



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 1.

Пусть  $a$  - первый член прогрессии,  $d$  - разность арифметической прогрессии. 4-ый член -  $a+3d$ ; 6-ой член -  $a+5d$ ; 10-ый член -  $a+9d$ .

Получаем систему уравнений:

$$(1) \begin{cases} a+3d = (6-9x) \\ a+5d = (x^2-2x)^2 \end{cases} \quad \text{Из (2) вычтем (1): } (x^2-2x)^2 - (6-9x) = 2d \quad (4)$$

$$(2) \begin{cases} a+5d = (x^2-2x)^2 \\ a+9d = 9x^2 \end{cases} \quad \text{Из (3) вычтем (2): } 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 4d \quad (5)$$

$$(3) \begin{cases} a+9d = 9x^2 \end{cases} \quad \text{Разделим (5) на (4): } \frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2 - (6-9x)} = \frac{4d}{2d}$$

$$\frac{9x^2 - (x^2-2x)^2}{(x^2-2x)^2 - (6-9x)} = 2 \quad (6) \quad 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 2((x^2-2x)^2 - (6-9x));$$

$$9x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 12 + 18x;$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0; \quad x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0;$$

$$(x-1)(x^3-3x^2-2x+4) = 0; \quad (x-1)^2(x^2-2x-4) = 0.$$

Решим уравнение  $x^2-2x-4=0$ :  $D=4+4\cdot 4=20=(2\sqrt{5})^2$ .

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}; \quad x_2 = \frac{2-2\sqrt{5}}{2} = 1-\sqrt{5}. \quad \text{Значит, корни}$$

уравнения (6):  $x_1=1$ ;  $x_2=1+\sqrt{5}$ ;  $x_3=1-\sqrt{5}$ .

Проверим, что все они подходят:

$$1) x_1 = 1, \quad a+3d = -3; \quad a+5d = 1; \quad a+9d = 9; \quad (\Leftrightarrow) d = 2; \quad a = -9.$$

Подходит.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x_2 = 1 + \sqrt{5}: a + 3d = (6 - 9x_2) = (6 - 9(1 + \sqrt{5})) = -3 - 9\sqrt{5}$$

$$a + 5d = (x_2^2 - 2x_2)^2 = (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} = 4$$

$$a + 9d = 9x_2^2 = 9(1 + \sqrt{5})^2 = 9(6 + 2\sqrt{5}) = 54 + 18\sqrt{5}$$

$$4d = (a + 9d) - (a + 5d) = 54 + 18\sqrt{5} - 4 = 50 + 18\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{50 + 18\sqrt{5}}{4}$$

$$2d = (a + 5d) - (a + 3d) = 4 + 3 + 9\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{7 + 9\sqrt{5}}{2} \text{ Не подходит.}$$

$$3) x_3 = 1 - \sqrt{5}: a + 3d = (6 - 9x_3) = (6 - 9(1 - \sqrt{5})) = -3 + 9\sqrt{5}$$

$$a + 5d = (x_3^2 - 2x_3)^2 = (6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5})^2 = 16$$

$$a + 9d = 9x_3^2 = 9(6 - 2\sqrt{5}) = 54 - 18\sqrt{5}$$

$$4d = (a + 9d) - (a + 5d) = 54 - 18\sqrt{5} - 16 = 38 - 18\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{38 - 18\sqrt{5}}{4}$$

$$2d = (a + 5d) - (a + 3d) = 16 + 3 - 9\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{19 - 9\sqrt{5}}{2} \text{ Не подходит.}$$

Если же  $d = 0$ , то  $6 - 9x = (x^2 - 2x)^2 = 9x^2$

$$(2): 9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2; x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0; x^2(x^2 - 4x - 5) = 0; x^2(x - 5)(x + 1) = 0$$

При  $x = 0$ :  $6 - 9x \neq 9x^2$ . Не подходит.

При  $x = 5$ :  $6 - 9x \neq 9x^2$ . Не подходит.

При  $x = -1$ :  $6 - 9x \neq 9x^2$ . Не подходит. Значит, корней нет.

Итого 3 ответа.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$|x-2y| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 \\ x-2y \geq -2. \end{cases}$$

$$|2x-y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 & (1) \\ x-2y \geq -2 & (2) \\ 2x-y \leq 1 & (3) \\ 2x-y \geq -1 & (4) \end{cases}$$

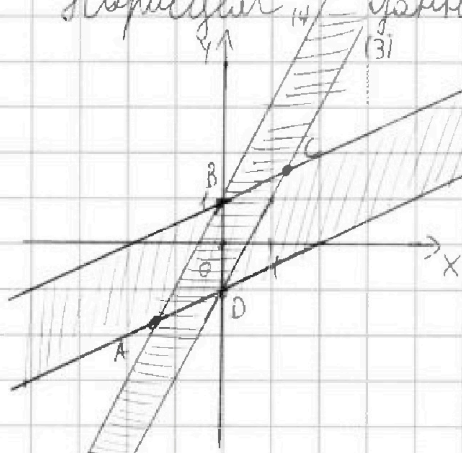
(1)  $x-2y \leq 2 \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{2} - 1$  (над прямой  $y = \frac{x}{2} - 1$ )

(2)  $x-2y \geq -2 \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} + 1$  (под прямой  $y = \frac{x}{2} + 1$ )

(3)  $2x-y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 2x-1$  (над прямой  $y = 2x-1$ )

(4)  $2x-y \geq -1 \Leftrightarrow y \leq 2x+1$  (под прямой  $y = 2x+1$ )

Нарисуем данные прямые на графике:



Условия (1) и (2) ограничивают полосу между прямыми (1) и (2). Аналогично условия (3) и (4) так же ограничивают полосу между прямыми (3) и (4).

Видно, что область определений - параллелограмм

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ABCD. Очевидно, что в  $C$  имеет max координату по  $x$  и max координату по  $y \Rightarrow$  максимум выражения  $3y+6x$  будет достигаться в  $C$ .

Найдём координаты  $C$ .  $C$  - пересечение прямых

$$(2) \text{ и } (3) : \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1 ; \frac{3x}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}. \text{ Тогда } y = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Тогда } 3y + 6x = \frac{5}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 6 = 5 + 8 = 13.$$

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$A = n^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7).$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9). \text{ Рассмотрим случаи:}$$

1)  $(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$ . Есть несколько случаев

1.1)  $m+2n = 1; m+2n-7 = 11p^2$  невозможны, т.к.  $m, n$  - натуральные

Или  $\Rightarrow m+2n \geq 3$ .

1.2)  $m+2n = 11; m+2n-7 = p^2$ . Тогда,  $(m+2n-7) = 11-7=4 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow$

$p=2$ . Тогда  $B = 75q^2 = mn(m+2n+9) = 20mn; 75q^2 = 20mn$

$15q^2 = 4mn$ . Т.к.  $15q^2 : 4$  и  $15 \nmid 4$ , то  $q^2 : 4 \Rightarrow q=2$ .

Тогда,  $15 \cdot 4 = 4mn \Rightarrow 15 = mn$ . Тогда случаи:  $m=1; n=15$  (не подходит, т.к.  $m+2n \neq 11$ );

$m=3, n=5$  (не подходит, т.к.  $m+2n \neq 11$ );

$m=5, n=3$  (подходит);  $m=15, n=1$  (не подходит, т.к.  $m+2n \neq 11$ ).

Значит, в этом случае подходит вариант  $m=5; n=3$ .

1.3)  $m+2n = 11p; m+2n-7 = p$ . Тогда,  $(m+2n, m+2n-7) = p$ .

Но, очевидно, что  $7 \nmid (m+2n, m+2n-7) \Rightarrow p=7 \Rightarrow m+2n-7=p=7 \Rightarrow m+2n=14$ .

Но  $14 \nmid 11$ .  $\therefore$  Не подходит.

1.4)  $m+2n = p; m+2n-7 = 11p$ . Очевидно,  $m+2n > m+2n-7$ , но

$p < 11p$ . ~~Или~~  $\therefore$  Случай не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.5)  $m+2n=p^2$ ;  $m+2n-7=11$ . По модулю  $m+2n=7+11=18$ , но  $18 \neq p^2$   
для  $p \in \mathbb{N}$ .  $\therefore$  Не подходит.

1.6)  $m+2n=11p^2$ ;  $m+2n-7=1$ . По модулю  $m+2n=7+1=8$ , но  $8 \neq 11p^2$ .  
 $\therefore$  Не подходит.

$$2) mn(m+2n+9) = 11p^2.$$

2.1)  $m=1$ . Тогда  $n(2n+10) = 11p^2$ . Заметим, что

$$2n+10 \equiv 2 \pmod{11}, \quad 11p^2 \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow p=2. \text{ Тогда } n(2n+10) = 44.$$

$$n(n+5) = 22. \Leftrightarrow n^2 + 5n - 22 = 0. \quad D = 25 + 4 \cdot 22 = 25 + 88 = 113 - \text{ не полный}$$

квадрат  $\Rightarrow$  уравнение не имеет натуральных решений.

2.2)  $n=1$ . Тогда  $m(m+1) = 11p^2$ . По модулю  $m \equiv m+1 \pmod{11}$ ,

$$\text{и или } m \equiv 11 \text{ или } m+1 \equiv 11 \Rightarrow \text{и } m \equiv 11 \text{ и } m+1 \equiv 11 \Rightarrow p=11.$$

Тогда  $m(m+1) = 11^3$ , но такое не можем найти, т.к.

$m$  и  $m+1$  разной чётности  $\Rightarrow m(m+1) \equiv 2 \pmod{11}$ .  $\therefore$  Не подходит.

2.3)  $m \neq 1$ ;  $n \neq 1$ . В этом случае очевидно, что среди

чисел  $m, n, m+2n+9$  одно равно 1, а другие равны  $p$ .

Если  $m+2n+9=1 \Rightarrow m+2n=2$   $\therefore$  т.к.  $m+2n \geq 3$ . Иначе,  $m+2n+9=p$

и или  $m=p$  или  $n=p$ . Но  $\text{и } m+2n+9 > m \text{ и } m+2n+9 > n$ .  $\therefore$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, эти случаи не подходят. Мы рассмотрели все случаи и нашли только одну подходящую пару  $m=5; n=9$ .

Ответ:  $m=5, n=9$ .





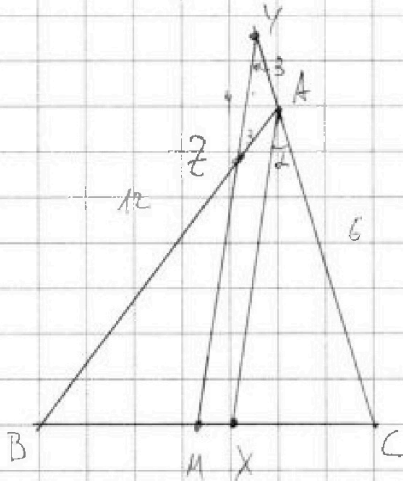
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



Пускай  $\angle BAC = 2\alpha$ . Пускай,

$\angle BAX = \angle XAC = \alpha$ .  $AX \parallel BC \Rightarrow$

$\angle ZYA = \angle XAC = \alpha$ . Пускай,

$\angle YZA = \angle ZAX = \alpha$  по параллельности.

$\Rightarrow \angle ZYA = \angle YZA = \alpha \Rightarrow AY = AZ = 3$ .

Пускай  $BC = a$ ;  $AB = c$ ;  $AC = b$ .

Пускай,  $BX = \frac{ac}{b+c}$ ;  $CX = \frac{ab}{b+c}$ .  $MZ \parallel XA \Rightarrow$  по т. Делеса

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BZ}{BA} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{c-3}{c} \Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{2ac} = \frac{c-3}{c} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2} = c-3$$

$\Rightarrow b+c = 2c-6 \Rightarrow c = b+6 = 12 = AB$ . По т. косинусов для

$\triangle YAZ$ :  $b^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cos(180-2\alpha) \cdot AY \cdot AZ \Rightarrow$

$$b^2 = 9+9 + 2 \cos(2\alpha) \cdot 9 \Rightarrow -2 = 2 \cos(2\alpha) \cdot 9 \Rightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{1}{9}$$

по т. косинусов для  $\triangle ABC$ :  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos(2\alpha) \cdot AB \cdot AC$

$$\Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 12 \cdot 6 = 180 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{9} = 180 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 196 = 14^2$$

$\Rightarrow BC = 14$ .

Ответ:  $BC = 14$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 + \sqrt{2x} + 3y \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

Из 2-ого уравнения понимаем, что  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ .

Заметим, что функция  $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$  монотонно возрастает на промежутке  $[0; +\infty)$ . А значит, чтобы выполнялось равенство  $f(x) = f(y)$  необходимо и достаточно, чтобы  $x = y$ . Тогда 1-ое уравнение принимает вид:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}. \quad \text{Тогда, } x \leq 7.$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 9 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} + 2.$$

$$9 - 2\sqrt{(7-x)(x+2)} = 2 + \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}.$$

$$(\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2})^2 = 2 + (\sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}). \quad \text{Пусть } a = \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2}.$$

$$\text{Тогда, } a^2 = a + 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0.$$

$$1) \ a = 2. \quad \text{Тогда } \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = 2 + \sqrt{x+2}.$$

~~Заметим, что  $\sqrt{7} < 2 + \sqrt{2}$ , так как  $x \geq 0$~~  Заметим, что  $\sqrt{7} < 2 + \sqrt{2}$ , так как  $x \geq 0$ .

$$7 < 6 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < 4\sqrt{2}, \text{ а это правда. Тогда, } \sqrt{7-x} < \sqrt{7} < 2 + \sqrt{x+2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \leq 2+\sqrt{2+x} \Rightarrow \sqrt{7-x} < 2+\sqrt{2+x} \quad \leftarrow \text{Значит, этот}$$

случай не подходит.

невозможно!  
(при  $x+2 < 1$   
 $x \geq -1$ )

$$2) \theta = -1: \sqrt{7-x} - \sqrt{x+2} = -1. \text{ Тогда } \sqrt{7-x} = \sqrt{x+2} - 1.$$

$$\text{Тогда, } 7-x = x+2+1 - 2\sqrt{x+2}. \quad 2\sqrt{x+2} = 2x-4 \quad (\text{тогда } x \geq 2).$$

$$\sqrt{x+2} = x-2, \text{ тогда } x+2 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+2=0. \quad D=25-4 \cdot 2=17.$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$\left| \frac{5-\sqrt{17}}{2} < 2 \Leftrightarrow 5-\sqrt{17} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{17} > 1, \text{ это правда} \Rightarrow \text{не-$$

терпимый корень. Очевидно, что  $x_1 > 0$ ;  $x_2 > 2$ , докажем,

$$\text{что } x_1 < 7 \Leftrightarrow \frac{5+\sqrt{17}}{2} \leq 7 \Leftrightarrow 5+\sqrt{17} \leq 14 \Leftrightarrow \sqrt{17} \leq 9, \text{ это правда.}$$

$$\text{Значит, } x_1 \text{ подходит. Тогда, } y = x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} X = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ Y = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$



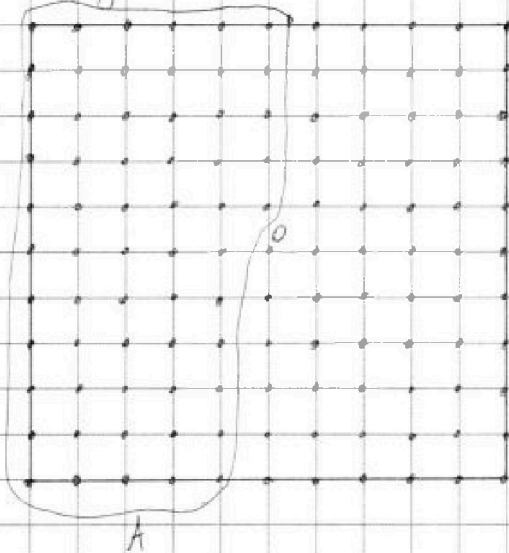
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6.



Всего узлов ~~выбрано~~  $10 \times 10 = 100$ . Всего узлов отмечено  $(10+1)(10+1) = 121$  узлов. Всего способов выбрать пару различных узлов  $- C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 = 7260$  способов. Отметим

центр квадрата  $O$ . Тогда, количество способов выбрать пару узлов, центрально симметричную относительно  $O$  -  $\frac{121-1}{2} = 60$  узлов. (т.к. один из узлов точно содержится в месте  $A$ , а 2-ой узел восстанавливается однозначно.) Если поворачивать вокруг  $O$  пару узлов, центрально симметричную  $O$  4 раза, то получаем 2 пары ~~разных~~ ~~одинаковых~~ способов.  $\Rightarrow$  Итого количество способов выбрать центрально симметричную пару - 30 способов. ( $\frac{60}{2} = 30$ ) Если же брать 4 раза не симметричную центрально пару 4 раза, то получим 4 разные расстояния  $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нужное кол-во способов выбрать не симметричную  
элементарно парти =  $\frac{(7260-80)}{4} = \frac{7200}{4} = 1800$ . Значит, общее

кол-во нужных нам способов =  $1800 + 30 = 1830$ .

Ответ: 1830 способов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

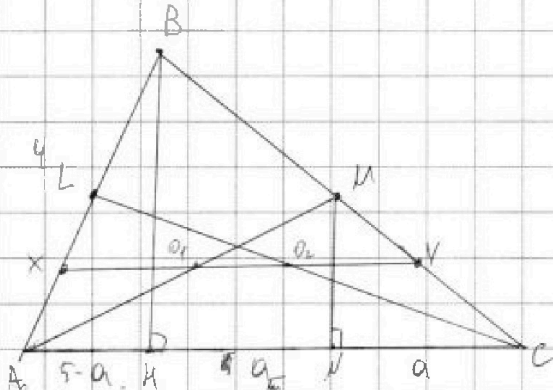


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Пусть  $O_1$  - середина  $AM$ ,  $O_2$  - середина  $CL$ . Тогда  $O_1$  - центр  $\Omega$ ,  $O_2$  - центр  $\omega$ . Очевидно, что  $PQ \perp O_1O_2$ . Так как  $PQ \parallel$

высоте  $\triangle ABC$  из  $m.B$ , а высота из  $m.B \perp AC$ , то  $PQ \perp AC$

$\Rightarrow AC \parallel O_1O_2$ . Пусть  $O_1O_2 \cap AB = X$ ,  $O_1O_2 \cap BC = Y$ .

Так как  $LO_2 = O_2C$  и  $XO_2 \parallel AC$ , то  $XO_2$  - средняя линия в  $\triangle ALC$

$\Rightarrow AX = XL$ . Аналогично,  $MY = YC$ . Так как  $AC \parallel XY$  и  $AX = XL$

и  $CY = MY$ , то по  $m$ . Далеко  $ML \parallel AC$ . Так как

$M$  - середина  $AC$  и  $ML \perp AC$ , то  $L$  - середина  $AB$

$\Rightarrow CL$  - биссектриса и высота в  $\triangle ACB \Rightarrow \triangle ACB$

- равнобедренный, где  $AC = BC$ . Так как  $\Omega$  построена

на  $AM$ , как на диаметре, то  $\angle AMO = 90^\circ$ . Пусть

$CM = a$ .  $BH$  - высота. Тогда  $MM \parallel BH$  и  $M$  - середина

$BC \Rightarrow CM = MH = a$ . Тогда  $AM = 5 - a$ . Тогда,  $BC = 5 + a$ .

По  $m$ . Пифагора для  $\triangle AMO$ :  $16 = (5 - a)^2 + BH^2 \Leftrightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$16 = 25 - 10a + a^2 + BH^2 \Leftrightarrow BH^2 = 10a - a^2 - 9.$$

По т. Пифагора для  $\triangle BHC$ :

$$(a+5)^2 = BH^2 + 4a^2 \Leftrightarrow (a+5)^2 = 10a - a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 10a + 25 = 10a - a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 25 = -a^2 - 9 + 4a^2$$

$$a^2 + 25 = 3a^2 - 9$$

$$34 = 2a^2 \Rightarrow a = \sqrt{17}. \text{ Значит, } AC = BC = 5 + a$$

$$= 5 + \sqrt{17}.$$

$$\text{Ответ: } AC = 5 + \sqrt{17}, BC = 5 + \sqrt{17}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~6/11~~

$z = z + 2$      $a^2 + b^2 = 9$      $r = \sqrt{z^2 + 4}$      $AM = Q$   
 $5 \geq 2x$      $a - b + 7 = 2ab$      $CL = \omega$   
 $z, 5 \geq x$      $(a+b)^2 = ab(a-b)$      $0 < x < 5.7$

$7 - \sqrt{z-x} = \sqrt{z+2}(\sqrt{z-x}-1)$      $AM \perp O_1O_2$   
 $\sqrt{z-x} < \sqrt{z+2}$      $\Rightarrow BH \perp O_1O_2$   
 $\sqrt{z-x} \leq \sqrt{z}$      $0_1O_2 \parallel AC$   
 $2 + \sqrt{z}$      $\Rightarrow AB=4; AN=5$

$x+2 = 8-x+2\sqrt{z-x}$   
 $z+6 = 2\sqrt{z-x}$   
 $x-3 = \sqrt{z-x}$   
 $x^2 - 6x + 2z = 0$      $\frac{a+2x}{a+x} = \frac{b+2y}{b+y}$   
 $D = 35 - 8 + 4z$      $\frac{a+x}{a} = \frac{b+y}{b}$   
 $x = \frac{5+2\sqrt{z}}{2}$      $ab+xb = abay$   
 $ab+6 = abay$   
 $ab = ay$   
 $a=5$

$a^2 - a + 2 = 0$   
 $D = 1$      $0 < x < 5.7$      $0 \leq a + 2$

$-x^2 + 5x + 14$   
 $Q^2 - Q - 2 = 0$   
 $(Q-2)(Q+1) = 0$   
 $5 < 0$

$\sqrt{z-x} - \sqrt{z+2} = -1$      ~~$x^2 + 5x + 14$~~   
 $\sqrt{z+2} = 1 + \sqrt{z-x}$      $x^2 + (5-a)^2 = 16$   
 $7 - y \geq 0$      $y \leq 7$      $x^2 + 725 - 10a + a^2 = 16$   
 $x^2 = 100 - 9a^2$   
 $x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$      $y \geq 0$      $9a^2 + (100 - 9a^2) = a^2 + 100 + 25$   
 $x = y$      $x \geq 0$      $3a^2 - 9 = a^2 + 25$   
 $2a^2 = 34$      $a^2 = 17$   
 $a = \sqrt{17}$

$|\sqrt{z-x} - \sqrt{z+2}|^2 = \sqrt{z-x} - \sqrt{z+2} \geq 0$      $17 - x)(x+2)$   
 $\sqrt{x+2} - \sqrt{z-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$   
 $\sqrt{z+2} - \sqrt{z-x} = 2\sqrt{17-x)(x+2)}$   
 $9 - 2\sqrt{17-x)(x+2)} = 2 + \sqrt{z-x} - \sqrt{z+2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

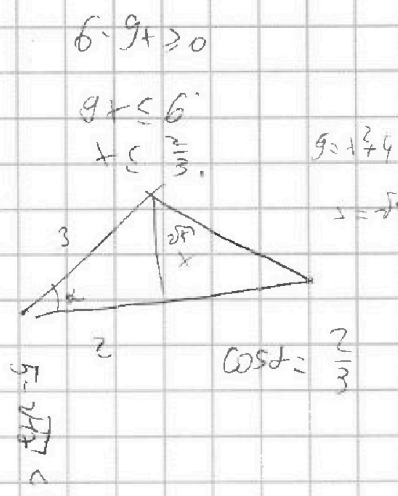
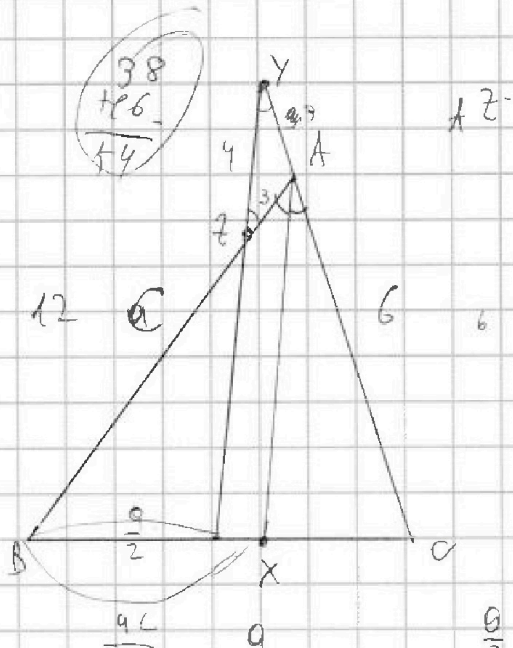
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 128 \\ 48 \\ +16 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ +16 \\ \hline 54 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 14 \\ +16 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\frac{aC}{b+c}$$

$$\frac{aC}{c+b}$$

$$\frac{c-3}{c}$$

$$9x^2 + 9x - 6 = 0$$

$$3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 24$$

$$c+b = 20 - 6$$

$$c = 12$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{144 + 36 - \frac{4 \cdot 12 \cdot 6}{3}} = \sqrt{180 - 96} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{24} = y^3 - \sqrt{24} + 3y$$

$$(3x)^2 = (x^2 - 2x)^2$$

$$9x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$x^2(x-5)(x+1) = 0$$

$$x^3 - y^3 = 3y - \sqrt{24} + \sqrt{24} - 3x$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3y - 3x - \sqrt{24} + \sqrt{24}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3y - 3x - \sqrt{24} + \sqrt{24}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = \sqrt{24} - \sqrt{24}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) + \sqrt{24} - \sqrt{24} = 0$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 6 \\ \hline 127 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$16+3+9\sqrt{5}$   
 $a+d = 19+9\sqrt{5} = 2f$   
 $d = \frac{19+9\sqrt{5}}{2}$   
 $6-9(1+\sqrt{5})$   
 $-3-9\sqrt{5}$  (4)  
 $16$  (6)  
 $54+18\sqrt{5}$  (10)  
 $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = 3(3x^3 + 3x - 2)$   
 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$   
 $3x^2(x^2 - 2x)^2$   
 $\frac{x^2(x^2 - 2x)^2}{(x^2 - 2x)^2 - (6-9x)} = 2$   
 $\frac{(3x - x^2 + 2x)(3x + x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x)^2 - (6-9x)} = 2$   
 $\frac{(1+\sqrt{5})}{2} \Big/ \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$   
 $4$   
 $9x^2 - (x^4 - 4x^3 + 4x^2) = 2(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6)$   
 $-x^4 + 4x^3 + 5x^2 = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 18x - 12$   
 $3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$   
 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$   
 $(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$   
 $(x-1)(x-1)(x^2 - 2x + 4) = 0$   
 $(1+\sqrt{5})^2 = (6+2\sqrt{5})$   
 $(6+2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5})^2$

$a+3d = (6-9x) = 3(2-x)$   
 $a+5d = (x^2-2x)^2 = x^2(x-2)^2$   
 $a+9d = 9x^2$   
 $6d = 9x^2 - (6-9x) = 9x^2 + 9x - 6$   
 $3(1-2)(x^3 - 2x^2 + 3) = 9x^2 + 9x - 6$   
 $9+3 \cdot 4 \cdot 2 = 9+24=33$   
 $(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$   
 $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6$   
 $\frac{(-x^2 + 5x)(x^2 + x)}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6} = 2$   
 $1+4+4-9-6$   
 $6 \cdot 25 - 4 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 45 - 6$   
 $4+4-4=30 = (2\sqrt{5})^2$   
 $\frac{2+2\sqrt{5}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y \leq 2 \\ x-2y \geq -2 \\ 2x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$mn(m+2n+9) = 11p^2$$
  

$$(m+2n)(m+2n-7) = 75q^2$$

$$x-2y=2$$
  

$$2y=x-2$$
  

$$y = \frac{x}{2} - 1$$

$$x-2y=-2$$
  

$$2y=x+2$$
  

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

$$h(2n+10) = 11p^2$$
  

$$p=2$$
  

$$h(2n+10) = 44$$

$$x=2, y=1$$

$$h(2n+10) = 22$$
  

$$h^2 + 5h - 22 = 0$$
  

$$D = 25 + 4 \cdot 22 = 25 + 88 = 113$$

$$2x-y=1$$
  

$$y = 2x-1$$

$$2x-y=-1$$
  

$$y = 2x+1$$

$$m(m+1) = 11p^2$$
  

$$m^2 + 11m - 11p^2 = 0$$
  

$$D = 11^2 + 4 \cdot 11p^2$$
  

$$y = 2x+1$$

$$3y+6x$$
  

$$x = \frac{4}{3}$$
  

$$y = \frac{\frac{4}{3}}{2} + 1 = \frac{5}{3}$$
  

$$3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 5 + 8 = 13$$

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$
  

$$m^2n + 2m^2 + 5mn$$

$$\begin{cases} mn(m+2n+9) = 75q^2 \\ (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \end{cases}$$

$$(m+2n)^2 - 7(m+2n)$$
  

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$m+2n = 11$$
  

$$11-7=4$$
  

$$(m+2n, m+2n-7)$$

$$m+2n = 22$$
  

$$m+2n-7 = 15$$
  

$$mn = 20$$
  

$$4mn = 80$$
  

$$m+2n = 11+7 = 18, m+2n-7 = 11$$

$$p^2 = 4$$
  

$$h \cdot n = 15$$
  

$$m+2n = 11$$
  

$$h=3$$