МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5}-\sqrt{1-x-4z}+4=2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4|+4|y-5|=\sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$p\cos 3x+3(p+4)\cos x=6\cos 2x+10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2:5$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

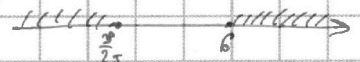
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a_7 = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$ $\quad (25x-9)(x-6) \geq 0$ $\quad x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup [6; +\infty)$.



$a_{15} = \sqrt{\left(\frac{25x-9}{x-6}\right)^3}$ $\quad x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$

Таким образом, $x \in (-\infty; \frac{9}{25}] \cup (6; +\infty)$.

Рассмотрим $x = \frac{9}{25}$: $a_7 = 0$, $a_{15} = 0$; $a_9 = \frac{9}{25} + 3 \neq 0$. Такого быть не может. $x \neq \frac{9}{25}$ (или все равны в геом. прогрессии, или ничто не равно нулю).

$x \in (-\infty; \frac{9}{25}) \cup (6; +\infty)$

Пусть $a_n = b q^{n-1}$, где b - первый член прогрессии, q - знаменатель

тогда $\frac{a_9}{a_7} = q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$ $\quad x+3 = q^2\sqrt{(25x-9)(x-6)} \geq 0$; $x \geq -3$.

$\frac{a_{15}}{a_7} = q^8 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^4}} = \frac{1}{|x-6|^2} = \frac{1}{(x-6)^2}$

$q^4 = \pm\frac{1}{|x-6|}$, но $q^4 > 0$, поэтому $q^4 = \frac{1}{|x-6|}$, $q = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{|x-6|}}$.

$\frac{a_9}{a_7} = q^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$, $\quad q^4 = \frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)} = \frac{1}{|x-6|}$.

Рассмотрим 2 случая: $x > 6$ и $x < 6$:

$x > 6$:

$(x+3)^2 = 25x-9$; $\quad x^2 - 19x + 18 = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 18 \\ x = 1 \end{array}\right.$ т.к. $x > 6$, то подходит только 18.

$x < 6$:

$(x+3)^2 = -(25x-9)$; $\quad x^2 + 31x = 0$ $\quad \begin{array}{l} x = -31 \\ x = 0 \end{array}$ т.к. $x \geq -3$, то подходит только 0.

Значит, $\left[\begin{array}{l} x = 18, \\ x = 0. \end{array}\right.$ только эти значения могут быть. Пример на $x = 18$:

$a_7 = \sqrt{441 \cdot 12} = 42\sqrt{3}$

$a_9 = 21$

$a_{15} = \frac{21}{24\sqrt{3}}$. Этому удовлетворяет $q = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ и $b = a_7 \cdot \frac{1}{q^6}$.

$x = 0$:

$a_7 = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$ $\quad$ Этому удовлетворяет $q = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$ и $b = \frac{a_7}{q^6}$.

$a_9 = 3$

$a_{15} = \sqrt{\frac{9}{6^3}} = \frac{3}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Ответ: $x = 18$, $x = 0$

$\begin{cases} \sqrt{x+5}-\sqrt{1-x-4z}+4=2\sqrt{y-4x-y^2+z}, \\ |y+4|+4|y-5|=\sqrt{81-z^2}; \end{cases}$ Найдём минимальное значение $|y+4|+4|y+5|$.

Рассмотрим 3 промежутка: $y\in(-\infty;-4]$; $y\in[-4;5]\cup y\in[5;+\infty)$

$y\in(-\infty;-4]$:

$|y+4|+4|y-5|=-y-4-4y+20=16-5y$. ~~...~~ С ростом y значение убывает, поэтому минимум в крайней точке $y=-4$; $min=16-5(-4)=36$.

$y\in[-4;5]$

$|y+4|+4|y-5|=y+4-4y+20=24-3y$. С ростом y значение убывает, поэтому $y=5$; $min=$ ~~...~~ $24-3\cdot5=9$.

$y\in[5;+\infty)$

$|y+4|+4|y-5|=y+4+4y-20=5y-16$. С ростом значение возрастает, поэтому $y=5$, $min=5\cdot5-16=9$.

Таким образом, $|y+4|+4|y-5|\geq9$, и минимальное значение в $y=5$. С другой стороны $\sqrt{81-z^2}\leq9$ т.к. $z^2\geq0$, и максимальное значение в $z=0$. Только тогда мы имеем равенство. Значит, $y=5$; $z=0$. Подставим эти значения в первое уравнение:

$\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x}+4=2\sqrt{5-4x^2-x^2}=2\sqrt{(1-x)(x+5)}$ $\quad x+5\geq0$, $1-x\geq0$ $\quad x\in[-5;1]$

~~...~~ ~~...~~ Пусть $\sqrt{x+5}=A$; $\sqrt{1-x}=B$; $A\geq0$, $B\geq0$. Тогда $A-B+4=2AB$ и $A^2+B^2=x+5+1-x=6$.

$\begin{cases} A-B+4=2AB \\ A^2+B^2=6; \end{cases}$ $\quad A^2+B^2-2AB=6-(A-B+4)$ $\quad (A-B)^2=6-(A-B)-4$.

$(A-B)^2+(A-B)-2=0$.

Откуда $A-B=1$, $A-B=-2$;

подставим эти значения в первое уравнение:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A=B+1, \\ 1+4=2B(B+1) \end{cases}; \\ \begin{cases} A=B-2 \\ -2+4=2B(B-2) \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A=B+1 \\ 2B^2+2B-5=0 \end{cases} \\ \begin{cases} A=B-2 \\ 2B^2-4B-2=0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A=B+1, \\ B=\frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} A=B-2, \\ B=1\pm\sqrt{2}; \end{cases} \end{array}\right.$ ~~$A=\frac{1+\sqrt{11}}{2}$; $x=A^2-5$~~

$A,B\geq0$, поэтому $B=\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$; $A=\frac{1+\sqrt{11}}{2}$

$B=1+\sqrt{2}$; $A=\sqrt{2}-1$

$x=A^2-5=\left(\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)^2-5=\frac{1+11+2\sqrt{11}}{4}-5=\frac{\sqrt{11}+6}{2}-5=\frac{\sqrt{11}-4}{2}$

$x=(\sqrt{2}-1)^2-5=3-2\sqrt{2}-5=-2-2\sqrt{2}$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{11}}{2}-2,\ y=5;\ z=0 \\ x=-2\sqrt{2}-2;\ y=5;\ z=0. \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p\cos 3x + 3(p+4)\cos x = 6\cos 2x + 10.$

$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3(p+4)\cos x = 12\cos^2 x - 6 + 10$

$p\cos^3 x - 12\cos^2 x + 12\cos x - 4 = 0$

$p\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0.$

~~Рассмотрим~~ $(p-1)\cos^3 x + \cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

$(p-1)\cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0.$

$(1-p)\cos^3 x = (\cos x - 1)^3.$

$(1-p) = \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right)^3$

$1 - \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p}$

$\cos x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}$ т.к. $-1 \le \cos x \le 1.$

Делаем замену $t = \sqrt[3]{1-p}$ и выразим t

$\begin{cases} \frac{1}{1-t} \ge -1, \\ \frac{1}{1-t} \le 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{1+1-t}{1-t} \ge 0, & \frac{2-t}{1-t} \ge 0 \\ \frac{1-1+t}{1-t} \le 0; & \frac{t}{1-t} \le 0 \end{cases}$

$+ \quad 1 \quad - \quad 2 \quad +$

$- \quad 0 \quad + \quad 1 \quad -$

Таким образом $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t \ge 2; \end{array}\right.$

Производим обратную замену:

$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{1-p} = 0 \\ \sqrt[3]{1-p} \ge 2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} p = 1, \\ 1-p \ge 8; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} p = 1, \\ p \le -7; \end{array}\right. \cos x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}; x = \arccos\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}\right)$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} p = 1, \\ p \le -7; \end{array}\right. x = \arccos\left(\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}\right).$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

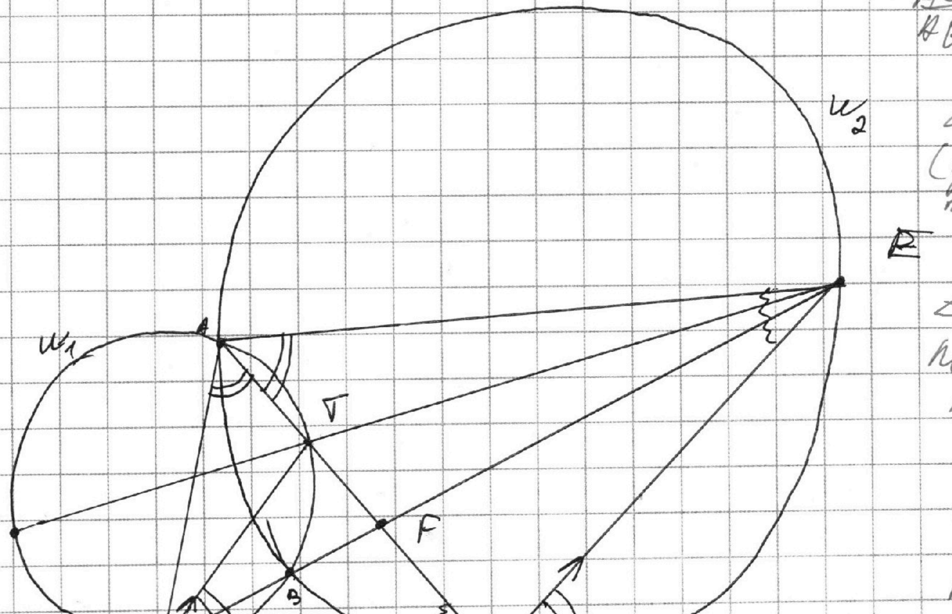
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Обозначим точку пересечения AD и ω_1 за T. Тогда по лемме Эйлера $CT \parallel DE$ (C и T через B и A соответственно переходят силами ω_2 в E и D соответственно).

$\angle CAT = \angle TCD$ (угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой этой хордой, как и вписанный).
$\angle TCD = \angle EDP$ (как соответственные при параллельных). Точка P — это любая точка на CD правее D.
$\angle EAD = \angle EDP$ (угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой этой хордой, как и вписанный).
Таким образом $\angle CAT = \angle EAD$. $\Rightarrow AT$ — биссектриса $\angle CAE$.
Обозначим за F т. пересечения CE и AD. тогда по условию $\frac{CF}{FE} = \frac{2}{5}$. По свойству биссектрисы в $\triangle ACT$: $\frac{CF}{FE} = \frac{AC}{AE}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$.



$\angle AED = \angle ADC$ (угол между касательной и хордой).

$\triangle ACD \sim \triangle ADE$ по 2 углам

$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$.

$AC \cdot AE = AD^2$

$\frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$. Умножим 2 уравнения.

$\frac{AC^2 \cdot AE}{AE} = \frac{2}{5} AD^2$; $AC^2 = \frac{2}{5} AD^2$

$\frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{5}}$; по подобию $\frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Ответ: $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Найдём количество способов расстановки с симметрией относительно первой „средней линии“ и второй. Сумма этих способов будет равна кол-ву расстановок, где

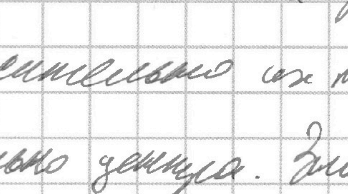
1) Симметрия относительно l_1 - первой средней линии

2) Симметрия относительно l_2 - второй средней линии

3) Пересечения, посчитанные дважды - симметрия относительно l_1 и l_2.

Симметрия относительно l_1 и l_2 одновременно - это симметрия относительно их точки пересечения, то есть относительно центра. Значит, искомым числом будет сумма всех способов с симметрией относительно l_1, способов с симметрией относительно l_2, и вычесть способы с симметрией относительно центра (т.к. это вычитались дважды).

Пусть l_1 параллельна стороне 400, l_2 параллельна стороне 100.



Количество способов расставить с симметрией относительно l_1 - это число выборов 4 точек на одной из половин

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

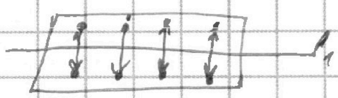
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

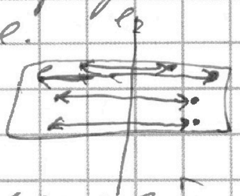
СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

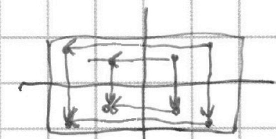
прямоугольника (т.к. вторые 4 будут по ним однозначно заданы). Относительно ℓ_2 равно столько же.

И ~~это~~ это равно $C^4_{100\cdot 200}$.





Количество способов выбрать точки с симметрией относительно центра равно числу выборов 2 точек на четверти прямоугольника (остальные 3 четверти будут однозначно заданы)



И оно равно $C^2_{\cancel{100}\,20\cdot 50}$

Тогда итоговое число искомых закрашиваний равно

$$2\cdot C^4_{20000} - C^2_{10000}.$$

Ответ: $2\cdot C^4_{20000} - C^2_{10000}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a < b$

$b - a \vdots 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$

из равенства $(a-c)(b-c)=p^2$ следуют лишь следующие возможности (т.к. p - простое).

$a-c=p^2$, $b-c=1$; $a-c=-p^2$, $b-c=-1$; $a-c=p$, $b-c=p$; $a-c=-p$, $b-c=-p$; $a-c=1$, $b-c=p^2$; $a-c=-1$, $b-c=-p^2$

$b-a=1-p^2<0$, что $b>a$ по условию; $b-a=p^2-1=(p-1)(p+1)$; $b-a=0$ $\varnothing$; $b-a=0$ $\varnothing$ не подходят т.к. $b\neq0$; $b-a=p^2-1$; $b-a=1-p^2<0$ не подходит.

Получили $b-a=p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Если $b-a \vdots 3$, то $p-1 \not\vdots 3$ и $p+1 \not\vdots 3$. Значит, $p \not\equiv 1 \pmod 3$, $p \not\equiv 2 \pmod 3$. тогда $p \equiv 0 \pmod 3$, $p \vdots 3$, тогда $p=3$ (единственное простое, делящееся на 3, это 3).

Значит, $b-a=3^2-1=8$.

и для этого есть два случая. $\left[\begin{array}{l} b-c=-1 \\ a-c=-1 \end{array}\right.$;

подставим $a=b-8$ в равенство $a^2+b=710$.

$(b-8)^2+b-710=0$; $b^2-15b-646=0$; $(b-34)(b+19)=0$.

$\left[\begin{array}{l} b=34 \\ b=-19 \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-19 \\ a=-19-8=-27 \\ \left[\begin{array}{l} c=a-1=-28 \\ c=b+1=-18 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} b=34 \\ a=34-8=26 \\ \left[\begin{array}{l} c=a-1=25 \\ c=b+1=35 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

получим 4 тройки чисел.

Ответ: $a=-27; b=-19; c=-28$

$a=-27; b=-19; c=-18$

$a=26; b=34; c=25$

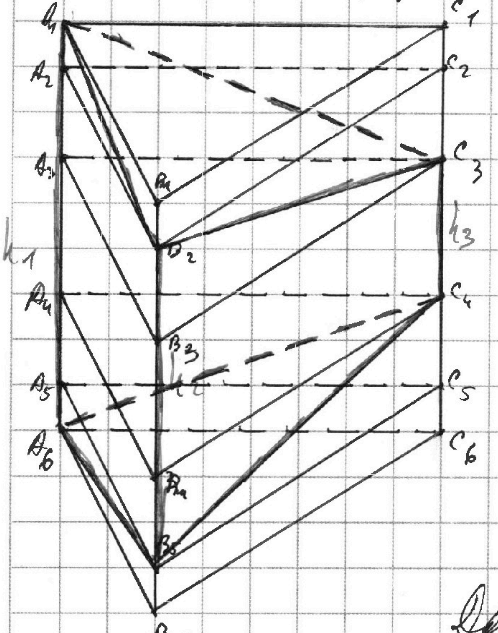
$a=26; b=34; c=35$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что при сдвиге любой боковой стороны в призме параллельно двум другим останутся прежними объём и площади боковых сторон. Пусть исходной была призма $A_1B_2C_3A_6B_5C_4$. Отметим прямоугольную призму $A_1B_1C_1C_6B_6A_6$.



Тогда при сдвиге B_2B_5 грань $A_1C_3A_6C_4$ не изменится вовсе.

А в гранях $A_1B_2B_5A_6$ и $C_3B_2B_5C_4$ площади не изменятся т.к.

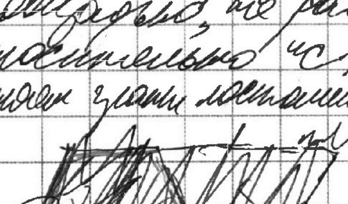
$S = \frac{A_1A_6 + B_2B_5}{2} \cdot h$, а их высоты, и длины рёбер не меняются.

Докажем неизменность объёма.

~~[illegible]~~

$V_{призмы} = S_{сечения} \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$. Длины боковых граней не меняются, поэтому ~~[illegible]~~ V не меняется.

Значит, при сдвиге боковых рёбер параллельно друг другу S и V неизменны. Сдвинем рёбра так, чтобы получить призму, где одна грань основания с площадью, не равной h, стояла в обратную сторону относительно исходной. Это можно сделать по граням: поменяем грани местами и это равнозначно симметрии, сохраняющей площади и объём!



~~Получим параллелепипед с площадью, равной площади исходного~~

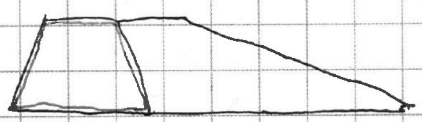
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Так сделаем для 2 граней с площадью 3, а третью „приделаем“ без симметрии.

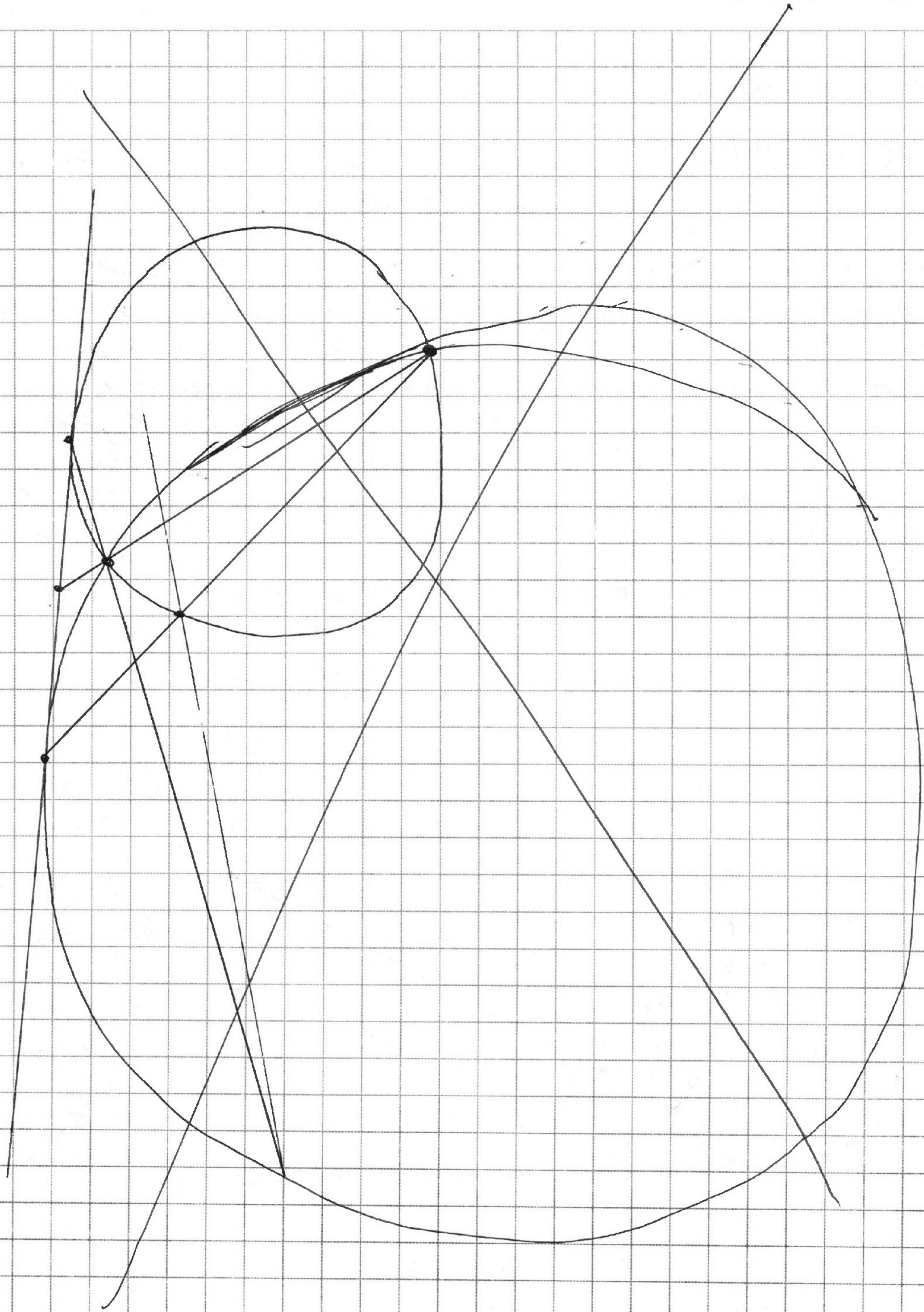


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

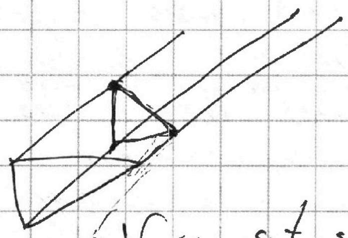


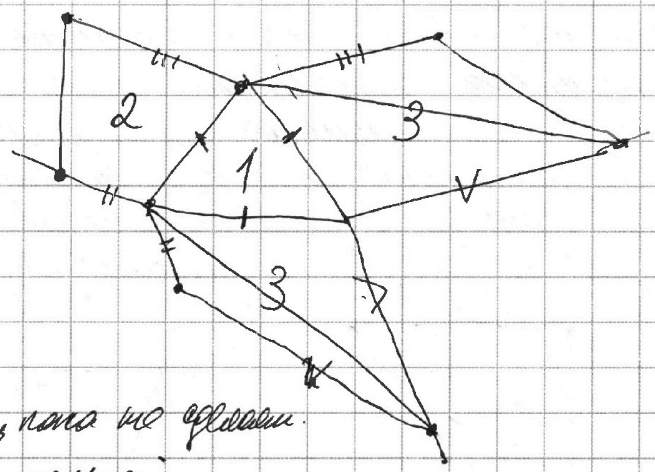
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

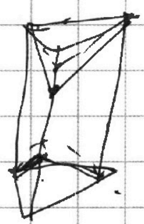




V=const.

S=const.

двигаем, пока не сделаем прямоугольный.



3 3 2

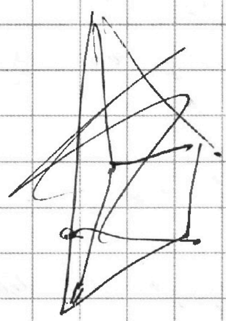
3 3 2

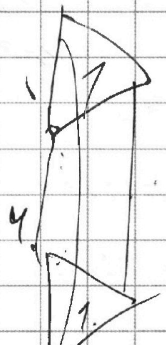
6 6 4

3 3 2

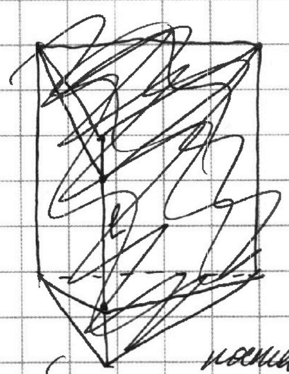
3 2 3

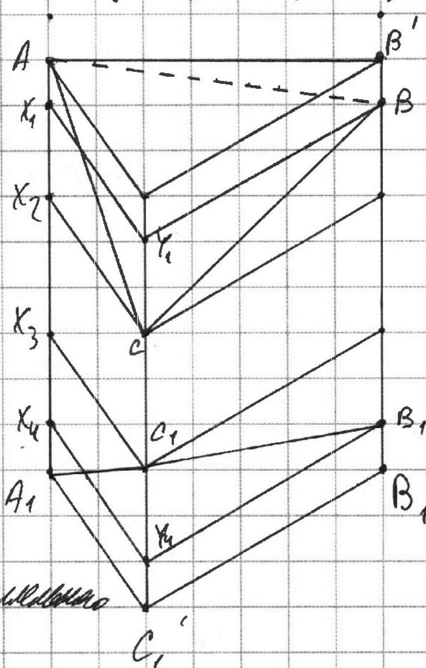
6 5 5





Докажем, что мы можем сдвинуть любую боковую грань призмы ~~параллельно~~ параллельно двум другим при этом ни объём, ни площадь прямоугольной площади боковых граней не изменятся. Рассмотрим прямоугольную призму, описанную около исходной: пусть V_0 — объём описанной прямоугольной призмы. ℓ — длина ребра, каждое будем двигать





пусть исходная призма была $ABCA_1B_1C_1$, а описанной прямоугольной $AB'CA_1B_1'C_1'$.

тогда $S_{AA_1B_1BA}$ постоянна при сдвиге (грань A_1B_1BA не меняется),

$S_{AA_1C_1C}$ постоянна т.е. h не меняется из-за параллельного переноса,

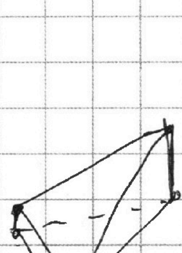
а $S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2} h(AA_1 + CC_1)$.

Аналогично $S_{BB_1C_1C}$ не меняется.

Sh_{min}.

Докажем сохранение объёма.

$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_0 -$

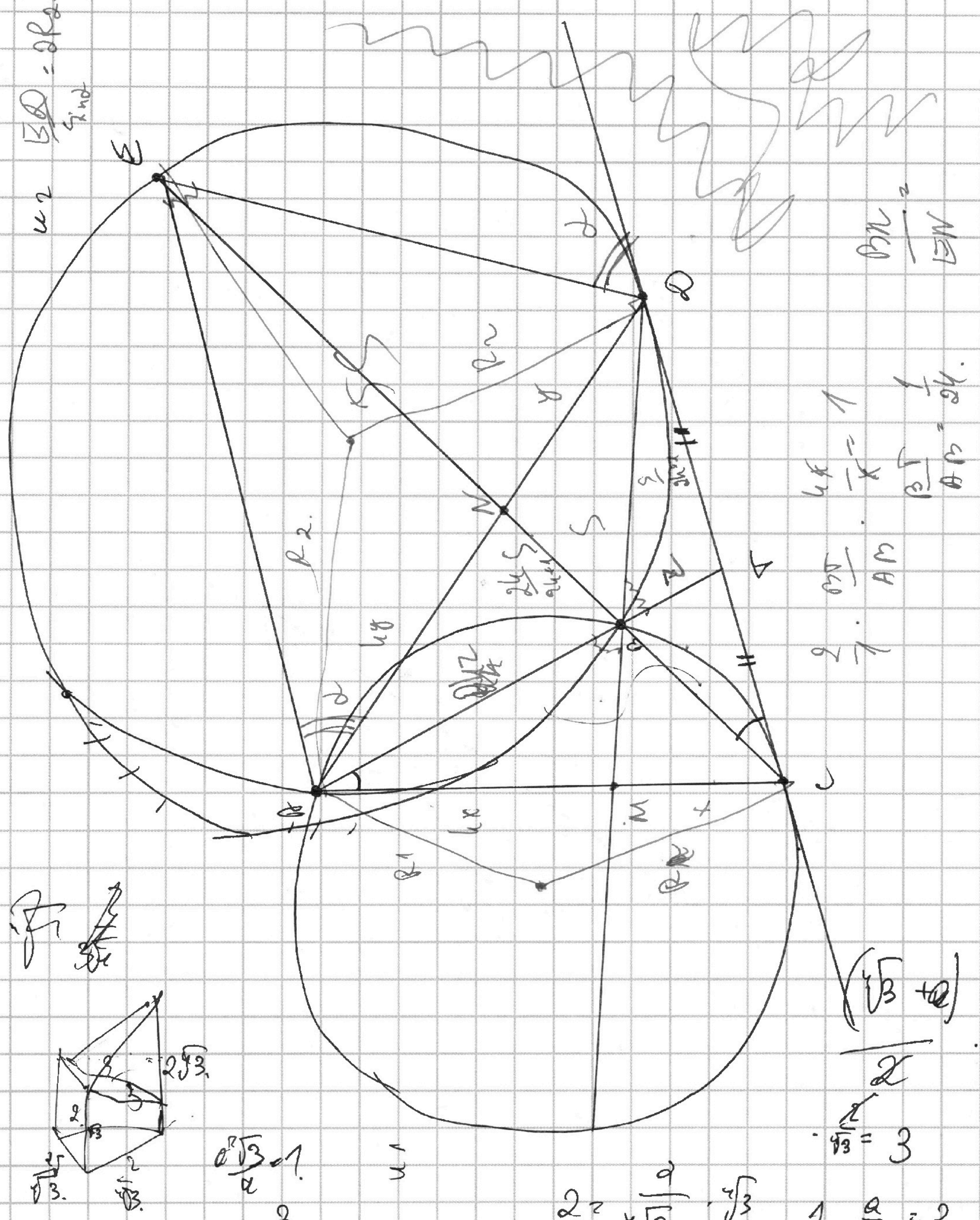


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{(\sqrt[4]{3}+a)}{2}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=1$$

$$a=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{3}}=3$$

$$2=\frac{a}{\sqrt[4]{3}}\cdot\sqrt[4]{3}$$

$$1+\frac{a}{\sqrt[4]{3}}=3$$

$$a=2\sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[4]{3}\cdot 1+$$

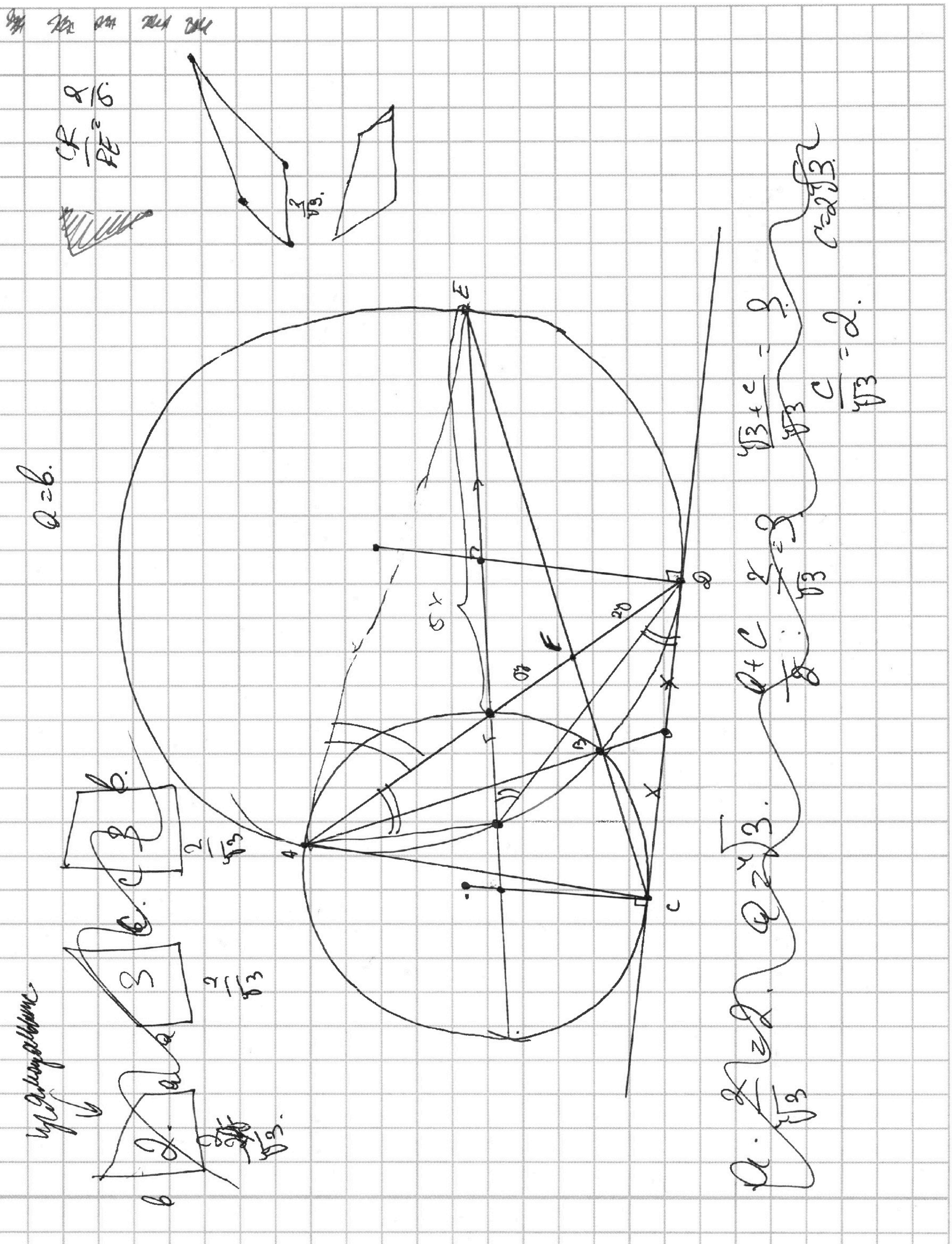
$$+\frac{1}{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot 1=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}=\frac{4\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{3}=\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}=\frac{4}{\sqrt[4]{27}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$R=6$.

$a\cdot\frac{2}{\sqrt3}=2R$

$R=2\sqrt3$.

$\frac{\sqrt3+c}{\sqrt3}=3$.

$\frac{c}{\sqrt3}=2$.

$c=2\sqrt3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{1-x-4z}+4=2\sqrt{y+z-4x-x^2}$

$|y+4|+4|y-5|=\sqrt{81-z^2}$

$x\geq -5$ $\quad 1-x-4z\geq 6-4z$

$1-x\leq 6$ $\quad 6-4z\geq 0$ $\quad z\geq -9$

$\boxed{z=\frac{3}{2}}$

$\cos(x+2x)=$

$=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x=$

$=\cos x(2\cos^2 x-1)-\sin x\cdot 2\sin x\cos x=$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x=$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=$

$=4\cos^3 x-3\cos x.$

$p\cos 3x+3(p+4)\cos x=6\cos 2x+10$

$p(4\cos^3 x-3\cos x)+3(p+4)\cos x=$

$=12\cos^2 x-6+10.$

$4p\cos^3 x-\cancel{3p\cos x}+\cancel{3p\cos x}+12\cos x-12\cos^2 x-4=0.$

$4p\cos^3 x-12\cos^2 x+12\cos x-4=0$

$p\cos^3 x-3\cos^2 x+3\cos x-1=0.$

$p-1=0$ конец.

$px^3-3x^2+3x-1=0$

$x\in(-1;1).$

$(p-1)x^3+(x-1)^3=0.$

$(p-1)x^3=-(x-1)^3$

при $p-1\neq 0$ всегда есть один корень

$(p-1)\cdot 1-(1-1)^3=8.$

$(p-1)\cdot -1=8$

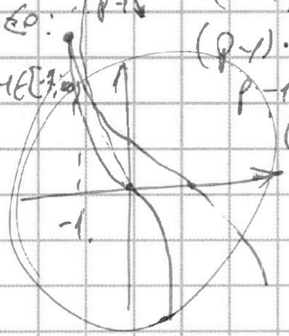
$p-1=-8$

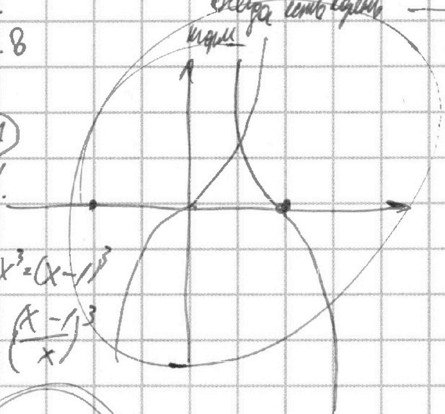
$p=-7$

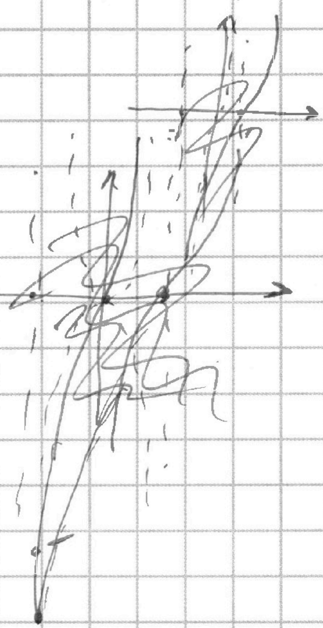
$x=-4.$

$p-1\leq 0$:

при $p-1\in[-7;0)$







$(1-p)x^3=(x-1)^3$

$1-p=\left(\frac{x-1}{x}\right)^3$

$1-\frac{1}{x}=\sqrt[3]{1-p}$

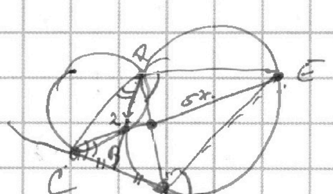
$x=\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}$ $\Leftrightarrow$ $\cos x=\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}$

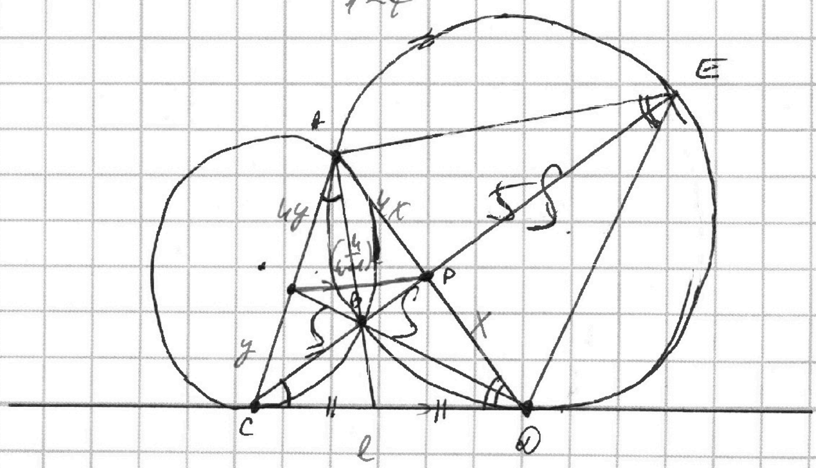
$-1\leq\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}\leq 1;$

$\frac{1}{1-\sqrt[3]{1-p}}\leq 1$

$\sqrt[3]{1-p}=t.$

$-1\leq\frac{1}{1-t}\leq 1$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a<b$ $\quad b-a \vdots 3$

$(a-c)(b-c)=p^2$

$a^2+b=710.$

$a-c=p^2$, $b-c=1$

$a-c=1$, $b-c=p^2$

$a-c=-p^2$, $b-c=-1.$

$b-a=p^2-1=(p-1)(p+1).$ $\quad p=3.$

$b-a=-1+p^2=p^2-1$, $p=3$

$p=3$ $\quad b-a=8$

$c=a-1$ $\quad c=b+1$

$b^2-15b+646=0$

$(b-34)(b+19)=0.$

$b=34$, $a=26$, $c=25$	$b=34$, $a=26$, $c=35$
$b=-19$, $a=-20$, $c=-21$	$b=-19$, $a=-20$, $c=-18$

$b\cdot q^6$

$=\sqrt{(25x-9)(x-6)}$

$a_9=b q^8=x+3$

$a_{15}=b\cdot q^{14}=\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$

$\frac{a_{15}}{a_7}=q^8=\sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}}=\frac{1}{(x-6)^2}$

$q^4=\pm\frac{1}{|x-6|}$ $\quad q=\sqrt[4]{\frac{1}{|x-6|}}$

$q^2=\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}=\sqrt{\frac{1}{|x-6|}}=\sqrt{\frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)}}$ $\quad \frac{1}{|x-6|}=\frac{(x+3)^2}{(25x-9)(x-6)}$

$(25x-9)(x-6)\geq 0$, $x\neq 6$

$\left[\begin{array}{l} x>6 \\ x\leq \frac{9}{25} \end{array}\right.$

$(x+3)^2=25x-9$, $x-6>0$

$(x+3)^2=-(25x-9)$, $(x-6)<0$

$\begin{cases} x^2-19x+18=0 \\ x>6 \end{cases}$ $\quad x=18$, $x=1$ $\quad x>6$

$\begin{cases} x^2+31x=0 \\ x<6 \end{cases}$ $\quad x=0$, $x=-31$ $\quad x<6$

18, 0, −31 — неподходит.

$x=18:$ $a_7=\sqrt{450\cdot 12}=2\cdot 3\sqrt{150\cdot 3}=18\sqrt{50}=90\sqrt{2}.$

$a_9=21$

$a_{15}=\sqrt{\frac{450}{12^3}}=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{450}{12}}=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{150}{4}}=\frac{1}{24}\sqrt{150}=\frac{5\sqrt{6}}{24}$

$\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x}+4=$

$=2\sqrt{5-4x-x^2}=$

$=2\sqrt{(1-x)(x+5)}.$

$A-B+4=2AB.$

$A^2+B^2=6$

$A;B\geq 0.$

$x\in(-4;5]$

$|y+4|+4|y-5|=$

$=y+4-4y+20=24-3y.$

$y=-4.$ $\quad 36.$

$y\in(-\infty;-4)$ $\quad |y+4|+4|y-5|=-4-y-4y+20=$

$=16-5y$

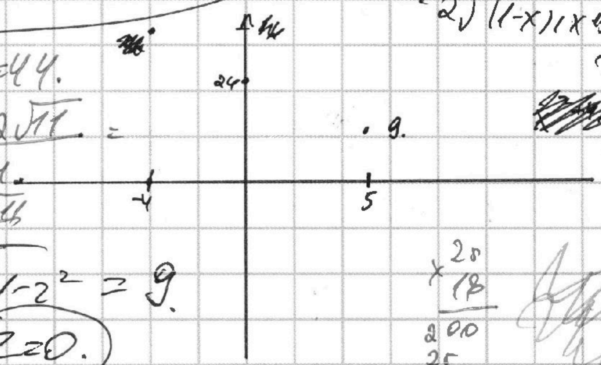
$y\in[5;+\infty)$

$y+4+4y-20=5y-16$

$y=5$

$4+40=44.$

$\frac{-2\pm 2\sqrt{11}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$



$\sqrt{81-z^2}=9.$

$z=0.$

$y=5.$

$16+16=32.$

$\frac{4\pm 4\sqrt{2}}{4}=1\pm\sqrt{2}.$

$25\cdot 18=450$

441

18.

$\frac{21}{\sqrt{12^3}}=\frac{21}{12\cdot 2\sqrt{3}}$

$a_3=42\cdot 6\cdot\sqrt{3}.$

$a_1=42\cdot 6\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=42\cdot 6\cdot 3\cdot\sqrt{2}=42\cdot 18\sqrt{2}$