



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дд.

Ответ: -1; 5

Пусть коэффициент прогрессии будет равен  $q$ .

Тогда  $x_2 = \sqrt{(5x_0)(x-3)} = x_4 \cdot q^8 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^8$

$x \neq 3$ .

$q^8 = \frac{x_2}{x_4} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$

1)  $x > 3$ :

$q^4 = x-3$

$q^2 = \sqrt{x-3}$

$x_2 = q^2 \cdot x_0 = (x+1) \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{15x+6} \cdot \sqrt{x-3}$

$\sqrt{x-3} (x+1 - \sqrt{15x+6}) = 0$

П.к.  $x \neq 3$ , то  $\sqrt{x-3} \neq 0$ .

Тогда

$x+1 = \sqrt{15x+6}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

П.к.  $x > 3$ , то  $x \geq 5$ .

2)  $x < 3$ :

$q^4 = 3-x$

$q^2 = \sqrt{3-x}$

$x_2 = q^2 \cdot x_0 = (x+1) \sqrt{3-x} = \sqrt{(5x+6)(x-3)}$

П.к.  $x < 3$ , то  $x-3 < 0$ , а  $(5x+6)(x-3) \geq 0$ . Тогда  $15x+6 \leq 0$

$(x+1)^2 (3-x) = (15x+6)(x-3)$ . П.к.  $\sqrt{3-x} > 0$ ,  $\sqrt{(5x+6)/(x-3)} > 0$ , то  $x+1 \geq 0$

$(x^2 + 8x + 16 + 15x + 6)(3-x) \geq 0$ ;  $3-x \neq 0$ .

$x^2 + 23x + 22 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq -22 \\ x \geq -1 \end{cases}$

П.к.  $x \geq -4$ , то  $x = -1$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-b^2+z}, \quad x \geq -7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}; \\ \sqrt{225-z^2} \leq 15, \text{ т.к. } 225-z^2 \leq 225. \end{array} \right.$$

Тогда  $|y-20| + 2|y-35| \leq 15$ .

Докажем, что  $|y-20| + 2|y-35| \geq 15$ :

1)  $y \geq 35$ :  $y-20 + 2y-70 = 3y-90 \geq 105-90 = 15$

2)  $20 < y < 35$ :  $y-20 - 2y+70 = 50-y \geq 50-35 = 15$

3)  $y < 20$ :  $20-y + 70-2y = 90-3y \geq 90-60 = 30 \geq 15$   
т.е.  $15 \leq |y-20| + 2|y-35| \leq 15$ . Тогда  $|y-20| + 2|y-35| = 15$ .

Также докажем, что  $|y-20| + |y-35| \geq 15$ :

1)  $y \geq 35$ :  $y-20 + y-35 = 2y-55 \geq 70-55 = 15$

2)  $20 < y < 35$ :  $y-20 + 35-y = 15 \geq 15$

3)  $y < 20$ :  $20-y + 35-y = 55-2y \geq 55-40 = 15$

$|y-20| + |y-35| = |y-20| + 2|y-35| - |y-35|$ . Т.к.  $|y-35| \geq 0$ ,

$15 \leq |y-20| + |y-35| \leq |y-20| + 2|y-35| = 15$

Тогда  $|y-20| + |y-35| = 15$ . Тогда  $|y-35| = 0$ .  $y = 35$ .

Тогда, т.к.  $|y-20| + 2|y-35| = 15 = \sqrt{225-z^2}$ , то

$225-z^2 = 225$ .  $z = 0$ .

Тогда,

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-b^2}$$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - 6$$

$$\sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} - (5-x+7+x)$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} - 6 = 2 - (\sqrt{7+x} - \sqrt{5-x})^2$$

Пусть  $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$ .

Тогда:  $t - 6 = -t^2$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$-7 \leq x \leq 5$$

$$\begin{cases} t=3, \\ t=2; \end{cases}$$

1)  $t=2$ ;

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2$$

$$x+7 = 4 + 5-x + 4\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 4\sqrt{5-x}$$

$$x-1 = 2\sqrt{5-x} \quad x \geq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4(5-x)$$

$$x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D = 4 + 76 = 80$$

$$x_2 = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{5}$$

П.к.  $-1 - 2\sqrt{5} < 1$ , то  $x_2 = -1 + 2\sqrt{5}$ .

2)  $t=3$ ;

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 3$$

$$x+7 = 9 + 5-x + 6\sqrt{5-x}$$

$$2x-2 = 6\sqrt{5-x}$$

$$\begin{cases} 2x-2 \leq 0 \\ x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$4x^2 - 20x + 16 = 36 \Rightarrow 4x^2 - 20x - 20 = 0$$

$$4x^2 + 8x - 18 = 0$$

$$D = 64 + 16 \cdot 18 = 16 \cdot 19$$

$$x_2 = \frac{-8 \pm 4\sqrt{19}}{8} = -1 \pm \frac{\sqrt{19}}{2}$$

П.к.  $-1 + \frac{\sqrt{19}}{2} > \frac{7}{2}$ , то  $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$

Ответ:  $x_2 = -1 + 2\sqrt{5}, y = 35, z = 0$ ;  
 $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}, y = 35, z = 0.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Пусть  $\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p.$$

Пусть  $\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$ .

Рассмотрим функцию  $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

$p$ -я её производная:  $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$ .

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 12t + 3 = 3(2t-1)^2.$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t-1)^2 = 0 \quad t = \frac{1}{2}$$

$f'(t) = 3(2t-1)^2$ . — значит функция монотонно возрастает

(при  $t = \frac{1}{2}$   $f'(t) = 0$ , при  $t \neq \frac{1}{2}$ ,  $f'(t) > 0$ )

Поэтому мин. знач.  $f(t)$  на промежутке  $[-1; 1]$  будет в точке  $t = -1$ .

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10,$$

Макс. знач. будет в точке  $t = 1$ ,  $f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$ .

Уравнение  $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$  будет иметь ровно 1 корень при

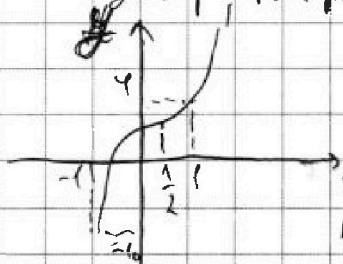
каждом  $p$ , т.к.  $p$  — это горизонт. прямая, а  $f(t)$  всегда возраст.

Поэтому, если пересечь график функции  $f(t)$

прямой  $y = p$  при  $p \in [-10; 4]$ , то

решение (т. пересек.) будет лежать в

промежутке  $[-1; 1]$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При этом, если  $p \in [-\omega; \omega]$ , то угр. пересечёт  $y = f(t)$   
в точке, соответствующей промежутку  $[-1; 1]$ .

Тогда  $p \in [-\omega; \omega]$ .

Пусть  $t_1$  — единственный корень уравнения

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p \geq 0$$

Тогда, г.к.  $\cos x \in [-1; 1]$ ,

$$\begin{cases} x = \arccos t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arccos t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

*Решение*

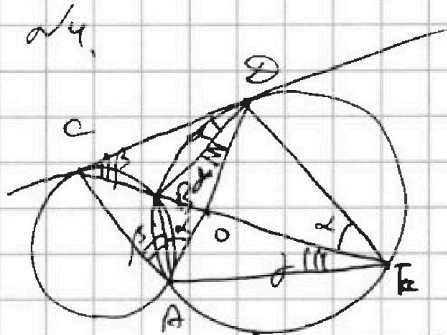
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\angle DCO = \alpha$

Потому  $\angle CAD = \alpha$ , г.к.

$\angle DEO = \angle CAD$ , г.к. они опп.

на одну  $\perp BD$ .

$\angle CDB = \alpha = \angle DEO$ , г.к. это углы между

кас и хордой и равен повороте дуги  $CD$ .

Многу мисли.

Пусть  $\angle BAC = \beta$ , тогда  $\angle BCD = \beta = \angle BAC$ , г.к. это

углы между кас и хордой и они равен повороте дуги,

г.к. мисли.

$\angle DBE = \alpha$ , г.к. это внутр. угол  $\triangle CBD$  и он равен углу

$\angle$  в центре. С другой стороны  $\angle DBE = \angle DBK = \alpha + \beta$ , г.к. они внутр и

опп. на одну дугу.

Пусть  $\angle BDO = \gamma$ , тогда  $\angle BDA = \angle BDO = \gamma$  (г.к. они внутр и

опп. на одну дугу)

Потому  $\triangle CDA \sim \triangle DBA$  по 2 углам ( $\angle CDA = \angle DBA$ ;

$$\angle CAD = \angle DAB$$
)  $\Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{CA}{BA} = \frac{DA}{AE}$

г.к.  $\angle CAD = \alpha + \beta = \angle OAE$ , то  $AO$  - биссектр.  $\angle CAE$   $\Rightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{CA}{AE} = \frac{9}{25}$ .

$AC = 9x$ ,  $AE = 25x$ ,  $\frac{CA}{AD} = \frac{9x}{AD} = \frac{DA}{AE} = \frac{DA}{25x}$

$AD = \sqrt{225x^2} = 15x$ .

$\frac{EO}{CO} = \frac{AO}{AC} = \frac{15x}{9x} = \frac{5}{3}$ .

Ответ:  $\frac{5}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

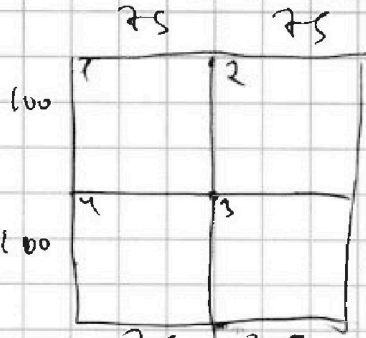
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

НС.

Р-м. Закрытие с симметр. относ углам.



Всего для каждого набора ~~2~~ закрыт  
клеток в 1 четверти все соответств. ему  
набор закрыт клеток в 3-й.

То же самое год 2-й и 4-й четверти,  
тогда кол-во в 1-й и 2-й четверти совпад  
считается 4, т.к. в 3-й и 4-й, а в 4-й и 2-й.

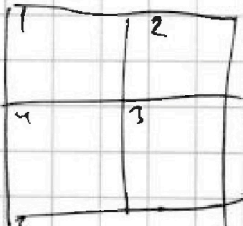
1	2
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

- 1) 4-0;  $C_{750}^4$
- 2) 3-1;  $C_{750}^3 + C_{750}^1$
- 3) 2-2;  $C_{750}^2 + C_{750}^2$
- 4) 1-3;  $C_{750}^1 \cdot C_{750}^3$
- 5) 0-4;  $C_{750}^4$

$$2 \cdot C_{750}^7 + 2 \cdot C_{750}^3 \cdot 750 + C_{750}^2 \cdot C_{750}^2 =$$

$$\frac{2 \cdot 750!}{2496!4!} + \frac{2 \cdot 750! \cdot 750}{2497!3!} + \frac{750!^2}{2498!2!}$$

Р-м. Закрытие отн. средней линии (2 сред. линии угла, т.к. отлик только поворотом на 90°):



Раскрытие в 1-й равно раскрытие во 2-й,  
раскр. в 4-й равно раскр. в 3-й;

тогда сумма зак. клеток в 1-й и 4-й равно  
4, т.к. в 1-й и 4-й сумма 4, сколько 1

2-й и 3-й. При раскр. 1-й отложит, закрётся  
раскр. 2-й, при раскр. 4-й отложит, закрётся  
раскр. 3-й;

1	3
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

- 1) 4-0;  $C_{750}^4$
- 2) 3-1;  $C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$
- 3) 2-2;  $C_{750}^2 \cdot C_{750}^2$
- 4) 1-3;  $C_{750}^1 \cdot C_{750}^3$
- 5) 0-4;  $C_{750}^4$

Всего:

$$C_{750}^4 \cdot \frac{2 \cdot 750!}{2496!4!} + \frac{2 \cdot 750! \cdot 750}{2497!3!} +$$

$$+ \frac{750!^2}{2498!2!}$$

Для формулы

когда при каждой раскр. отн. верг. работет  
перлтер. на 90° по часовой стрелке раскрытия, то правд.





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

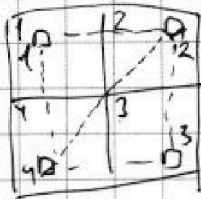
Будет симметрична относительно. Гориз. сред линии и вертикал,  
где раскрыва, симметр. отк. гориз. линии все раскрыва, поверн.  
на 90° против часовой стрелки и она будет симметрична отк.

верт. линии (пока будем считать, что)

что где раскр., симметр. отк. ср. линии способов:

$$2 \cdot \left( \frac{2 \cdot 750!}{749! \cdot 1!} + \frac{2 \cdot 750 \cdot 750!}{748! \cdot 2!} + \frac{750!^2}{748! \cdot 2!} \right)$$

Остаток посчитать кол-во раскрывок, которые симметр.  
отк. сразу 2 линии, как линии и срединки!



Если раскр. симметр. отк. 2-ю линию, то

1-я четверть равна 2-й четверти и равна 4-й  
четверти, а они, в свою очередь, равны 3-й!

Тогда 1-я четверть равна 3-й, а значит

все симметрично и относительно угла, (под "равностью" четвертей  
подразумевается симметричность, 1-я и 3-я симметричны  
относительно угла, так 3-я поверн. на 180° относительно угла  
предельно, провед. через угол.)

Аналогично 2-я и 4-я. Тогда все 4 четверти равны.

Если все симметр. отк. угла и линии, то здесь эта линия будет  
вертикальной, тогда 1 симметр. 2-й и симметр. 3-й, 3-я симметр.

4-й от предельно, поверн. 1-ю на 180°, 2-ю поверн. в 90°, через  
угол симметр., тогда раскрыв. 4-к. симметр. отк. угла

Относительно комбинаций симметричных отк. 2-ю линии, то, если  
вот так симметрично отк. угла и 1-ю линию, то вот так, симм. и отк.  
горизонт. Тогда если совпадет. линии то 2 симм., то совпадают все

?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда, раскрыв 1-ю четверть, мы сразу знаем 2-ю, 3-ю и 4-ю (через симметрию). В 1-й четверти кон в клеток, равно кон-бу клеток во 2-й, 3-й и 4-й.

Всего в 1-й четверти 2 клетки;

вариантов сумм раскрыв 1-й четверти;

$C_{750}^2$ . Также раскрыв мы считали трижды

(год каждой из симметрий), а потому внесем их выдох дважды:

$$3 \cdot \left( \frac{2 \cdot 750!}{749! \cdot 4!} + \frac{2 \cdot 750 \cdot 750!}{749! \cdot 3!} + \frac{750!^2}{749! \cdot 2!^2} \right) = \frac{2 \cdot 750!}{749! \cdot 2!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \left( \frac{6 \cdot 750!}{749! \cdot 4!} + \frac{6 \cdot 750 \cdot 750!}{749! \cdot 3!} + \frac{3 \cdot 750!^2}{749! \cdot 2!^2} \right) = \frac{750!}{749!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \left( \frac{750!}{749! \cdot 4} + \frac{750 \cdot 750!}{749!} + \frac{3 \cdot 750!^2}{749! \cdot 2!^2} \right) = \frac{750!}{749!} \cdot 2$$

$$2 \cdot \frac{750 \cdot 749 \cdot 749 \cdot 749}{4} + \frac{750 \cdot 750 \cdot 749 \cdot 749}{4} + \frac{3 \cdot 750 \cdot 749 \cdot 750 \cdot 749}{4}$$

$$= 750 \cdot 749 \cdot 2 \cdot 750 \cdot 749 = 3 \cdot \left( C_{750}^4 \cdot 2 + 2 C_{750}^3 \cdot C_{750}^1 + C_{750}^2 \right) =$$

$$= 2 C_{750}^4 + 6 C_{750}^3 + 6 C_{750}^3 \cdot C_{750}^1 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2) =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot C_{750}^4 + 45000 C_{750}^3 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2)$$

$$\text{Ответ: } 6 \cdot C_{750}^4 + 45000 \cdot C_{750}^3 + C_{750}^2 (C_{750}^2 - 2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26

$$(a-c)(b-c) = p^2. \text{ Если } p \neq 3, \text{ то } p \nmid 3, \text{ т.е. } p - \text{нечетное.}$$

$$\text{Если } p \neq 3, \text{ то } p^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

$$(a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod 3.$$

$$\text{т.к. } a, b \nmid 3, \text{ то } a \not\equiv b \pmod 3.$$

$$\text{Если } a - c \equiv b - c \pmod 3, \text{ то } a - b \equiv c - c \equiv 0 \pmod 3. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{Тогда } a, \text{ т.е. } a - c \equiv 0 \pmod 3, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 !!!$$

$$\text{Если } a - c \equiv 1 \pmod 3, \text{ то } b - c \equiv 0 \text{ или } 2, \text{ тогда } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3.$$

Не подходит.

$$\text{Если } a - c \equiv 2 \pmod 3, \text{ то } b - c \equiv 0 \text{ или } 1. \text{ Если } b - c \equiv 0, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3,$$

$$\text{а если } b - c \equiv 1, \text{ то } (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3.$$

Тогда нет такого  $p \nmid 3$ .

Значит  $p = 3$ .

$$(a-c)(b-c) = 9.$$

т.к.  $a-c$  и  $b-c$  — чётные числа,  $a-b > 0, a-b = (a-c) - (b-c)$ ,

т.е.  $a-c > b-c$ , то есть варианты:

$$\begin{cases} a-c=9, \\ b-c=1; \\ a-c=1, \\ b-c=9; \end{cases} \begin{cases} a=2c+9, \\ b=c+1; \\ a=c-1, \\ b=c-9; \end{cases} \begin{cases} b=2c+9, \\ a=2c+1; \\ a=2c+9, \\ b=c-9; \end{cases} \quad a \geq b$$

$$a+b^2 \geq 20, \quad b^2 + b + 312 \geq 20$$

$$b \geq 2249$$

$$b \geq \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 312}}{2}$$

$$\begin{cases} b=28, \\ b=29; \end{cases} \begin{cases} a=36, \\ b=21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=c+9, \\ a=2c+9, \\ b=28; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=27, \\ a=236, \\ b=28. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=c-9, \\ a=2c+9, \\ b=29; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=20, \\ a=21, \\ b=29. \end{cases}$$

Ответ:  $a=36, b=28, c=27$ ;  
 $a=21, b=29, c=20$ .

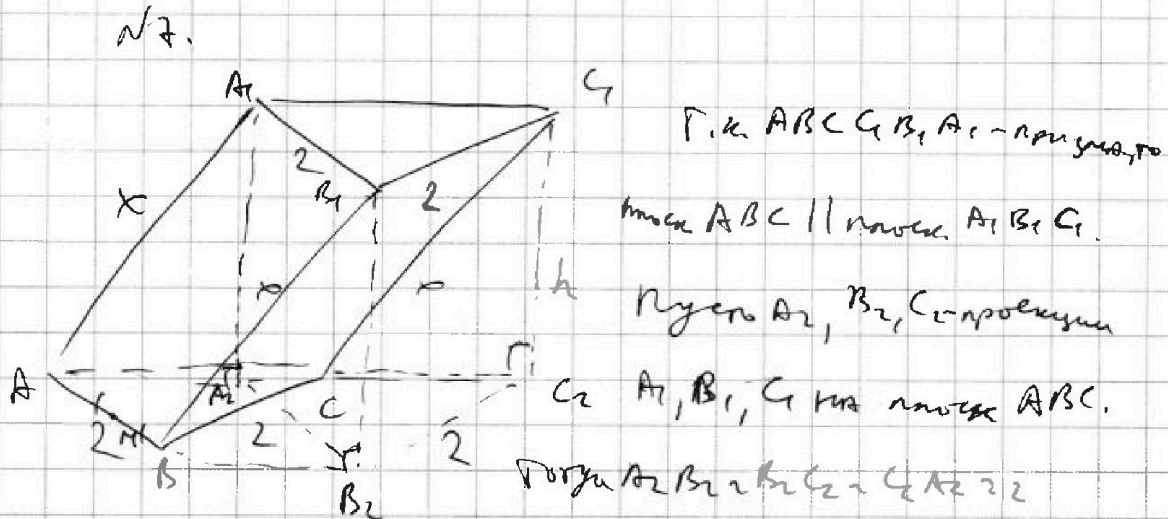
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Пусть~~ Г.к.  $C_1C_2, A_1A_2, B_1B_2$  - высоты плоск.  $ABC$ , то

$$\angle B_2C_2C_1 = \angle B_2C_2A_2 = \angle A_1A_2B_2 = \angle A_2B_2B_1 = \angle A_2B_2C_1 =$$

$$\angle A_1A_2C_2 = \angle A_2C_2C_1$$

$$\text{Тогда } S_{A_1C_1C_2} = 2 \cdot h = S_{A_1B_1B_2} = S_{B_1C_1C_2}.$$

Пусть, считаем единичным,  $S_{A_1B_1A_1} = 1$  и площадь ост. -  $S$

Г.к.  $A_1C_1C_2$  - проекция  $A_1C_1A_1$  на плоск.  $A_1C_1C_2$ , то  $S_{A_1C_1C_2} =$

$$S_{A_1C_1A_1} = S_{A_1C_1A_1} \cdot \sin \alpha_1, \text{ где } \alpha_1 - \text{высот. угол, между}$$

плоск.  $A_1C_1A_1$  и плоск.  $A_1C_1C_2$   $ABC$

$$S_{A_1C_1C_2} = S_{B_1C_1B_1} \cdot \sin \alpha_2, \text{ где } \alpha_2 - \text{высот.}$$

угол между плоск.  $B_1C_1B_1$  и плоск.  $A_1C_1C_2$   $ABC$

$$\text{Г.к. } S_{B_1C_1B_1} = S_{A_1C_1A_1} = S, \text{ то } \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \text{ Г.к.}$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \text{ то } S_{A_1C_1C_2} = S_{A_1C_1A_1} = 2 \cdot h, \text{ Тогда } \alpha_1 = \alpha_2, \text{ Г.к.}$$

плоск.  $A_1C_1C_2$ , то тогда плоск.  $A_1C_1A_1$  и плоск.  $B_1C_1B_1$ ,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

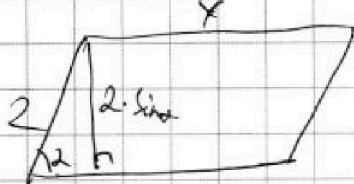
Что известно по условию, что это грани треугольного призма,

Знаем  $AA_1 \perp BC$ ,  $AA_1 \perp B_1C_1$ , так это 2 противополож.

стор параллелогра.  $AA_1 \perp B_1C_1 \perp CC_1$ , так  $B_1C_1$  и  $CC_1$

это 2 противополож стороны параллел  $B_1C_1C$ .

Параллелограмм  $AA_1C_1C$  и  $BB_1C_1C$  равны, так:



$S = 2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$ . Г.к.  $\alpha$  и  $2$  одинаковы

равны,  $\alpha$  и  $2$  равны, а значит и площадь

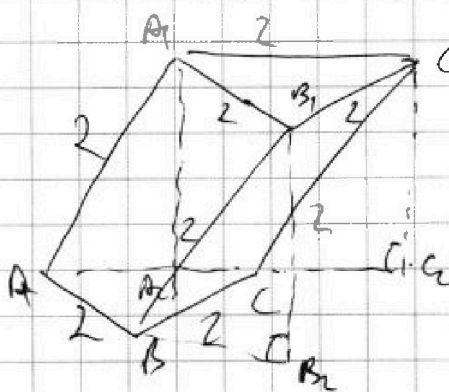
равны

Потому  $AA_1C_1C$  симметр  $BB_1C_1C$  отн плоск, проходя через

$C_1C$  и середину  $AB$ . Потому  $AA_1B_1B$  симм отн прямой, проходящей через  $A_1B_1$  и  $AB$ , т.к  $B_1C_1$  симметр  $A_1C_1$  отн  $CC_1$ ,  $M$  и

$A$  симм  $B$  отн прямой  $CC_1M$ . Потому  $AB \perp CC_1M$  и  $A_1B_1 \perp CC_1M$ .

Потому  $AA_1B_1B \perp CC_1M \Rightarrow AM \perp B_1B$  - симметр отн  $CC_1M$ , потому, т.к.  $AA_1, B_1B$  - это параллельные, то это прямая (т.к. и не симметр отн срединной)  $\Rightarrow S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$



указано в условии  $AA_1 \perp B_1C_1$   $\frac{S}{2}$   
следовательно, что  $B_1C_1 \perp AA_1$

Ответ: 16

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos x = 23 \cos 2x + P$$

$$\cos 3x = 2 \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin x = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin^2 x)$$

$$2 \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1 - 2 + 2 \cos^2 x) = 2 \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$\cos 3x + 3 \cos x = 23 \cos x$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 23t - 3 + P$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = P$$

$$4 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 7$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 7$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0$$

$$11b^2 - 12b + 3 = 0$$



$$b^2 - 4t + 1 = 0$$

$$b^2 - 4t + 1 = 0 \quad P = 35 \quad 1875$$

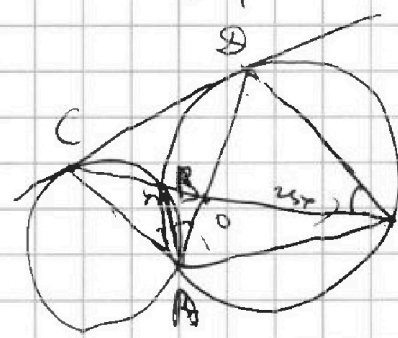
мин. функция:  $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

$$7500 - 7500 - 4 = 7$$

$$= 4(1875 - 7500 - 1)$$

макс. функция:  $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

$P = 7500 - 7500 - 4$   $P = 7500 - 7500 - 1$   $P \in (-7500, 4)$



$$7500 - 7500 - 4 = 7$$

$$7500 - 7500 - 1 = 7$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AO = R$   
 $\angle COB = 2\alpha$   
 $\angle COA = 2\beta$   
 $\angle AOB = 2\gamma$   
 $\triangle COB \sim \triangle OAB$   
 $\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OC}$   
 $OC = \frac{OB^2}{OC}$   
 $\frac{OB}{OC} = \frac{AO}{OB} = \frac{AO}{AC}$   
 $OB^2 = AO \cdot AC$   
 $OB = \sqrt{AO \cdot AC}$

$AO = R$   
 $OC = R \cos 2\alpha$   
 $OC = R \cos 2\beta$   
 $R \cos 2\alpha = R \cos 2\beta$   
 $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$   
 $2\alpha = 2\beta$   
 $\alpha = \beta$

$AO = R$   
 $OC = R \cos 2\alpha$   
 $OC = R \cos 2\beta$   
 $R \cos 2\alpha = R \cos 2\beta$   
 $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$   
 $2\alpha = 2\beta$   
 $\alpha = \beta$

$AO = R$   
 $OC = R \cos 2\alpha$   
 $OC = R \cos 2\beta$   
 $R \cos 2\alpha = R \cos 2\beta$   
 $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$   
 $2\alpha = 2\beta$   
 $\alpha = \beta$

$AO = R$   
 $OC = R \cos 2\alpha$   
 $OC = R \cos 2\beta$   
 $R \cos 2\alpha = R \cos 2\beta$   
 $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$   
 $2\alpha = 2\beta$   
 $\alpha = \beta$

$AO = R$   
 $OC = R \cos 2\alpha$   
 $OC = R \cos 2\beta$   
 $R \cos 2\alpha = R \cos 2\beta$   
 $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$   
 $2\alpha = 2\beta$   
 $\alpha = \beta$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$x_4 = x+4$$

$$x_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{15x^2 + 9x - 18}$$

$$x_4 = x+4$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$x_{12} = x_4 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = (x+4) \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$\sqrt{x-3} \cdot (x+4 - \sqrt{15x+6}) = 0$$

$$x_3 = x_4 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ 15x+6 \geq 0 \\ x^2 + 8x+6 = 15x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_3 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

2)  $x < 3$ :

$$\sqrt{15x+6} \geq 0 \Rightarrow 15x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = (x+4) \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \geq 0$$

$$(x^2 + 8x+6)(3-x) = (15x+6)(x-3) = -(3-x)(15x+6)$$

$$(3-x)(6^2 + 8x+6) = 0$$

$$x_2 = 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{235-2x+x^2}$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2z}$$

$$\sqrt{y-20+2z} = \sqrt{y+2z-10+12}$$

$$5-x \leq 12$$

$$3z > 12$$

$$\sqrt{225-2z} \leq 15$$

$$|y-20| + 2|y-35| \leq 15$$

$$15 \leq |5y-70| + |2y-70| \leq 55$$

$$|5y-70| \leq 55$$

$$y-20+5-35+2y-55 \geq 15$$

$$y \geq 20$$

$$20-y+35-2z-55-2y \geq 15$$

$$z \geq 20$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{235-2x+x^2}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$x+7-5+x = 4(x+7)(5-x) + 36 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$2x+2 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 140-20-x-2x+36-24\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$-15 \leq z \leq 15$$
  

$$x \geq -7$$
  

$$5-x \leq 12$$
  

$$-3z > 12$$
  

$$-3z \geq -12$$
  

$$z \leq 12$$
  

$$z \leq 12$$
  

$$z \geq 20$$

$$5 \leq x \leq 7$$
  

$$z \geq 20$$

$$20 \leq y \leq 35$$
  

$$y-20-y+35 = 15 \geq 15$$
  

$$|y-20| + |y-35| = 15$$
  

$$y-35 = 20$$
  

$$y = 35$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 174 - 10x - 4x^2$$

$$4x^2 + 10x - 174 \leq 0$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6$$

$$2x^2 + 5x - 8 \leq 0$$

$$2x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$2x^2 + 7x - 21$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = (5-x)(7+x) + 10 - 2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$12 - 2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 140 - 8x - 4x^2 - 32 - 2\sqrt{(5-x)(7+x)}$$

$$2\sqrt{(x+2)(5-x)} = 164 - 8x - 4x^2$$

$$4x^2 + 8x - 164 \leq 0$$

$$x^2 + 2x - 41 \leq 0$$

$$484(35 - 2x - x^2) = (64 - 2x - 4x^2) \cdot (4 + 164 + 168 + (2\sqrt{42})^2)$$

$$484 \cdot 35 - 484 \cdot 2x - 484x^2 = 256 - 128x - 168x^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{42}}{2} = -1 \pm \sqrt{42}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35 - 2x - x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} - 2\sqrt{35 - 2x - x^2} = -6$$

$$x = -1$$

$$-12$$

$$35 - 2x - x^2$$

$$x = -1$$

$$\sqrt{0} - \sqrt{6} = 2 \cdot 6 - 6$$

$$\sqrt{35 - 2x - x^2} = 2x - 2$$

$$35 + 2 - 12 = 26$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{5-x} + \frac{7+x}{4} + \frac{5-x}{4} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + \frac{5-x+7+x}{2} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + 6$$

$$\left(\frac{5-x}{2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{5-x}{2} - 1\right)^2} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + 6$$

$$\left(\frac{5-x}{2} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{5-x}{2} - 1\right)^2} = 2\sqrt{(5-x)(7+x)} + 6$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$x+7 = t$   $12 \geq t \geq 0$

$$5-x = 5-(t+7) + 7 = 12-t$$

$a=b$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 6$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + \frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$$

$$2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + a+b = 4\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{12-t} + 6 = 2\sqrt{t(12-t)}$$

$$t - 2\sqrt{12t-t^2} + 12-t = 4\sqrt{t(12-t)} - 24\sqrt{t(12-t)} + 36$$

$$12 - 2\sqrt{12t-t^2} = 48t - 4t^2 - 24\sqrt{t(12-t)} + 36$$

$$24 - 22\sqrt{t(12-t)} + 48t - 4t^2 = 0$$

$$\sqrt{t+7} + \sqrt{5-x} + 4$$

$$4t^2 - 48t - 24 = -22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 48t - 24 = 0$$

$$8t^2 + 32t + 100 = 9 \cdot 20 \cdot 36 \cdot 5 = 168$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{55}}{2} = 6 \pm 3\sqrt{5}$$

$$\frac{168}{2} = 84$$

$$4t^2 + 22\sqrt{t(12-t)} - 168 = 0$$

$$2t^2 - 24t - 12 = -11\sqrt{t(12-t)}$$

$$(2t-12)^2 = 168 - 22\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 96t + 576 = 168 - 44\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 96t + 408 = -44\sqrt{t(12-t)}$$

$$4t^2 - 96t + 408 = 0$$

$$t^2 - 24t + 102 = 0$$

$$4 \cdot 4 \cdot 16 - 96 \cdot 8 + 64 \cdot 4 = 256 - 768 + 256 = -256$$

$$256 - 768 + 256 = -256$$