МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\dfrac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-\sqrt{4-x-z}+5=2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x+3\cos 2x+6\cos x=p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3:10$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a>b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a+b^2=560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

b_n – геом. прогрессия

ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ \frac{13x-35}{(x+1)^3} \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 \cdot q^6$

$b_{13} = 5 - x = b_1 \cdot q^{12}$

$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8 = b_7 \cdot q^8$

тогда: $b_{15} = b_7 \cdot q^8$

$$\underset{0}{\sqrt{(13x-35)(x+1)}} = \underset{0}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} \cdot q^8 \quad \sqrt{\ }$$

$$(13x-35)(x+1) = \frac{(13x-35)}{(x+1)^3} \cdot q^{16}$$

1) если $x = \frac{35}{13}$, тогда: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$.

такого не бывает, т.к. $b_{13} = b_7 \cdot q^6$

$5 = 0 \cdot q^6$

решений нет.

2) если $x \neq \frac{35}{13}$, тогда: $(x+1) = \frac{1}{(x+1)^3} \cdot q^{16} \mid \cdot (x+1)^3 \neq 0$.

$(x+1)^4 = q^{16}$

$q^2 = \sqrt{|x+1|}$

~~если $x+1$, тогда q^4 равно отрицательному числу тогда такого не бывает~~

~~тогда,~~

тогда, $b_{15} = b_{13} \cdot q^2$

$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x)\sqrt{|x+1|}$

если $x+1 > 0$, тогда $13x - 35 > 0$

$x > -1$ $\quad x > \frac{35}{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x > \frac{35}{13}$

$-x < -\frac{35}{13}$

$0 < 5 - x < 5 - \frac{35}{13}$

$(13x-35)\cancel{(x+1)} = (5-x)^2\cancel{(x+1)}$

$13x - 35 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 23x + 60 = 0.$

$D = 23^2 - 4\cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{23+17}{2} = 20 > \frac{35}{13} \quad ✓ \\ x = \frac{23-17}{2} = 3 > \frac{35}{13} \quad ✓ \end{array}\right.$

если $x+1 < 0$, то $13x - 35 < 0$

$x < -1$ $\qquad x < \frac{35}{13}$

$\Downarrow$

$x < -1$

$-x > 1$

$5 - x > 6$

тогда, $(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(-x+1) \quad | : (-x+1) \neq 0$

$-13x + 35 = 25 - 10x + x^2$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$D = 9 + 40 = 49$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-3+7}{2} = 2 > -1 \text{ — не удовл. условию} \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 < -1 \quad ✓ \end{array}\right.$

итак, $x = 3, x = 20, x = -5.$

Ответ: $x = -5; x = 3; x = 20.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

рассмотрим (2): $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$

раскроем модули:

1 модуль: $-$ -1 $+$ 12 $+$

2 модуль: $-$ -1 $-$ 12 $+$

1 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y \geq 12$.

тогда, $y+1+3y-36 = \sqrt{169-z^2}$

$4y-35 = \sqrt{169-z^2}$

ОДЗ: $169-z^2 \geq 0$

так как $z^2 \geq 0$

$-z^2 \leq 0$

$0 \leq 169-z^2 \leq 169$

$0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$

но, $y \geq 12$

$4y \geq 48$

$4y-35 \geq 13$

получается, что левая часть больше или равна 13, а правая — меньше или равна 13. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенство достигается только при:

$\begin{cases} \sqrt{169-z^2} = 13 \\ 4y-35 = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ y = 12 \end{cases}$

2 случай: $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $-1 \leq y \leq 12$

тогда, $y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$

$-2y+37 = \sqrt{169-z^2}$

т.к $0 \leq \sqrt{169-z^2} \leq 13$ (ранее доказано)

а $-1 \leq y \leq 12$

$-12 \leq -y \leq 1$

$-24 \leq -2y \leq 2$

$13 \leq -2y+37 \leq 39$

получается, что левая часть ≥ 13, а правая ≤ 13 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ равенство достигается только при:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} \sqrt{169-z^2}=13 \\ -2y+37=13 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$ (такие получаем в 1 случае)

3 случай: $\begin{cases} y+1\le 0 \\ y-12\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y\le -1 \\ y\le 12 \end{cases} \Rightarrow y\le -1.$

~~тогда, $0\le\sqrt{169-z^2}\le 13$ (ранее~~

тогда, $-y-1-3y+36=\sqrt{169-z^2}$

$-4y+35=\sqrt{169-z^2}$

т.к $0\le\sqrt{169-z^2}\le 13$ (ранее доказано)

а $y\le -1$

$-y\ge 1$

$-4y\ge 4$

$-4y+35\ge 39$

получается, что левая часть больше или равна 39, а правая часть меньше или равна 13. тогда, решений нет.

Итак, единственное решение (2) – $z=0$, $y=12$.

подставим его в (1):

$\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x}+5=2\sqrt{12+x-x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$

$2\cdot\cos 2x\cdot\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$

~~пусть $\cos x = t$ ($t\in[-1;1]$), тогда:~~

$2(2\cos^2 x - 1)\cdot\cos x + 3(2\cdot\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$

пусть $\cos x = t$ ($t\in[-1;1]$), тогда:

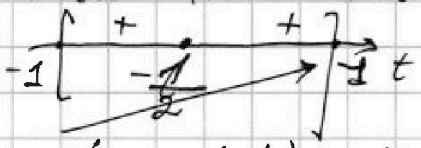
$2(2t^2-1)\cdot t + 6t^2 - 3 + 5t = p$

$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12(t^2 + t + \frac{1}{4}) = 12(t + \frac{1}{2})^2$



$f_{наиб}(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$

$f_{наим}(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4.$

$f(-\frac{1}{2}) = -4\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3,5$

итак, $-4 \le 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \le 10$

$-4 \le p \le 10$

причём, при любом значении $p\in[-4;10]$ t будет иметь ровно один корень (т.к $f(t)$ – монотонно возрастающая функция)

при $p = -3$: $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = -3$

$t(4t^2 + 6t + 3) = 0$

$t = 0$ или $4t^2 + 6t + 3 = 0$

$\cos x = 0$ $D = 36 - 3\cdot4\cdot4 < 0.$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ решений нет.

$n\in\mathbb{Z}$

при $p = -4$: $4t^3 + 6t^2 + 3t + 1 = 0$

$t = -1$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

при $p = -3,5$: $4t^3 + 6t^2 + 3t + 0,5 = 0.$

$t = -\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

т.к p принимает значения от -4 до 10, ~~то $\cos x = -(p-3)$~~ $\Rightarrow$ функция

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$

$2\cos 2x \cdot \cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$

~~пусть~~

$2(2\cos^2 x - 1)\cdot\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$

пусть $\cos x = t$ ($t \in [-1; 1]$), тогда:

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$

рассмотрим $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12(t^2 + t + \frac{1}{4})$

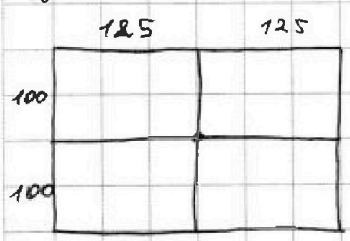
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



Дан прямоугольник => его центр совпадает с точкой пересечения его "средних линий"

Заметим, что изображение, полученное с помощью центральной симметрии получено как двойное отзеркаливание (т.к расстояние от ~~начальной картинки~~ ~~должно~~ каждой точки начальной картинки до центра должно равняться расстоянию от центра до картинки, симметричной центру)

т.к симметричным должно быть множество, а всего должно быть закрашено 8 клеток => нужно найти варианты расположения 4 точек, т.к остальные определяются однозначно исходя из симметрии

и т.к "средние линии" проходят по линиям клеток ~~=> опуск~~ (т.к 250 ⋮ 2 и 200 ⋮ 2) => клетки, между которыми проходила бы одна из средних линий не может быть.

итак, способов задать множество, симметричное центра: $C^4_{250\cdot100} = C^4_{25000}$

способов задать множество, симметричное вертикальной средней линии: $C^4_{200\cdot125} = C^4_{25000}$

способов задать множество, симметричное горизонтальной средней линии: C^4_{25000}

и т.к центральная симметрия — есть симметричное относительно обоих средних линий =>

=> если нашлись варианты, которые симметричны по 2 критериям, то они симметричны и относительно 3 т.к точек 8, а точки симметричны относительно всех 3 симметрий =>

=> это равносильно способам задать 2 точки из

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

образовавшихся средними линиями прямоугольниках => таких множеств: $C^2_{100\cdot 125} = C^2_{12500}$

т.к "совместные" симметрии симметричны сразу 3 симметриям -> такие случаи были посчитаны ~~3~~ трижды

итак, способов закрасить в клеток так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы 1-й из ~~двух~~ симметрий:

$$3\cdot C^4_{25000} - 2\cdot C^2_{12500} = \cancel{3\cdot 25000\cdot 24999\cdot 24998}$$

$$= \frac{3\cdot 25000!}{4!\cdot \cancel{250}\, 24996!} - \frac{2\cdot 12500!}{4!\cdot 12496!}$$

Ответ: $\frac{3\cdot 25000!}{4!\cdot 24996!} - \frac{2\cdot 12500!}{4!\cdot 12496!}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ a - b \not\vdots 3 & (2) \\ (a-c)(b-c) = p^2, \ p - \text{простое} & (3) \\ a + b^2 = 560. & (4) \end{cases}$$

рассмотрим (3): $(a-c)(b-c) = p^2$, где p - простое

заметим, что раз p - простое и p^2 представимо в виде произведения двух чисел, то:

1 случай: $\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases}$ $\begin{cases} a = p + c \\ b = p + c \end{cases}$, но $a > b$. противоречие

2 случай: $\begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases}$ $\begin{cases} a = -p + c \\ b = -p + c \end{cases}$, но $a > b$ противоречие

3 случай: $\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 + c \\ b = p^2 + c \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow b > a$ противоречие

4 случай: $\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c. \end{cases}$ $p^2 > 1 \Rightarrow a > b$

тогда, (2): $a - b = p^2 + \cancel{c} - 1 - \cancel{c} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$

следовательно:

$p + 1 \not\vdots 3$

$p - 1 \not\vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow p = 3$ (т.к p - простое)

тогда, $a = 9 + c$; $b = 1 + c$

(4): $9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$

$c^2 + 3c + 10 - 560 = 0$

$c^2 + 3c - 550 = 0.$

$D = 9 + 4 \cdot 550 = 2209 = 47^2$

$\left[\begin{array}{l} c = \frac{-3+47}{2} = 22 \Rightarrow a = 31;\ b = 23 \\ c = \frac{-3-47}{2} = -25 \Rightarrow a = -16;\ b = -24 \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5 случай: $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases}$ т.к $p^2>1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a>b$

тогда, (2): $a-b=\cancel{c}-1-\cancel{c}+p^2=p^2-1=$

$=(p+1)(p-1)$

$\begin{matrix} p+1 \not\vdots 3 \\ p-1 \not\vdots 3 \end{matrix} \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow p=3$ (т.к p - простое)

тогда, $a=c-1$

$b=c-9$

(4): $c-1+c^2-18c+81=560$

$c^2-17c+80-560=0$

$c^2-17c-480=0$

$D=17^2+480\cdot 4=289+1920=2209=47^2$

$\left[\begin{array}{l} c=\frac{17+47}{2}=32 \Rightarrow a=31;\ b=23 \\ c=\frac{17-47}{2}=-15 \Rightarrow a=-16;\ b=-24 \end{array}\right.$

Ответ: $(a,b,c)=(31;23;22)$;

$(a,b,c)=(-16;-24;-25)$;

$(a,b,c)=(31;23;32)$;

$(a,b,c)=(-16;-24;-15)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

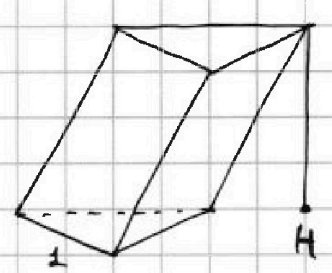
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 7 1 2 3 4 5 6 7

(+) + ± (+) (+)

$S_{бок} = 4; 4; 3$



Итого:

1 2 3 4 5 6 7

± ± ±

$3 > \frac{35}{13}$

$39 > 35$

№ 1

$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^6 = b_7 \cdot q^6$

$5 - x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^6$

$b_{13} = 5 - x$

$b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8$

$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot q^8$

$(13x-35)(x+1) = \frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot q^{16}$

$q^{16} = \frac{(13x-35)(x+1)(x+1)^3}{(13x-35)} = (x+1)^4$

отдельно если $x = \frac{35}{13}$: $b_7 = 0$; $b_{13} = 5$; $b_{15} = 0$ не бывает.

$q^4 = x+1 \Rightarrow q^2 = \sqrt{x+1}$ (т.к. $-\sqrt{x+1} < 0$),

$5 - x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1}$

$5 - x = \sqrt{\frac{13x-35 \cdot (x+1)^2 (x+1)}{(x+1)^3}}$

$5 - x = \sqrt{13x - 35}$

$25 - 10x + x^2 = 13x - 35$

$x^2 - 23x + 60 = 0$

$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 299$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$

$2\cdot\cos 2x * \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$

$2\cos 2x\cdot\cos x + 2\cos x + 3\cos 2x + 3\cos x = p$

$2\cos x(\cos 2x + 1) + 3\cdot 2\cdot\cos^2\frac{x}{2} = p$

$2\cdot\cos x(2\cos^2 x - 1 + 1) + 3(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x = p$

$4\cdot\cos^3 x + 6\cos^2 x - 3 + 3\cos x - p = 0.$

$4\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x - (p+3) = 0.$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\begin{cases}\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y\end{cases}$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$

$x = \frac{x+y+x-y}{2}$

$y = \frac{x+y-x+y}{2}$

№6 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a > b$

$a - b \not\vdots 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$a + b^2 = 560.$

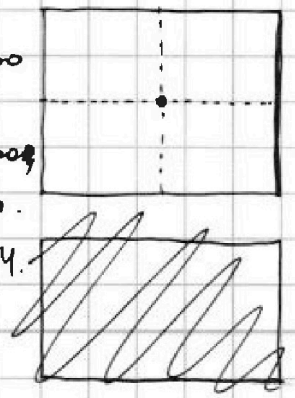
$1920 \times 289 = 2209$

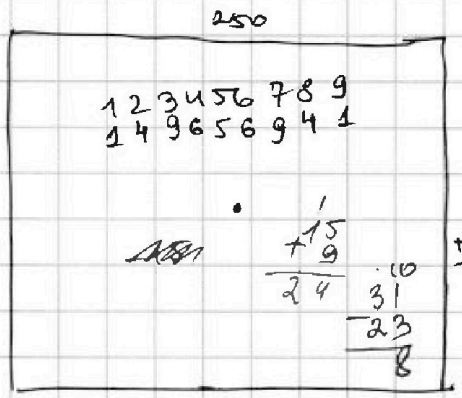
$\frac{200}{250} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$

$560 - 80 = 480$, $480 \times 4 = 1920$

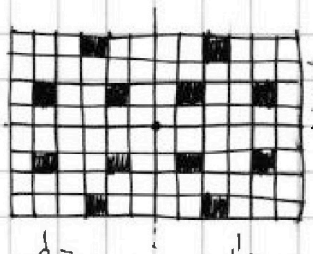
$-135 - 35 < 0.$

$-5 + 1 = -4.$





1) относительно центра.



$47 - 17 = 30$, $47 + 17 = 64$, $25 - 9 = 16$, $25 + 9 = 34$, $47 + 3 = 50$

$1 2 3 4 5 4 4$

$2209 = 47 \times 47$

$47 - 3 = 44$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$

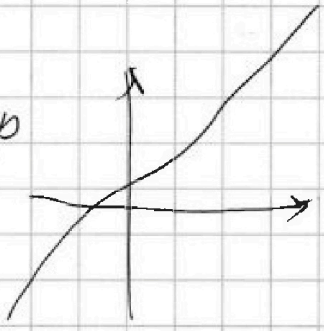
$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$

$2\cos 2x + \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$

$2(2\cos^2 x - 1)\cdot\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x = p$

$\cos x = t \ (t \in [-1; 1]) \Rightarrow$

$2(2t^2 - 1)\cdot t + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$



$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p.$

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$

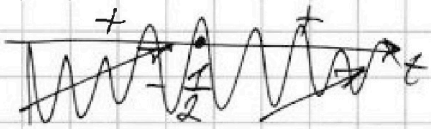
$D = 144 - 3\cdot 12\cdot 4 = 12^2 - 12^2 = 0.$

$t = \frac{-12}{2\cdot 12} = -\frac{1}{2}$

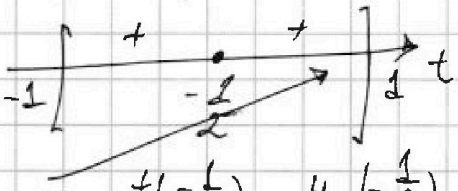
$12(t + \frac{1}{2})^2 =$

$= 12(t^2 + t + \frac{1}{4}) =$

$= 12t^2 + 12t + 3$



$\Rightarrow f(t)$ - возр.



$f(-\frac{1}{2}) = 4\cdot(-\frac{1}{8}) + 6\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot(-\frac{1}{2}) - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 =$

$= -3{,}5$

$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4.$

$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \Rightarrow p \in [-4; 10].$

$p = 3: \quad t(4t^2 + 6t + 3)$

$36 - 4\cdot 3\cdot 4 < 0.$

$\cos x = 0.$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{\underbrace{x+3}_{a}} - \sqrt{\underbrace{4-x}_{b}} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$

$4-x=a$

$x=a+4$

$x+3=a+4+3=a+7.$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab}$

$\sqrt{a} + 5 = 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}$

$a + 10\sqrt{a} + 25 = 4ab + 4b\sqrt{a} + b$

$\sqrt{a+7} - \sqrt{a} + 5 = 2\sqrt{a(a+7)}$

$\sqrt{a+7} + 5 = 2\sqrt{a(a+7)} + \sqrt{a}$

$a + 7 + 10\sqrt{a+7} + 25 = 4(a+7)\cdot a + a + 4\cdot a\cdot\sqrt{a+7}$

$+ 32 + 10\sqrt{a+7} = 4a^2 + 28a + a + 4a\sqrt{a+7}$

$(10-4a)\sqrt{a+7} = 4a^2 + 28a - 32$

$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2a^2 + 14a - 16$

$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2(a^2+7a-8)$

$(7-2a)\sqrt{a+7} = 2(a-1)(a+8)$

$(7-2a)^2(a+7) = 4(a-1)^2(a+8)^2$

$f(a) = (7-2a)^2\cdot(a+7)$

$f'(a) = 2(7-2a)\cdot(-2)(a+7) + (7-2a)^2 =$

$= -2(7-2a)(a+7) + (7-2a)^2 = \cancel{(7-2a)(7-2a-4a-28)} =$

$\cancel{= (7-2a)(-6a-21)} = (7-2a)(7-2a-4(a+7))$

$= (7-2a)(-6a-21) = (7-2a)\cdot(-3)\cdot(2a+7)$

$-\frac{7}{2}$ $\quad$ $\frac{7}{2}$

$a =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a, b \geq 0$

~~$a - b + 5 = 2ab$~~

~~$a - b - 2ab = 5$.~~

~~$2a - 2b + 10 = 4ab$~~

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$(a+b)^2 \geq 4ab$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$

$a^2 + b^2 \geq a - b + 5$.

$x + 3 = a$

$x = a - 3$

$4 - x = 4 - a + 3 = 7 - a$.

$x + 3 \quad | \quad 4 - x$

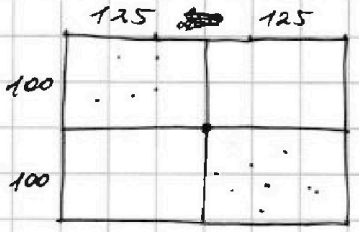
a

$\sqrt{a} - \sqrt{7-a} + 5 = 2\sqrt{a(7-a)}$

$a - x + 3 = 4 - x - a$.

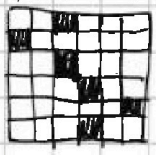
$2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$



Для центральной симметрии: выбираются 4 клетки из $250 \cdot 100$, остальные 4 выбираются однозначно.

Для верт. симметрии: 4 клетки из $125 \cdot 200 = 250 \cdot 100$



остальные — однозначно

Для гориз. также.

заметим, что если существует совместно любые 2 из симметрий то также существует и 3 => общие симметрии посчитаны 3 раза: для всех симметрий: 2 клетки из $125 \cdot 100$ остальные — однозначно.

~~итак: $C^4_{25000} + C^4_{25000} + C^4_{25000} - 2$.~~

итак: $\boxed{3 \cdot C^4_{25000} - 2C^2_{12500}}$

$\frac{25000!}{4! \cdot (25000-4)!}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-\sqrt{4-x-z}+5=2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2): $|y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2}$

раскроем модули:

1 случай: $\begin{cases} y+1\geq 0 \\ y-12\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y\geq -1 \\ y\geq 12 \end{cases}$ $\Rightarrow y\geq 12$.

тогда, $y+1+3y-36=\sqrt{169-z^2}$

$4y-35=\sqrt{169-z^2}$

ОДЗ: $169-z^2\geq 0$

так как ~~$z^2\geq 0 \Rightarrow 0\leq 169-z^2\leq$~~

$z^2\geq 0 \Rightarrow$ $0\leq 169-z^2\leq 169$

$0\leq\sqrt{169-z^2}\leq 13$

а $y\geq 12$

$4y\geq 48$

$4y-35\geq 13 \Rightarrow$ правая часть уравнения ~~меньше 13, а левая — не боль или равн~~

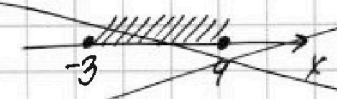
меньше или равна 13, а левая — больше или равна 13 $\Rightarrow$ равенство достигается только при

$\begin{cases} \sqrt{169-z^2}=13 \\ 4y-35=13 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ y=12 \end{cases}$

~~подставим полученные значения в (1):~~

~~$\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x}+5=2\sqrt{12+x-x^2}$~~

~~ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ 12+x-x^2\geq 0 \end{cases}$~~



~~$\sqrt{x+3}+5=2\sqrt{12+x-x^2}+\sqrt{4-x}$~~

~~$x+3+10\sqrt{x+3}+25=4(12+x-x^2)+4-x+4\sqrt{(4-x)(12+x-x^2)}$~~

$(x+3)(4-x)=4x-x^2+12-3x=-x^2+x+12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-z \geq 0 \\ y+x-x^2+z \geq 0 \\ 169-z^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ 4-z \geq x \geq -3 \Rightarrow z \leq 7 \\ z^2 \leq 169 \Rightarrow z \in [-13; 13] \\ y+x-x^2+z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z \in [-13; 7]$$

$\cancel{y+x-x^2-z}$

$-\ \ -1\ \ -\ \ 12\ \ +$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 4 \\ \hline 48 \\ -35 \\ \hline 13 \end{array}$$

$x^2 + x = f(x)$

$f'(x) = 2x + 1$

$-\ \ -\frac{1}{2}\ \ +$

$-3 \quad -\frac{1}{2}$

$\min\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x \geq \frac{1}{4}$

$-z \in [-7; 13]$

$x^2 + x + z \geq$

1) $\begin{cases} y+1 \geq 0 \\ y-12 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \end{cases} \Rightarrow y \geq 12$

$y+1+3y-36 = 4y-35$

$4y \geq 48$

$4y-35 \geq 13$, при этом

$\sqrt{169-z^2} \leq 13$

тогда, $4y-35 = 13$ $\quad y = 12$

$z = 0.$ $\quad z = 0.$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$

$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} + \sqrt{4-x}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} -x^2+x+12 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-12 \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$-3 \quad 4$

$x = -3$

$x = 4$

$16 - 4 - 12$

$$\begin{array}{r} -37 \\ -24 \\ \hline 13 \end{array}$$

1) $x = -3$: $5 = \cancel{\ldots} + \sqrt{4+3}$

$5 \neq \sqrt{7}$

$x = 4$: $\sqrt{7} + 5 = 0 + 0$

$\sqrt{7} + 5 \neq 0$

решений нет.

2) $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 12 \end{cases}$ $\quad y \in [-1; 12]$

$-1 \leq y \leq 12$

$-24 \leq -2y \leq 2 \Rightarrow 13 \leq -2y+37 \leq 39$

$y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$

$-2y+37 = \sqrt{169-z^2} \leq 13$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} -2y+37=13 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=24 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=12 \\ z=0. \end{cases}$ реш. рассмотрим.

3) $\begin{cases} y \le -1 \\ y \le 12 \end{cases} \Rightarrow y \le -1.$

$-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$

$-4y+35 = \sqrt{169-z^2}$

$y \le -1.$

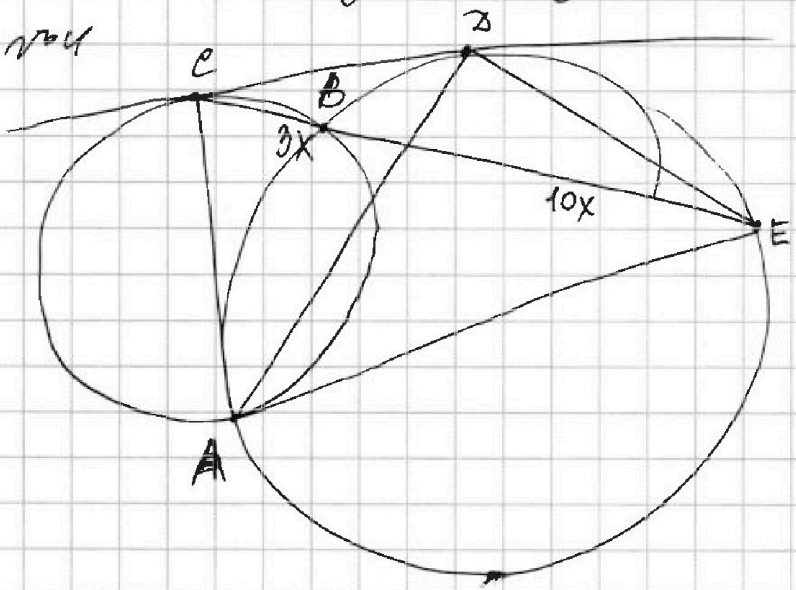
$-y \ge 1$

$-4y \ge 4$

$-4y+35 \ge 39$

итак, $\sqrt{169-z^2} \le 13$
$-4y+35 \ge 39$ решений нет.

№4



$\frac{ED}{CD}$ - ?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!