



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

b_n — геом. прогрессия

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 \cdot q^6$$

$$b_{13} = 5-x = b_1 \cdot q^{12}$$

или:

$$\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ \frac{13x-35}{(x+1)^3} \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8 = b_7 \cdot q^8$$

тогда: $b_{15} = b_7 \cdot q^8$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{(13x-35)}{(x+1)^3} \cdot q^{16}$$

1) если $x = \frac{35}{13}$, тогда: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$.

такого не бывает, т.к. $b_{13} = b_7 \cdot q^6$
 $5 = 0 \cdot q^6$

2) если $x \neq \frac{35}{13}$, тогда: $(x+1) = \frac{1}{(x+1)^3} \cdot q^{16} \cdot (x+1)^3 \neq 0$

$$(x+1)^4 = q^{16}$$

$$q^2 = \sqrt[4]{x+1}$$

если $x < -1$, тогда q^2 равно отрицательному числу, такого не бывает

$$q^2 = \sqrt[4]{x+1}$$

$$q^2 = \sqrt[4]{x+1}$$

тогда, $b_{15} = b_{13} \cdot q^2$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \sqrt[4]{x+1}$$

если $x \neq 1 > 0$, тогда $13x-35 > 0$
 $x > \frac{35}{13}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x > \frac{35}{13} \\ -x < -\frac{35}{13} \\ 0 < 5-x < 5-\frac{35}{13} \end{array}$$

$$(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(x+1)$$

$$13x-35 = x^2-10x+25$$

$$x^2-23x+60=0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{23+17}{2} = 20 > \frac{35}{13} \quad \textcircled{v} \\ x = \frac{23-17}{2} = 3 > \frac{35}{13} \quad \textcircled{v} \end{cases}$$

если $x+1 < 0$, то $13x-35 < 0$
 $x < -1$ $x < \frac{35}{13}$

$$\Downarrow$$

$$-x > 1$$

$$5-x > 6$$

тогда, $(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(-x+1) \quad | :(-x+1) \neq 0$

$$-13x+35 = 25 - 10x + x^2$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = 2 > -1 - \text{не удовл. условию} \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 < -1 \quad \textcircled{v} \end{cases}$$

итак, $x = 3, x = 20, x = -5$.

Ответ: $x = -5; x = 3; x = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} \quad (1)$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2)$$

рассмотрим (2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$
раскроем модули: $\begin{array}{ccccccc} & & & + & & + & \\ - & -1 & - & 12 & + & & \end{array} \begin{array}{l} \text{1 модуль} \\ \text{2 модуль} \end{array}$

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12.$

тогда, $y+1 + 3y-36 = \sqrt{169-z^2}$ ОДЗ:
 $4y-35 = \sqrt{169-z^2}$ $169-z^2 \geq 0$

так как $z^2 \geq 0$
 $-z^2 \leq 0$
 $0 \leq 169-z^2 \leq 169$
 $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

и, $y \geq 12$
 $4y \geq 48$
 $4y-35 \geq 13$

получаем, что левая часть больше или равна 13, а правая — меньше или равна 13. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенство достигается только при:
 $\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y-35 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$

2 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq y \leq 12$

тогда, $y+1 - 3y+36 = \sqrt{169-z^2}$
 $-2y+37 = \sqrt{169-z^2}$

т.к. $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (ранее доказано)

а $-1 \leq y \leq 12$

$-12 \leq -y \leq 1$

$-24 \leq -2y \leq 2$

$13 \leq -2y+37 \leq 39$

получаем, что левая часть ≥ 13 , а правая ≤ 13 $\Rightarrow$ равенство достигается только при:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ -2y+37 = 13 \end{cases} \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases} \text{ (также получили в 1 случае)}$$

$$\text{3 случай: } \begin{cases} y+1 \leq 0 \\ y+12 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -1 \\ y \leq -12 \end{cases} \Rightarrow y \leq -1.$$

тогда, $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (равен

тогда, $-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$
 $-4y+35 = \sqrt{169-z^2}$

т.к. $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (равен доказано)

а $y \leq -1$

$$-4y > 1$$

$$-4y > 4$$

$$-4y+35 > 39$$

получается, что левая часть больше или равна 39, а правая часть меньше или равна 13. тогда, решений нет.

Итак, единственное решение (2) - $z=0, y=12$.

подставим его в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$$

пусть $\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

$$2(2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$$

пусть $\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

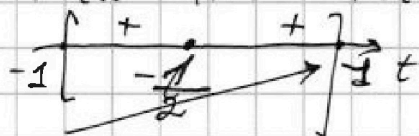
$$2(2t^2 - 1) \cdot t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12(t^2 + t + \frac{1}{4}) = 12(t + \frac{1}{2})^2$$



$$f_{\max}(-1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$f_{\min}(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(\frac{1}{2}) = -4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$$

$$\text{итак, } -4 \leq 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \leq 10$$

$$-4 \leq p \leq 10$$

примем, при любом значении $p \in [-4; 10]$ t будет иметь ровно один корень (т.к. $f(t)$ — монотонно возрастающая функция)

$$\text{при } p = -3: 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = -3$$

$$t(4t^2 + 6t + 3) = 0$$

$$t = 0$$

или

$$4t^2 + 6t + 3 = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$D = 36 - 3 \cdot 4 \cdot 4 < 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

решений нет.

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = -4: 4t^3 + 6t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t = -1$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = -3,5: 4t^3 + 6t^2 + 3t + 0,5 = 0$$

$$\text{или } t = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

т.к. p принимает значения от -4 до

10 , ~~$\cos x = -(p-3)$~~ $\Rightarrow$ функция

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

~~мысли~~

$$2(2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

пусть $\cos^2 x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12(t^2 + t + \frac{1}{4})$$

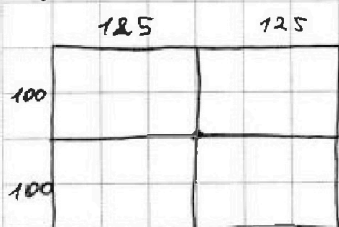


1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Дан прямоугольник $\Rightarrow$ его центр $\Rightarrow$ совпадает с точкой пересечения его "средних линий"

Заметим, что изображение, полученное с помощью центральной симметрии получено как двойное отражение (т.к. расстояние от центральной картинки до каждой точки центральной картинки до центра должно равняться расстоянию от центра до картинки, симметричной центру)

т.к. симметричным должно быть множество, а всего должно быть закрашено 8 клеток $\Rightarrow$ нужно найти варианты расположения 4 точек, т.к. оставшиеся 4 определяют однозначно набор из симметрии и т.к. "средние линии" проходят по линиям клеток $\Rightarrow$ ~~линии~~ (т.к. $250 : 2$ и $200 : 2$) $\Rightarrow$ клетки, между которыми проходила бы одна из средних линий и может быть.

Итак, способов задать множество, симметричное центра: $C_{250 \cdot 100}^4 = C_{25000}^4$

способов задать множество, симметричное вертикальной средней линии: $C_{100 \cdot 125}^4 = C_{12500}^4$

способов задать множество, симметричное горизонтальной средней линии: C_{15000}^4

и т.к. центральная симметрия — есть симметричное относительно обеих средних линий $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если намлись варианты, которые симметричны по 2 критериям, то они симметричны и

относительно 3. т.к. точек 8, а точек симметричных относительно всех 3 симметрий $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это равносильно способам задать 2 точки из



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

образованных средними линиями прямоугольников $\Rightarrow$ таких множеств: $C_{100 \cdot 125}^2 = C_{12500}^2$
т.к. "известные" симметрии симметричны сразу 3 симметриям $\Rightarrow$ такие случаи были посчитаны 3-мя способами
итак, способов закрасить 8 клеток так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы 1-й из ~~двух~~ симметрий:

$$\begin{aligned} 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 &= \cancel{125000} \cdot \cancel{24996} \cdot \cancel{24998} \cdot \cancel{24999} \\ &= \frac{3 \cdot 25000!}{4! \cdot \cancel{24996!}} - \frac{2 \cdot 12500!}{4! \cdot 12496!} \\ \text{Ответ: } &\frac{3 \cdot 25000!}{4! \cdot 24996!} - \frac{2 \cdot 12500!}{4! \cdot 12496!} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ a - b \neq 3 & (2) \\ (a - c)(b - c) = p^2, p - \text{простое} & (3) \\ a + b^2 = 560 & (4) \end{cases}$$

рассмотрим (3): $(a - c)(b - c) = p^2$, где p - простое

замечим, что раз p - простое и p^2 представлено в виде произведения двух чисел, то:

1 случай: $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p + c \\ b = p + c \end{cases}$, но $a > b$ ~~или~~ противоречие

2 случай: $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -p + c \\ b = -p + c \end{cases}$, но $a > b$ противоречие

3 случай: $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + c \\ b = p^2 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow b > a$ противоречие

4 случай: $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow a > b$

тогда, $a - b = p^2 + c - 1 - c = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$
следовательно:

$p + 1 \neq 3$

$p - 1 \neq 3 \Rightarrow p : 3 \Rightarrow p = 3$ (т.к. p - простое)

тогда, $a = 9 + c$; $b = 1 + c$

(4): $9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$

$c^2 + 3c + 10 - 560 = 0$

$c^2 + 3c - 550 = 0$

$D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209 = 47^2$

$\begin{cases} c = \frac{-3+47}{2} = 22 \Rightarrow a = 31; b = 23 \\ c = \frac{-3-47}{2} = -25 \Rightarrow a = -16; b = -24 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☒ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 случай: $\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \quad \text{т.к. } p^2 > 1 \Rightarrow a > b$

тогда, (2): $a - b = c - 1 - c + p^2 = p^2 - 1 =$

$= (p+1)(p-1)$

$\begin{matrix} p+1 \nmid 3 \\ p-1 \nmid 3 \end{matrix} \Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3 \text{ (т.к. } p \text{ - простое)}$

тогда, $\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases}$

(4): $c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 560$

$c^2 - 17c + 80 - 560 = 0$

$c^2 - 17c - 480 = 0$

$D = 17^2 + 4 \cdot 480 = 289 + 1920 = 2209 = 47^2$

$\begin{cases} c = \frac{17+47}{2} = 32 \Rightarrow a = 31; b = 23 \\ c = \frac{17-47}{2} = -15 \Rightarrow a = -16; b = -24 \end{cases}$

Ответ: $(a, b, c) = (31; 23; 22);$

$(a, b, c) = (-16; -24; -25);$

$(a, b, c) = (31; 23; 32);$

$(a, b, c) = (-16; -24; -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

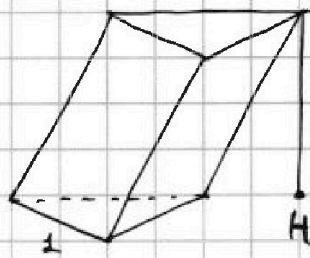
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

1 2 3 4 5 6 7
(+) + + (+) (+)

Score = 4; 4; 3



№ 1

31
x 31
31
93

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \frac{93}{961}$$

$$b_{13} = 5-x$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot q^{86}$$

$$q^{86} = \frac{(13x-35)(x+1)(x+1)^3}{(13x-35)} = (x+1)^8$$

найдем если $x = \frac{35}{13}$: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$
и добавим.

$$q^4 = x+1 \Rightarrow q^2 = \sqrt{x+1} \quad (1. \text{ так } -\sqrt{x+1} < 0)$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot (x+1)^2 (x+1)}$$

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$25-10x+x^2 = 13x-35$$

$$x^2-23x+60=0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 299$$

$$\begin{array}{r} 250 \\ \times 4 \\ \hline 100 \\ 200 \\ \hline 1000 \end{array}$$

$$3 > \frac{35}{13}$$

$$39 > 35$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 3 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$b_{15} - b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 529 \\ -240 \\ \hline 289 \\ \times 17 \\ \hline 4913 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 460 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$(x+1)^8$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 60 \\ \hline 2400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ + 460 \\ \hline 529 \end{array}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos x + 3 \cos 2x + 3 \cos x = p$$

$$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 \cdot 2 \cdot \cos x \cos x = p$$

$$2 \cdot \cos x (\cos^2 x - 1 + 1) + 3(\cos^2 x - 1) + 3 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x - 3 + 3 \cos x - p = 0.$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x - (p + 3) = 0.$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

или

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$x = \frac{x+y + x-y}{2}$$

$$y = \frac{x+y - x-y}{2}$$

№6 a, b, c ∈ Z

$$a > b$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$\frac{200}{250} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 560 \\ 380 \\ \hline 1920 \end{array}$$

100

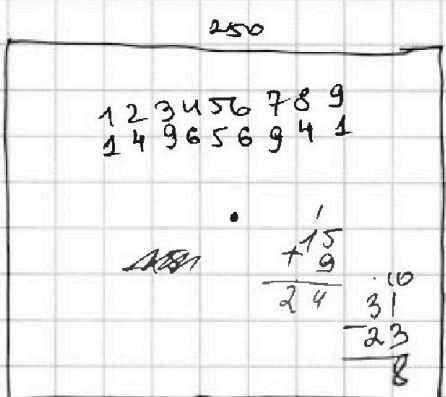
1000

$$-135 - 35 < 0$$

$$-5 + 1 = -4$$

$$\begin{array}{r} 1920 \\ \times 289 \\ \hline 2209 \end{array}$$

200

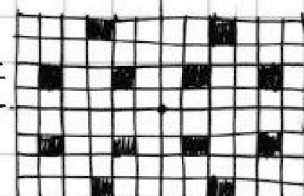


1) отрицательно значения.

$$\begin{array}{r} 47 \\ -17 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ +47 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 25 \\ -9 \\ \hline 16 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ +29 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ +3 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 81 \\ \hline 16 \\ 25 \\ \hline 250 \\ -25 \\ \hline 5 \\ -5 \\ \hline 10 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2209 \\ \times 42 \\ \hline 44 \\ 43 \\ \hline 329 \\ +168 \\ \hline 2209 \\ -16 \\ \hline 47 \\ -3 \\ \hline 44 \end{array}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№65

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p.$$

$$\cos 3x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2 \cos 2x + \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 5 \cos x = p$$

$$\cos x = t \quad (t \in [-1; 1]) \Rightarrow$$

$$2(2t^2 - 1)t + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p.$$

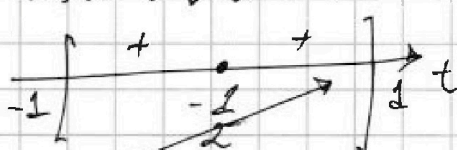
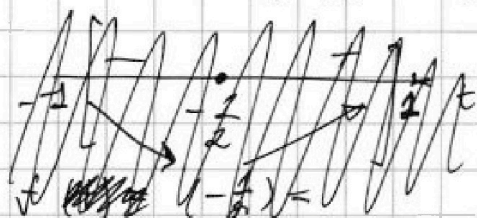
$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$\Delta = 144 - 3 \cdot 12 \cdot 4 = 12^2 - 12^2 = 0.$$

$$t = \frac{-12}{2 \cdot 12} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 &= \\ &= 12\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) = \\ &= 12t^2 + 12t + 3 \end{aligned}$$



$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4.$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \Rightarrow p \in [-4; 10].$$

cos 3x

cos 2x

$$p = 3: t(4t^2 + 6t + 3)$$

$$36 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0.$$

$$\cos x = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b \geq 0$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a - b - 2ab = -5$$

$$2a - 2b + 10 = 4ab$$

$$\begin{aligned} a+b &\geq \sqrt{ab} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ (a+b)^2 &\geq 4ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \\ a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ a^2 + b^2 &\geq a - b + 5 \end{aligned}$$

$$x+3=a$$

$$x=a-3$$

$$4-x=4-a+3=7-a$$

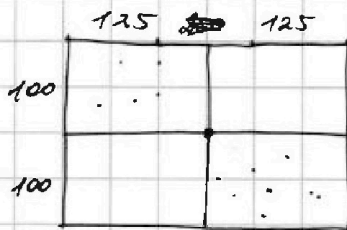
$$\begin{array}{r|l} x+3 & 4-x \\ \hline a & \end{array}$$

$$a - x + 3 = 4 - x - a$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{4-a} + 5 \in 2\sqrt{a(7-a)}$$

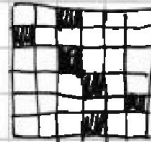


Для центральной симметрии:
выбираются 4 ~~клетки~~ из $250 \cdot 100$,
остальное и выбираются
однозначно.

Для верт. симметрии: 4 клетки из $125 \cdot 200 = 250 \cdot 100$

остальное — однозначно

Для гориз. симметрии: 4 клетки



Заметим, что если существуют ~~и~~ совместно
любые 2 из симметрий, то какие
существует 4, 3 $\Rightarrow$ общие симметрии
исчислять 3 раза: для всех симметрий:
итого: $C_{25000}^4 + C_{25000}^3 + C_{25000}^2 = 2 \cdot 2$ клетки из $125 \cdot 100$
остальное — однознач.
Итак: $3 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$

$$\frac{25000!}{4! \cdot (25000-4)!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} \quad (1)$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \quad (2)$$

(2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$
 раскроем модули:

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$

тогда, $y+1 + 3y-36 = \sqrt{169-z^2}$
 $4y-35 = \sqrt{169-z^2}$ ОДЗ: $169-z^2 \geq 0$

так как $z^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 169-z^2 \leq 169$
 $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

а $y \geq 12$
 $4y \geq 48$

$4y-35 \geq 13 \Rightarrow$ правая часть уравнения

~~меньше 13, а левая - не боль~~

меньше или равна 13, а левая - больше или равна

13 $\Rightarrow$ равенство достигается только при

$$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y-35 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$$

подставим полученные значения в (1):

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 12+x-x^2 \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

$$x+3 + 10\sqrt{x+3} + 25 = 2(12+x-x^2) + 4-x + 4\sqrt{(4-x)(12+x-x^2)}$$

$$(x+3)(4-x) = 4x - x^2 + 12 - 3x = -x^2 + x + 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

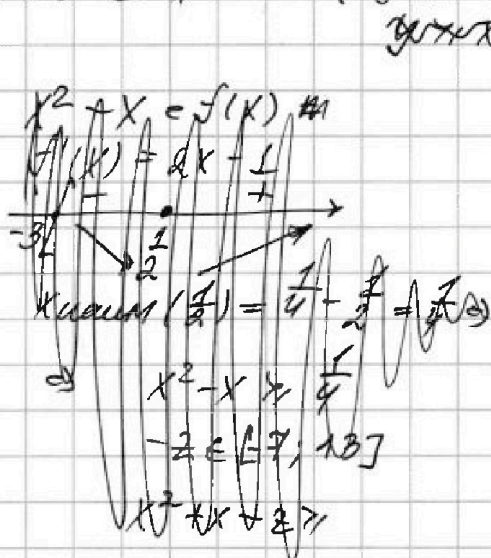
№ 2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x-x^2+z \geq 0 \\ 169-z^2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -3 \\ 4-z \geq x \geq -3 \Rightarrow z \leq 7 \\ z^2 \leq 169 \Rightarrow z \in [-13; 13] \\ y+x-x^2+z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z \in [-13; 7]$$



$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{13} \\ & \frac{-48}{13} \\ & \frac{13}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{13} - \frac{12}{13} + \\ & \frac{1}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$$

$$y+1+3y-36 = 4y-35$$

$$4y \geq 48$$

$$4y-35 \geq 13, \text{ при этом}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$\text{тогда, } 4y-35 = 13 \quad y = 12$$

$$z = 0. \quad z = 0.$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

1) $x = -3: 5 = \sqrt{4+3} + \sqrt{4-(-3)}$

$$5 = \sqrt{7} + \sqrt{7}$$

$$x = 4: \sqrt{7} + 5 = 0 + 0$$

$$\sqrt{7} + 5 \neq 0$$

решений нет.

ОДЗ:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 12 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$



$$x = -3$$

$$x = 4$$

$$\begin{aligned} & \frac{37}{19} \\ & \frac{24}{19} \\ & \frac{13}{19} \end{aligned}$$

2) $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases}$

$$y \in [-1; 12]$$

$$-1 \leq y \leq 12$$

$$-24 \leq -2y \leq 2 \Rightarrow 13 \leq -2y + 37 \leq 39$$

$$y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$-2y+37 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

