$\Sigma_{max} - \Sigma_{min} = \left((a+6)+(a+5)+(a+4)+\ldots+(a+1)\right) - \left((a+5)+(a+4)+(a+3)+\ldots+a\right) =$

$=(a+6)-a = 6$, где Σ_{max} - max. возможная сумма 6 чисел из множества M, Σ_{min} - min возможная сумма 6 чисел из множества M

б) Также знаем, что p и q - простые: если $p \neq q$, т.е $p-q \neq 0$, то если $(p^2-q^2)\,⋮\,2$, то p, q - нечётные, и соответственно $(p-q), (p+q)\,⋮\,2$.

Док-во. т.к $p \neq q$, то чтобы (p^2-q^2) было кратно 2 нужно, чтобы хотя бы один из множителей $(p-q)$ или $(p+q)$ был кратен 2, это означает, что p и q - одинаковой чётности, но чётных простых чисел всего одно $\Rightarrow$ p и q - нечётные, а значит $(p-q), (p+q)\,⋮\,2$

в) т.к p, q - простые, то $p, q > 0 \Rightarrow p+q > p-q$ $\left(\begin{array}{l} p+q > p-q \\ 2q>0 \\ q>0 \end{array}\right)$.

1) $p^2-q^2 = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ (а, б, в)

$(p-q)(p+q) = 2^3\cdot 3^3 \cdot 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p-q=2 \\ p+q=540 \end{cases} (3) \\ \begin{cases} p-q=4 \\ p+q=270 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} p-q=6 \\ p+q=180 \end{cases} (1) \end{array}\right.$

других вариантов быть не может, т.к иначе или $p-q>6$, что противоречит а) или $p-q, p+q$ - нечётные, что противоречит б) или $p-q > p+q$, что противоречит в).

(1) $\begin{cases} p-q=6 \\ p+q=180 \end{cases} \oplus \Rightarrow p = \underset{31\cdot 3}{93}\,⋮\,3$ - не простое $\Rightarrow$ не подходит.

(2) $\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=270 \end{cases} \begin{array}{l}\oplus \\ \ominus\end{array} \Rightarrow p=137,\ q=133;\ q = \underset{19\cdot 7}{133}\,⋮\,7 \Rightarrow$ не подходит

(3) $\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=540 \end{cases} \begin{array}{l}\oplus \\ \ominus\end{array} \Rightarrow p=271,\ q=269.$ нетрудно убедиться, что это пара простых чисел.

2) пусть Σ_{max} - max возможная сумма 6 чисел из множества M
Σ_{min} - min возможная сумма 6 чисел из множества M, тогда
a - 1-е число (самое меньшее из M), $a \in N$.

$\Sigma_{min} = 3\left((a+3)+(a+2)\right) = 3(2a+5)$

$\Sigma_{max} = 3\left((a+4)+(a+3)\right) = 3(2a+7)$, тогда должно быть верно:

$\begin{cases} 3(2a+5) \le 269 \\ 3(2a+7) \ge 271 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+5 \le \frac{269}{3} \\ 2a+7 \ge \frac{271}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5 \le 89 \\ 2a+7 \ge 91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 42 \\ a \ge 42 \end{cases} \Rightarrow a = 42.$

А значит $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

3) Проверим выполнение условий задачи для данного множества:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$42+43+44+45+47+48 = 240+14+15 = 269$

$42+43+45+46+47+48 = 240+10+21 = 271$

$271^2 - 269^2 = \underbrace{(271-269)}_{2}\underbrace{(271+269)}_{2\cdot 270} = 2\cdot 540 = 1080$

<u>Ответ</u>: $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

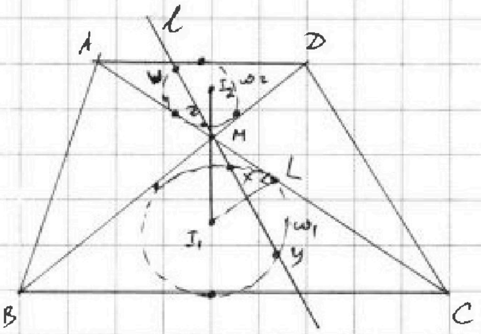
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4



Дано:

$ABCD$ – трап. (AD, BC – основ.); $AD:BC=1:2$

ω_1 – впис. в $\triangle BMC$ (I_1 – центр)

ω_2 – впис. в $\triangle AMD$ (I_2 – центр)

$W, Z, M, X, Y \in l$ – на прямой;

$X, Y \in \omega_1$; $Z, W \in \omega_2$.

$I_1I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$

Найти: r_1 – ?

Решение.

1) $\triangle AMD \sim \triangle BMC$: $\angle AMD = \angle BMC$ (как вертикальные), $\angle MAD = \angle BCM$ (как накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей AC) – по 2-м углам $\Rightarrow$ все эл-ты будут относиться в $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$ как $AD:BC=1:2$.
$\Rightarrow I_2M : I_1M = 1:2$, но также по условию $M \in I_1I_2$ (т.к. $I_2 \in$ биссектрисе $\angle AMD$ и $I_1 \in$ биссектрисе $\angle BMC$, а биссектрисы вертикальных углов совпадают) и $I_1I_2 = 8 \Rightarrow I_1M = \frac{16}{3}$.

2) Заметим, что у допустимо:
$H_M^{-2}(\triangle AMD) = \triangle CMB$ (гомотетия с центром в т. M и коэффициентом -2)
$H_M^{-2}(l) = l \Rightarrow H_M^{-2}(Z) = X$, $H_M^{-2}(W) = Y$, а значит:
~~$\frac{MZ}{MW} \times \frac{MX}{MY} = 2$~~ $\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow MX = 2MZ$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow MZ \cdot MY = 9 \Rightarrow MX \cdot MY = 2 \cdot MZ \cdot MY = 2 \cdot 9 = 18$.

3) Пусть L – точка касания ω_1 и MC, тогда по св-ву отрезков касательных и хорд:
$ML^2 = MX \cdot MY = 18 \Rightarrow ML = \sqrt{18}$.
Также, зная, что радиус, проведенный в т. касания, перпендикулярен касательной, то воспользуемся теор. Пифагора для $\triangle MI_1L$:
$r_1 = I_1L = \sqrt{MI_1^2 - ML^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18} = \sqrt{\frac{256 - 18 \cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$.

Ответ: $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

1) $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} - 3\sin\frac{3\pi}{14} + 4\cos\frac{3\pi}{7} \vee 0$

$\sin\frac{5\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{7}$ $\quad \cos\frac{2\pi}{7}$

$5 - 4\cos\frac{\pi}{7} - 3\cos\frac{2\pi}{7} + 4\cos\frac{3\pi}{7} \vee 0$

$16\cos^3\frac{\pi}{7} - 6\cos^2\frac{\pi}{7} - 16\cos\frac{\pi}{7} + 8 \vee 0$

$8\cos^3\frac{\pi}{7} - 3\cos^2\frac{\pi}{7} - 8\cos\frac{\pi}{7} + 4 \vee 0$

$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4$

$y' = 24x^2 - 6x - 8 = 0$

$12x^2 - 3x - 4 = 0$

$D = 9 + 4\cdot 4\cdot 12 = 201$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{24}$

$+ \quad - \quad + \quad y'$

$\nearrow \frac{3-\sqrt{201}}{24} \searrow \frac{3+\sqrt{201}}{24} \nearrow \quad y$

2) заметим, что

$\frac{5}{6} \overset{>}{\vee} \frac{3+\sqrt{201}}{24}$

$20 \overset{>}{\vee} 3 + \sqrt{201}$

$17 \overset{>}{\vee} \sqrt{201}$

$289 \overset{>}{\vee} 201$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{>}{\vee} \frac{5}{6}$

$\sqrt{3} \overset{>}{\vee} \frac{5}{3}$

$27 \overset{>}{\vee} 25$

$\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{\pi}{6}$, т.к. $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$,

4)

3) $y\left(\frac{5}{6}\right) = 8\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 8\cdot\frac{5}{6} + 4 =$

$\left(\frac{5}{3}\right)^3 - \frac{5^2}{2\cdot 6} - \frac{20}{3} + \frac{12}{3} = \frac{5^3}{3^3} - \frac{5^2}{4\cdot 3} - \frac{8}{3} =$

$= \frac{5^2}{3}\left(\frac{5}{9} - \frac{1}{4}\right) - \frac{8}{3} = \frac{11}{36}\cdot\frac{5^2}{3} - \frac{8}{3}$

2) заметим, что

$\frac{41}{48} \overset{>}{\vee} \frac{3+\sqrt{201}}{24}$

$\frac{41}{48} \vee 6$

$41 \overset{>}{\vee} 6 + 2\sqrt{201}$

$35 \overset{>}{\vee} 2\sqrt{201}$

$\begin{matrix}900+25\\+2\cdot 30\cdot 5\end{matrix} \overset{>}{\vee} 4\cdot 201$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{>}{\vee} \frac{41}{48}$

$24\sqrt{3} \overset{>}{\vee} 41$

$576\cdot 3 \overset{>}{\vee} 1681$

$1500+200+28 \overset{>}{\vee} 1681$

$\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{\pi}{6}$, т.к. $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$,

что

$y\left(\frac{41}{48}\right) = 8\cdot\left(\frac{41}{48}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{41}{48}\right)^2 - 8\cdot\frac{41}{48} + 4 = \frac{41^3}{24^3} - \frac{41^2}{16\cdot 48} - \frac{17}{6} =$

$= \frac{41^2}{8^2\cdot 3\cdot 2\cdot 2}\left(\frac{41}{3^2\cdot 2} - 1\right) - \frac{17}{6} = \frac{5\cdot 41^2}{36\cdot 8^2\cdot 3\cdot 4} \quad \frac{23\cdot 41^2}{3\cdot 2\cdot(8^2\cdot 3^2\cdot 2)} - \frac{17}{6} =$

$= \frac{23\cdot 41^2 - 17\cdot 8^2\cdot 3^2\cdot 2^2}{8^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 4} = \frac{23\cdot 41^2 - 17\cdot 48^2}{8^3\cdot 3^3} = 1681\cdot 23 - 17\cdot 2304$

$\frac{6}{7} \overset{>}{\vee} \frac{3+\sqrt{201}}{24}$

$6\cdot 24 \overset{>}{\vee} 3\cdot 7 + 7\sqrt{201}$

$123 \overset{>}{\vee} 7\sqrt{201}$

$123^2 \overset{>}{\vee} 49\cdot 201$

$\begin{matrix}123^2 & & 49\cdot 201\\ \vee & & \wedge\\ 120^2 & & 50\cdot 201\\ \shortparallel & & \shortparallel\\ 14400 & & 10050\end{matrix}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{>}{\vee} \frac{6}{7}$

$7\sqrt{3} \overset{>}{\vee} 12$

$49\cdot 3 \overset{>}{\vee} 144$

$147 \overset{>}{\vee} 144$

$\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{\pi}{6}$, т.к. $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$, тогда

$y\left(\frac{6}{7}\right) = 8\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^2 - 8\cdot\frac{6}{7} + 4 =$

$= \left(\frac{12}{7}\right)^3 - 3\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{20}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\cdot 8 - 3\right) - \frac{20}{7} = \frac{27}{7}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^2 - \frac{20}{7} = \frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(27 - 20\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(\frac{27\cdot 36 - 20\cdot 49}{6^2}\right) = \frac{(972-980)}{6^2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^2 > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что если любые 4 точки $\in (\beta)$, то $\beta = \alpha$.

Пусть A, B, C, D – т. не лежащие в плоскости (α), тогда $\nexists (\beta) : A, B, C, D \in \beta$.

1. 1-ая пирамида – $ABCD$.

2. Верно, что для каждой у них (точки A, B, C, D) можно посчитать кол-во пирамид с вершинами только из (α), т.е. A, B, C или D – одна вершина, а ост. вершины из (α), тогда таких пирамид:

$4 \cdot \left(\cancel{\frac{8!7!6!}{3!}} + \cancel{\frac{8!7!6!5!}{4!}} + \cancel{\frac{8!7!6!5!4!}{5!}} \right.$

A, B, C, D

$\underset{\text{выбираем } 3 \text{ из } (\alpha)}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}} + \underset{4 \text{ из } (\alpha)}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}} + \underset{5 \text{ из } (\alpha)}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!}} + \underset{6 \text{ из } (\alpha)}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!}} + \underset{7 \text{ из } (\alpha)}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7!}} +$

$+ \underset{8 \text{ из } (\alpha)}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8!}} \Big) = 4 \cdot (56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1) = 219 \cdot 4 =$

$= 876$

~~если 7 вершин у (α)~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

1) $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad | : \ln 5 \ (\neq 0)$

$x \log_5 25 + y \log_5 75 + z \log_5 125 = \log_5 45$

$2x + y(2 + \log_5 3) + 3z = 1 + \log_5 9 = 1 + 2\log_5 3$

$2x + 2y + 3z - 1 = \log_5 3 \cdot (2 - y)$

т.к. $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ~~то: 2x + 2y +~~ $3z - 1$, $2 - y \in \mathbb{Z}$ и $\log_5 3 \cdot (2-y) \in \mathbb{Z}$, что возможно только при $2 - y = 0$, т.к. $\log_5 3 \notin \mathbb{Z}$. $\Rightarrow y = 2$.

2) подставим $y = 2$, получаем:

$2x + 2 \cdot 2 + 3z - 1 = 0$

$3 + 3z + 2x = 0$

т.к. $3, 3z, 0 \vdots 3$, то $2x \vdots 3$, т.е. $x \vdots 3$.

$A = x^2 + y^2 + z^2 = 4 + (x^2 + z^2)$

Заметим, что A минимально, когда $(x^2 + z^2)$ минимально (т.к. мы однозначно определили y).

при $|x| \geq 3$, $x^2 + z^2 \geq 9$.

тогда проверим $|x| \leq 3$, и $x \vdots 3$, и $x \in \mathbb{Z}$, т.е. $x = 0$:

$3 + 3z + 2 \cdot 0 = 0$, и значит $x^2 + z^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1 < 9$

$z = -1$ (для остальных x, $|x| \geq 3$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомый ответ: $(x^2 + y^2 + z^2)_{\min} = 0^2 + 2^2 + (-1)^2 = 5$

Ответ: 5.

На одной **странице** можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

откуда:

$y\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) > y\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > y\left(\frac{7}{8}\right) > 0$ (т.к. на $\left[\frac{7}{8};\infty\right)$ – y – возрастает)

$\Rightarrow$ ответ: $5-4\sin\frac{3\pi}{14} > 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$.

Ответ: $5-4\sin\frac{3\pi}{14}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

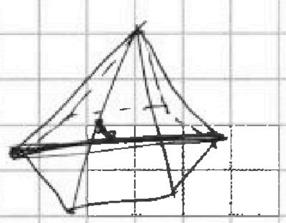
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

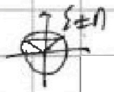
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$

$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$



$5 - 4\sin\frac{5\pi}{14}$ $\qquad 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\left(\frac{3\pi}{14}\cdot 2\right) =$



$\frac{7\pi}{14} - \frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$ $\qquad \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14} = \frac{2\pi}{7}$

3 ; 4

$5 - 4\cos\frac{\pi}{7} \vee \cancel{3\sin\left(\frac{\pi}{7}\cdot 1{,}5\right) - 4\cos\frac{3\pi}{7}}$

112
182
190
28
218

$3\cos\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin 2\alpha\cdot\sin\alpha = \cos\alpha\,(\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $2(\cos^2\alpha - 1)$

$\cos\alpha\,(4\cos^2\alpha - 3) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ $\quad 35 \quad -\sin^2\alpha = -1 + \cos^2\alpha$

~~$5 - 4\cos\frac{\pi}{7} - 3\cos\left(\frac{\pi}{7}\cdot 2\right) - 4\cos\frac{\pi}{7}\cdot 3 \vee 0$~~

$\cos\left(\frac{\pi}{7}\cdot 2\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{7} - 1$

$\frac{\smile\smile\smile}{6!}$

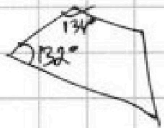
$5 - 4\cos\frac{\pi}{7} - 3\left(2\cos^2\frac{\pi}{7} - 1\right) - 4\left(4\cos^3\frac{\pi}{7} - 3\cos\frac{\pi}{7}\right) \vee 0$

$5 - 4\cos\frac{\pi}{7} - 6\cos^2\frac{\pi}{7} + 3 - 16\cos^3\frac{\pi}{7} + 12\cos\frac{\pi}{7} \vee 0$

$1 > \cos\frac{\pi}{7} > 0$

$-16\cos^3\frac{\pi}{7} - 6\cos^2\frac{\pi}{7} + 8\cos\frac{\pi}{7} + 8 \vee 0$

$-8\cos^3\frac{\pi}{7} - 3\cos^2\frac{\pi}{7} + 4\cos\frac{\pi}{7} + 4 \vee 0$



$y = -8x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

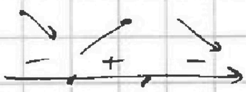
$y' = -24x^2 - 6x + 4 = 0$

$-12x^2 - 3x + 2 = 0$

$12x^2 + 3x - 2 = 0$

$D = 9 + 12\cdot 2\cdot 4 = 105$

$\frac{-3 \pm \sqrt{105}}{24}$



$a_1 + d$

$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\,n = 180°(n-2)$

$(2a_1 + d(n-1))\,n = 360(n-2)$

$(264 + 2(n-1))\,n = 360(n-2)$

282
−360

$p^2 - q^2 = 1080$ $\quad$ p,q-нет

$(p-q)(p+q) = 1080$

32 32

1080	2
540	2
270	2
135	5
27	

$264n + 2n^2 - 2n = 360n - 720 \Rightarrow 2n^2 - 98n + 720 = 0$

$n^2 - 49n + 360 = 0$ $\quad n = 9$, $n = 45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125$

$\ln 5(x+y+z) + (\ln 5_x + \ln 15_y + \ln 25 z) = \ln 45.$

$x \log_{45} 25 + y \log_{45} 75 + z \log_{45} 125 = 1$

$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad | : \ln 5 :$

$x \log_5 25 + y \log_5 75 + z \cdot 3 = \log_5 45$

$(2 + \log_5 3)$ $\quad 1 + 2\log_5 3$

$2x + 2y + y\log_5 3 + z \cdot 3 = 1 + 2\log_5 3$

$2x + 2y + z3 - 1 = \log_5 3(2-y) \Rightarrow (2-y)\log_5 3 \in Z$

$\in Z \qquad \Rightarrow 2-y=0$

$y=2$

$4 + 2x + 3z = 1$

$3 + 2x + 3z = 0$

$3 + 20 + 3z = 0$

$3 + 2x + 3z = 0$

$x^2 + z^2 \to$ min

$-2n^2 - 94n +$

$2x \Rightarrow \vdots 3$

$x \vdots 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 \geq 9$

при $x=0$: $3 + 3z = 0$

$z = -1$

$\boxed{5}$

$180°(n-2) = \dfrac{132° + (132° \pm 2°(n-1))}{2} n$

$360(n-2) = (264 \pm 2(n-1))n$

$360n - 720 = 264n \pm (2n^2 - 2n) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2n^2 - 2n + 264n = 360n - 720 \\ -2n^2 + 2n + 264n = 360n - 720 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2n^2 + 262n - 360n + 720 = 0 \Rightarrow n^2 - 49n + 360 = 0 \\ -2n^2 + 266n - 360n + 720 = 0 \end{array}\right.$

$(n-9)(n-40) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=9 \\ n=40 \end{array}\right.$ №1

$-2n^2 - 94n + 720 = 0$

$n^2 + 47n - 360 = 0$

$D = 47^2 + 4 \cdot 360$

$47 \cdot 47 = 2209$, $360 \cdot 4 = 1440$, $2209 + 1440 = 3649$

$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

$p^2 - q^2 = 1080$

$(p-q)(p+q) = 1080$

$p-q < p+q$

$\begin{cases} p-q = 2 \\ p+q = 540 \end{cases}$; 4; 6

$p - q \leq 6$

$132° + 2° \cdot 9$

$132° + 2°$

$\boxed{271}$ $\quad 269$

$\boxed{137}$ $\quad 133$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

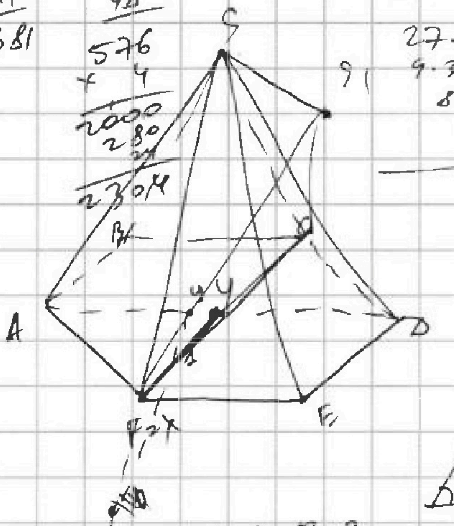
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$41 \times 41 = 1681$

$48 \times 48 = 576$



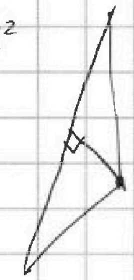
$27 - \frac{20 \cdot 49}{36} = 980$

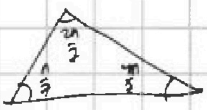
$27 \cdot 36$

$9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4$

$81 \cdot 12$

$810 + 162$





$5 - 4\sin\frac{2\pi}{14}$

$5 - 7\cos\frac{\pi}{7} \vee 3\cos\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

$y = 8x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \vee 0$

$y' =$

$\frac{3-\sqrt{201}}{24}$ $\quad 0{,}6 \quad \frac{3+\sqrt{201}}{24} = \frac{17}{24}$

$8 - 3 - 8 + 4 = 1$

$1 - 3 \cdot 0{,}25 - 4 + 4 \quad 2 \vee$

$0{,}75$

$6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$

$\frac{7}{8} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$

$144 - 21 = 123$

$\frac{17}{24}$ $\quad \cos\frac{\pi}{7}$

$7 \vee 4\sqrt{3}$

$49 \vee 48$

$\cos 6\alpha = 2\cos^2 3\alpha - 1 = 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)^2 - 1$

$\frac{6}{7} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{8}$

$\frac{3+\sqrt{201}}{24}$ $\quad 12 \vee 7\sqrt{3}$

$144 \vee 49 \cdot 3$

147

$\left(\frac{3+\sqrt{201}}{24}\right)^2 = \frac{210 + 6\sqrt{201}}{24^2} =$

$-\frac{48}{7} + \frac{28}{7}$ $\quad = \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 24}$

$\left(\frac{3+\sqrt{201}}{24}\right)^3 = \frac{35+\sqrt{201}}{4 \cdot 24} \cdot \frac{3+\sqrt{201}}{24} =$

$= \frac{105 + 38\sqrt{201} + 201}{4 \cdot 24^2} = \frac{153 + 19\sqrt{201}}{2 \cdot 24^2}$

$\frac{48}{7} - \frac{21}{7} = \frac{27}{7}$

$8 \cdot \frac{17^3}{24^3} - 3 \cdot \frac{17^2}{24^2} - 8 \cdot \frac{17}{24} + 4 \vee 0$

$8 \cdot \frac{17^3}{24^3} - 3 \cdot \frac{17^2}{24^2} - \frac{5}{3} \vee 0$

$\frac{17^3}{24^2} - 3\frac{17^2}{24^2} - 5 \vee 0$

$14 \cdot \frac{17^2}{24^2} - 5 \vee$

$14 \cdot 17^2 \vee 5 \cdot 24^2$

$14 \cdot 289 \vee 120 \cdot 24$

$2890 \quad 2880$

289×14

$8 \cdot \frac{153 + 19\sqrt{201}}{2 \cdot 24^2} - 3 \cdot \frac{35 + \sqrt{201}}{4 \cdot 24} - 8 \cdot \frac{3+\sqrt{201}}{24} + 4 \vee 0$

$6 \cdot 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{153+19\sqrt{201}}{8\cdot 24} - \frac{35+\sqrt{201}}{4\cdot 8} - \frac{3+\sqrt{201}}{3} + 4 \vee 0$

$(153+19\sqrt{201})\cdot 2 - (35+\sqrt{201})\cdot 9 - (3+\sqrt{201})\cdot 32\cdot 3 + 4\cdot 6\cdot 24\cdot 2 \vee 0$

$306 + 38\sqrt{201} - 35\cdot 9 - 9\sqrt{201} - 9\cdot 32 - 32\cdot 3\sqrt{201} + 9(4\cdot 2\cdot 8\cdot 2) \vee 0$

$9(34 - 35 - 32 + 128)$

$9\cdot 95 + \sqrt{201}(38 - 9 - 32\cdot 3) \vee 0$

$\underbrace{38-9}_{29} - \underbrace{32\cdot 3}_{96}$

-67

$\frac{41}{18} - \frac{18}{18}$

$9\cdot 95 \vee \sqrt{201}\cdot 67$

$81\cdot 25\cdot 361 \vee 201\cdot 67^2$

$31 - 8 = 23$

(26^2-1)

$(60+7)^3 =$

$= 60^3 = 216000 + 343 +$

$216343 + 3\cdot 420\cdot 67 + 3\cdot 60\cdot 7(60+7)$

$27\cdot 25\cdot 361 \vee 67\cdot 67^2$

$\cos\frac{\pi}{6} < \cos\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{8}$

$\vee 296743$

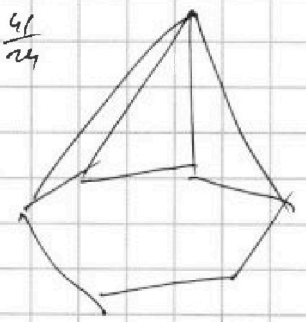
$\frac{41}{24}$

$\frac{5^3}{3}\cdot\frac{11}{36} - \frac{8}{3} \vee 0$

$5^3\cdot 11 \vee 8\cdot 36$

$67\cdot 67 = 469 + 402 = 4489$; $4489\cdot 67$: 31003, 26574, 296743

$361\cdot 27$: 2527, 722, 9747; $9747\cdot 25$: 48735, 19494



$\frac{41}{48} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$

$41 \vee \sqrt{3}\cdot 24$

$1681 \vee 3\cdot 576$

$1500 + 210$

$11\cdot 25 \vee 8\cdot 36$

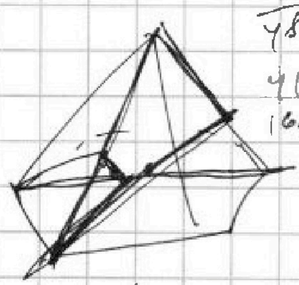
$25\cdot 25 = 275$

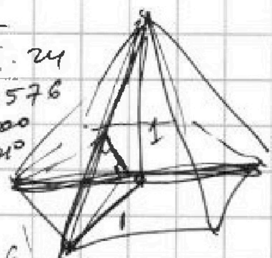
$36\cdot 8 = 240 + 48 = 288$

$-\frac{41}{6} + \frac{24}{6}$

$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$

$\frac{41}{48} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$





$47\cdot 47$: 329, 188, 2209, 1440, 3649

$360 + 40 = 1440$

61^2: $61\cdot 61 = 61 + 366 = 3721$

$+260$, 3600

$8^3 - 3^3$

$8\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 3$ $\frac{41}{3}$

$41 \vee \sqrt{3}$ $\quad 49\cdot 3 \vee$

$\sqrt{3} \vee 24$

$8^2 - 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{5\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

$\sin\frac{5\pi}{14}$ $\cos\frac{2\pi}{7}$ $\sin\frac{\pi}{14}$

$\cos\frac{\pi}{7}$

$5-4\cos\frac{\pi}{7} \vee 3\cos\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

$3(2\cos^2\frac{\pi}{7}$

$5-4x \vee 3(2x^2-1)-4(4x^3-3x)$

$5-4x \vee 6x^2-3-16x^3+12x$

$16x^3-6x^2-16x+8 \vee 0$

$y=8x^3-3x^2-8x+4 \vee 0$

$y'=24x^2-6x-8=0$

$12x^2-3x-4=0$

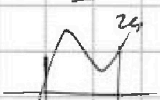
$D=9+4\cdot4\cdot12$

$16\cdot4\cdot3$, $64\cdot3$, 192, $=201$

$\frac{3\pm\sqrt{201}}{24}$

$\frac{3+\sqrt{201}}{24} \geq \frac{17}{24}$

$\frac{3-\sqrt{201}}{24}$ $\frac{3+\sqrt{201}}{24}$



$y=8\cos^3x-3\cos^2x-8\cos x+4$ $\cos\frac{\pi}{?} > \cos\frac{\pi}{7}$

$y'=24\cos^2x(-\sin x)-6\cos^2x(-\sin x)-8(-\sin x)=0$ $x\in[0;\pi]$

$-\sin x(24\cos^2x-6\cos^2x-8)=0$

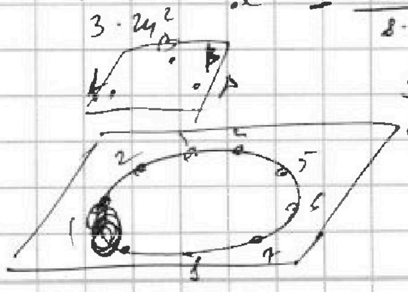
$(\cos x+\dots)(\cos x-\dots)$

0 π

$8\cdot\left(\frac{3+\sqrt{201}}{24}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{201}}{24}\right)^2-8\cdot\frac{3+\sqrt{201}}{24}+4 \vee 0$

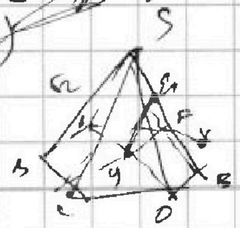
$3\cdot24^2$ $-\frac{210+6\sqrt{201}}{8\cdot24}$ $-\frac{3+\sqrt{201}}{3}+4\vee0$

$\frac{3\pi}{24}$



1) $\triangle ABC$ ... $-1\cos$

2)



$8.\ \frac{5^3}{3^3}-\frac{5^2}{2\cdot6}-4\cdot\frac{5}{3}+4\vee$

$-\frac{20}{3}$

$\frac{5^3}{3^3}-\frac{5^2}{2\cdot6}-\frac{20}{3}\cdot\frac{12}{3}-\frac{20}{3}$

$\frac{5}{3}$ $7 \vee 3+\frac{\sqrt{201}}{24}$ $\frac{5^3}{3^3}-\frac{5^2}{2\cdot6}-\frac{1}{3}$

$\frac{5^3}{3}\cdot\frac{11}{36}-\frac{8}{3}$ $17\vee\sqrt{201}$ $\frac{5^2}{3}\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{11}{36}$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\cos\frac{\pi}{7}$

$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt2}{2}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt2+2}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\pm\sqrt{\frac{\cos2\alpha+1}{2}}=\cos\alpha$ $\frac{1{,}73}{12}$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2} \vee \frac{17}{12}$

$2+\sqrt2 \vee \frac{289}{144}=2+\frac{1}{144}$

$12+0{,}73$

$\frac{17}{24} < \cos\frac{\pi}{?}=\frac{\sqrt{\dots}}{2}$ $20{,}4$

$\frac{289}{144}=2+\frac{1}{144} \vee 2+\sqrt2$

$\frac{\sqrt3}{2}\vee\frac{17}{24}$

$\frac{12\sqrt3}{24}$

$\frac{\sqrt3}{2} \vee \frac{12\sqrt3}{24} > \frac{20{,}5}{146}$

$\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$

$xy=\sqrt2$

$xy\in(SAB)$

$y\leq x$ $12\sqrt3 \geq 20$

$3\sqrt3 \geq 5$

$\frac{\sqrt3}{2}\leq\frac{7}{8}$ $4\sqrt3 \leq 7$ $48 \vee 49$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{271}{269}$ $\frac{137}{133}$ 37

271 ; 269

abcdef $\leq$ 269

$3x \leq 269$

$x \leq \frac{269}{3} = 89$

45 ; 44

abcdefg ≥ 271

$y \geq \frac{271}{3} = 90$

$y \geq 91$

42; 43; 44; 45; 46; 47; 48

2; 3; 4; 5; 6; 7; 8

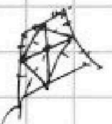
0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

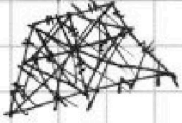
0; 1; 2; 3; 5; 6 = 17

0; 1; 3; 4; 5; 6 = 19

31 ; 29

19 ; 17



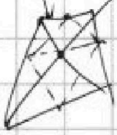


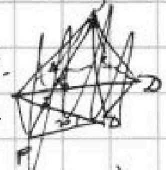
$\begin{cases} x \leq 89 \\ y \geq 91 \\ y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 89 \\ y = 91 \end{cases}$

42 + 43 + 44 + 45 + 47 + 48 = 269

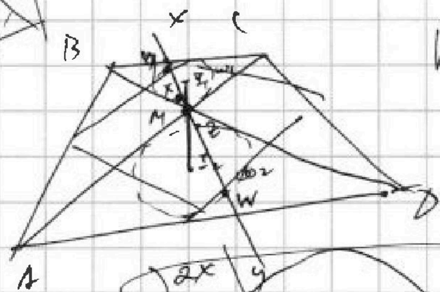
42 + 43 + 45 + 46 + 47 + 48 = 271

$\cancel{271^2 - 269^2 = (271+269)(271-269) = 1080}$





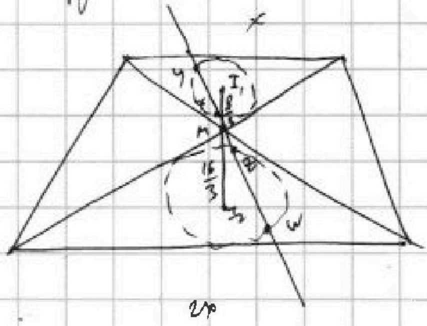
MZ · MY

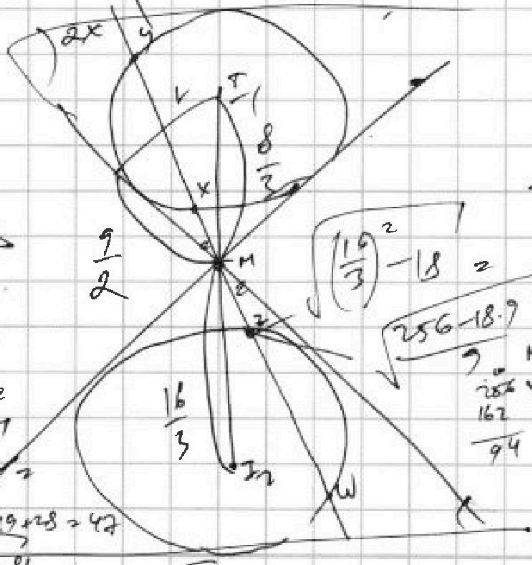


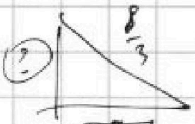
r_{ω_1} - ?

$I_1 I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$







$\frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18}$

$MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9$ $\sqrt{18}$

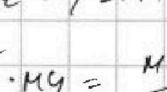
$\sqrt{\frac{256 - 18 \cdot 9}{9}}$

$MZ \cdot MY = \frac{MZ}{MX} \cdot (MX \cdot MY)$

$\sqrt{\frac{9}{2}}$

$\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{64 \cdot 2 - 9 \cdot 9}{9 \cdot 2}} = \frac{128 - 81}{18} = \sqrt{\frac{47}{18}}$

19 + 28 = 47



$\sqrt{\frac{64}{9} - \frac{9}{2}}$ Ответ

$\sqrt{\frac{9}{2}}$ $\frac{128 - 81}{18} = \sqrt{\frac{47}{18}}$