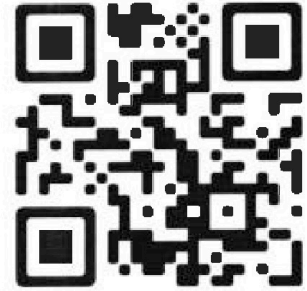




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партией перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькоими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

Уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  — квадратное. Если оно имеет два различных действительных корня, то дискриминант уравнения положителен:

$$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$$

И если  $D > 0$ , то уравнение имеет 2 различных действительных корня.

По теореме Виета произведение корней уравнения равно  $4t^2 - 4$  (свободный член (старший коэффициент равен 1)), и оно по условию положительно:

$$\text{но: } 4t^2 - 4 > 0. \text{ Имеем:}$$

$$\begin{cases} 16 - 4t^2 > 0 \\ 4t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 > 4t^2 \\ 4t^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 > t^2 \\ t^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t^2 \in (1; 4)$$

$$\Leftrightarrow t \in (1; 2) \cup (-2; -1). \text{ (Если } t > 0, \text{ то } 2 > t > 1, \text{ если } t < 0,$$

$$\text{то } -2 < t < -1). \text{ При таких } t \text{ } 4t^2 - 4 > 0 \text{ и } 16 - 4t^2 > 0,$$

т.е. уравнение имеет 2 различных корня и их произведение положительно.

$$\text{Ответ: } t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2

Заметим, что  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15)$ . Так как  $a+b=40$  и  $b > 0$  ( $b \in \mathbb{N}$ ),

$$a-b = a+b-2b = 40-2b \leq 38 \quad (b \geq 1), \quad a-b+15 \leq 38+15=53,$$

и  ~~$(a-b)(a-b+15) \leq 38 \cdot 53 = 2014$~~  ( $(a-b)(a-b+15) = 14p^5 > 0$ )  
если  $a-b \geq 0$ , то  $a-b+15 \geq 15 > 0$ , и

$$(a-b)(a-b+15) \stackrel{!}{\leq} 38 \cdot 53 = 2014, \text{ а если } a-b < 0, \text{ то}$$

$$\Rightarrow a-b = 2a-(a+b) = 2a-40 > -40, \quad a-b+15 > -40+15 = -25, \text{ и}$$

$$|a-b| \leq 40, \quad |a-b+15| \leq 25 \Rightarrow (a-b)(a-b+15) \leq 40 \cdot 25 = 1000$$

( $(a-b)(a-b+15) = 14p^5 > 0$ ). В любом случае

$$(a-b)(a-b+15) \leq 2014. \text{ Если } p \geq 3, \text{ то } 14 \cdot p^5 \geq$$

$$> 14 \cdot 3^5 = 14 \cdot 243 = 4131 > 2014 \geq (a-b)(a-b+15). \text{ Поэтому } p < 3,$$

т.е.  $p=2$ . Итак,

$$(a-b)(a-b+15) = 14 \cdot 2^5.$$

П.к.  $a+b=40$ ,  $a-b = 40-2b$  — четное, и  $a-b+15$  — нечетное.

Тогда  $a-b+15$  взаимнопросто с  $2^5$ , т.е.  $(a-b) : 2^5$ . Но

$-40 \leq a-b < 40$ , т.е.  $(a-b) : 14$  (Иначе  $(a-b) : (14 \cdot 2^5)$ , но тогда

$a-b=0$  (что неверно, т.к.  $(a-b)(a-b+15) \neq 0$ ), или  $|a-b| \geq 14 \cdot 2^5$  (что также неверно, т.к.  $|a-b| \leq 40$ ). Тогда  $\text{НОД}(a-b, 14) = 1$ , т.е.  $(a-b+15) : 14$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Умнож,  $(a-b) = 2^5$ ,  $(a-b+15) = 14$ , т.е.  $|a-b| \geq 32$ ,  
 $|a-b+15| \geq 14$ , но  $|a-b| \cdot |a-b+15| = |14 \cdot 2^5| = 14 \cdot 2^5$ . Тогда  
 $|a-b| = 32$

$|a-b+15| = 14 \Rightarrow$  Если 2 случая.

I случай.  $a-b = 32$ . Тогда  $a-b+15 = 32+15 \neq 14$  — не  
подходит.

II случай.  $a-b = -32$ . Тогда  $a-b+15 = 15-32 = -17$  — не подходит,  
т.к.  $(a-b)(a-b+15) = (-32)(-17) = 32 \cdot 17 = 14 \cdot 2^5$ . Умнож,

$$\begin{cases} a-b = -32 \\ a+b = 40 \end{cases}$$

$$2a = 40 - 32$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

$$b = 40 - 4 = 36$$

Получаем, что  $a = 4$  и  $b = 36$ .

Ответ: 4 и 36.

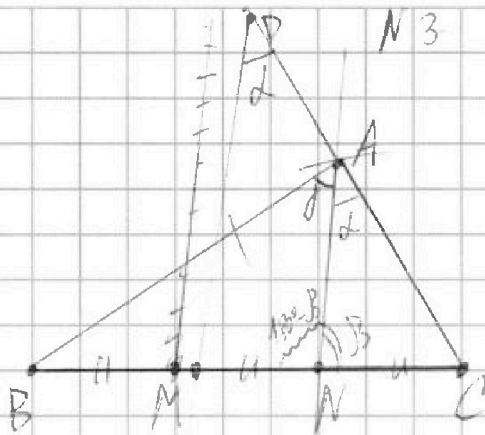
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\alpha = \angle CAN$ . Так как  $DM \parallel AN$ ,  $DA$  — секущая,  
 $\angle MDC = \angle NAC = \alpha$ . Также, по мере Фалеса,  
 $\frac{DA}{AC} = \frac{MN}{NC} = 1$  ( $MN = NC$ )  $\Rightarrow DA = AC \Rightarrow DC = DA + AC = 2AC$ .

По условию  $AB = DC$ , значит,  $AB = 2AC$ . Пусть  $\beta = \angle BAN$ ,  
 $\beta = \angle ANC$ . Тогда  $\angle ANB = 180^\circ - \beta$  ( $\angle ANB$  и  $\angle ANC$  — смежные).

Тогда по мере синусов

$$\frac{BN}{\sin \beta} = \frac{BA}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BA}{\sin \beta} \quad (\Delta ABN)$$

$$\frac{NC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \beta} \quad (\Delta ANC)$$

Поделим уравнения:

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \beta} = \frac{BA}{AC} = \frac{2AC}{AC} = 2 \quad (AB = 2AC)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \beta} = 2 \frac{NC}{BN} = 2 \frac{NC}{BM + MN} = 2 \frac{NC}{NC + NC} = 1 \quad (BM = MN = NC), \text{ м.е.}$$

$\sin \beta = \sin \beta$  т.к.  $\beta < 180^\circ$  (угол  $\Delta ABC$ ),  $\beta = \beta$ , м.е.  $AN$  — биссектриса  $\Delta ABC$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Поскольку } \cos(\angle CAN) = \cos(\angle A) = \cos(\angle BAC) = -\frac{1}{4} \text{ (по условию)}$$

По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$BC^2 = 4(2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot (2AC) \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \quad (AB=2AC)$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 4AC^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6AC^2$$

$$AC^2 = \frac{BC^2}{6}$$

$$AC = \frac{BC}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6};$$

$$AB = 2AC = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6};$$

Ответ:  $4\sqrt{6}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

П.р. В классе 3 ряда парт по 3 парты в ряду, всего в классе  $3 \cdot 3 = 9$  парт. Парты после рассадки 8 человек ровно 1 парты останется пустой.

Чтобы всех рассадить, можно сначала выбрать ряд, в котором будут пустая парты (3 способа). Далее выбрать между 2-х учеников, которые будут сидеть в этом ряду  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  способами. Далее нужно рассадить учеников так, чтобы ни один из них не сидел сразу за более высоким (более низкий найдется, т.к. все ученики разного роста). Есть 2 способа рассадки этих 2-х учеников, в которых один из них сидит сразу за высоким (они не по росту) — за 1-й и 2-й партами или за 2-й и 3-ей партами; а всего способов их рассадки — 6 (3 варианта для одного и останется 2 для другого), т.е. их будет 84 способа видно доску в 6-2-4 способами. Далее 6-2-4 способами



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из оставшихся 6 улиток нужно выбрать 3, которые будут сидеть на одном из 2-х оставшихся рядов. Этим 3-м улиткам можно единственным способом рассадить в ряд: самого низкого из них — на первую парню (иначе перед ним будет сидеть более высокий улитка), среднего по высоте — на 2-ую (иначе он будет на 3-ей (1-ая уже занята самым низким из 3-х улиток) и перед ним будет самый высокий из 3-х), а самого высокого — на 3-ю парню.

Оставшихся 3-х улиток (из всех 8-ми) можно рассадить в оставшийся ряд также одним способом (все могут иметь разный рост). Тогда рассадить всех 8-ми улиток можно

$$3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot C_6^3 = 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 3} = 3 \cdot 28 \cdot 4 \cdot 20 = 6720 \text{ способами}$$

Ответ: 6720.



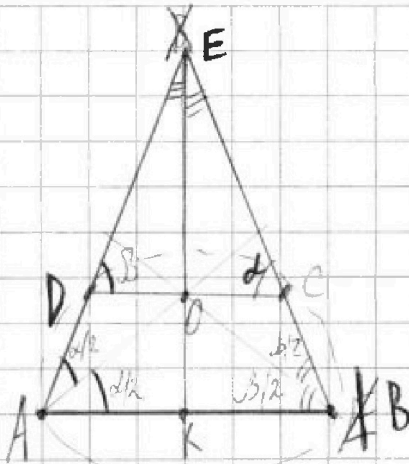


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\alpha = \angle EAB$ ,  $\beta = \angle ABE$ . Так как  $ABCD$  — вписанный,  $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta \Rightarrow \angle CDE = \beta$  ( $\angle CDE$  и  $\angle ADC$  — смежные). Также  $\angle DCB = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DCE = \alpha$ . Еще у  $\triangle ABE$  и  $\triangle DCE$  есть общий угол  $\angle E$  при вершине  $E$  ( $\angle AEB$ ); тогда  $\triangle DEC$  подобен  $\triangle BEA$  с коэффициентом подобия  $k$ . Тогда  $CD = k \cdot AB$ ,  $DE = k \cdot EB$ ,  $CE = k \cdot AE$ . Центр  $O$  вписанной окружности  $\triangle AEB$  лежит на биссектрисе  $\angle AEB$ . Тогда

$$\frac{ED}{DO} = \frac{EC}{CO} \Rightarrow \frac{DO}{ED} = \frac{CE}{EC} = \frac{CD + CO}{EC} \Rightarrow DO \left( \frac{1}{ED} + \frac{1}{ED} \frac{CD}{EC} \right) =$$

$$\Rightarrow DO = \frac{CD}{EC \left( \frac{1}{EC} + \frac{1}{ED} \right)} = \frac{CD \cdot ED}{ED + EC}, \quad ED + DO = ED \left( 1 + \frac{CD}{ED + EC} \right) =$$

$$= ED \cdot \frac{CD + ED + EC}{ED + EC} = ED \cdot \frac{AB + BE + EA}{BE + EA}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $K$  — точка пересечения биссектрисы  $\angle AEB$  и стороны  $AB$ . Т.к.  $BK$  — биссектриса  $\angle ABO$ ,  $BO$  — тоже биссектриса ( $O$  — точка пересечения биссектрис  $\triangle AEB$ )

$$\frac{EA}{AK} = \frac{EO}{OK} \Rightarrow EO = \frac{EA}{AK} (EK - EO) \Rightarrow EO \left(1 + \frac{EA}{AK}\right) = \frac{EA}{AK} \cdot EK \Rightarrow EO = \frac{EA \cdot EK}{EA + AK}$$

$$\frac{EA}{AK} = \frac{EB}{BK} \Rightarrow \frac{AK}{EA} = \frac{BA - AK}{EB} \Rightarrow AK \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}\right) = \frac{BA}{EB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = \frac{BA \cdot AE}{EB + EA}; \quad EO = \frac{EA \cdot EK}{EA + \frac{BA \cdot AE}{EB + EA}} = \frac{EA \cdot EK \cdot (EB + EA)}{EA(EB + EA) + EA \cdot BA}$$

$$= \frac{EK \cdot EB + EA}{EB + EA + BA} \quad \text{т.к. } EO \text{ и } EK \text{ — бис-сы } \triangle DEC \text{ и } \triangle BEA$$

соответственно а высота из вершины угла, т.к.  $EO = EK \cdot k =$

$$= EK \cdot \frac{EB + EA}{EB + EA + BA} \Rightarrow k = \frac{EB + EA}{EB + EA + BA}; \quad ED = k \cdot EB = \frac{EB + EA}{EB + EA + BA} \cdot EB,$$

$$\text{а } ED + DO = ED \cdot \frac{AB + BE + EA}{BE + EA} = EB \cdot \frac{EB + EA}{EB + EA + BA} \cdot \frac{AB + BE + EA}{BE + EA} = EB = 10$$

(по условию). Получается, что  $ED + DO = 10$  в любом случае ( $BE = 10$ , т.е.  $10$  — и минимальное, и максимальное значение  $ED + DO$ ).

Ответ: 10.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $G$  — граф, в котором вершины соответствуют деревьям на острове, и 2 вершины образуют ребро, если соответствующие им деревья соединены дорогой. Пусть  $N$  — количество вершин в  $G$ , т.е. количество деревьев на острове. Из 4-х вершин графа выходит 3, 4, 5, 4 ребра соответственно, т.е. степени этих вершин равны 3, 4, 5, 4 соответственно, а из остальных  $N-4$  вершин выходит по одному ребру (их степени равны 1). П.к. из любой вершины можно добраться в любой другой только одним способом, граф  $G$  связный и в нём нет циклов (иначе можно было бы взять две вершины  $A$  и  $B$  какого-то цикла и пройти двумя способами по циклу (с двух сторон) от  $A$  к  $B$ ), т.е. граф  $G$  — дерево.

У деревьев  $K$  с  $N$  вершинами количество рёбер равно  $N-1$ . Каждое ребро имеет 2 конца, т.е. всего  $2(N-1)$  концов рёбер, а это есть сумма степеней всех вершин.

$$2(N-1) = 3 + 4 + 5 + 4 + \dots + 1 = 3 + 4 + 5 + 4 + N - 4 = 15 + N$$

$2N - 2 = 15 + N$   
 $N = 17$  — количество деревьев на острове,  
 Ответ: 17.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4

Заметим ОДЗ для  $x$  и  $y$  — подкоренные выражения должны быть неотрицательными

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+2x-x^2+2y-y^2 \geq -2 \\ |x+y-2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x-1)^2-(y-1)^2 \geq -2 \\ -1 \leq x+y-2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2 \\ 1 \leq x+y \leq 3 \end{cases}$$

П.к.  $x$  и  $y \in \mathbb{Z}$ , то  $(x-1)^2$  и  $(y-1)^2$  могут принимать значения из множества  $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$  (квадраты целых чисел). Но  $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2 \Rightarrow (x-1)^2 \leq 2$  и  $(y-1)^2 \leq 2$ , т.е.  $(x-1)^2$  и  $(y-1)^2$  могут принимать значения 0 или 1, и этого достаточно, чтобы  $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2$ . Тогда  $(x-1) \in \{-1, 0, 1\}$  и  $(y-1) \in \{-1, 0, 1\}$ , т.е.  $x \in \{0, 1, 2\}$  и  $y \in \{0, 1, 2\}$ . А так как  $1 \leq x+y \leq 3$ , пары  $(0, 0)$  и  $(2, 2)$  ( $x=y=0$  и  $x=y=2$ ) не удовлетворяют ОДЗ. Есть 2 случая

I.  $x+y=2$ . Тогда  $\sqrt{1-|x+y-2|} = \sqrt{1-|2-2|} = 1$ , т.е.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = 0 \Leftrightarrow 2x+2y-x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{matrix} |x-1|=1 \\ |y-1|=1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow x-1 = \pm 1$  и  $y-1 = \pm 1 \Rightarrow x \in \{0, 2\}$  и  $y \in \{0, 2\}$ , но пары  $(0, 0)$  и  $(2, 2)$  не удовлетворяют ОДЗ, т.е. остаются 2 пары —  $(0, 2)$  и  $(2, 0)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II.  $xy = 1$  или  $xy = 3$ . Тогда

$$\begin{cases} xy = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-|xy-2|} = \sqrt{1-|3-2|} = \sqrt{1-1} = 0 \\ \sqrt{1-|xy-2|} = \sqrt{1-|1-2|} = \sqrt{1-1} = 0 \end{cases}$$

В первом случае  $\sqrt{1-|xy-2|} = 0$ , т.е.  $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x+2y-x^2-y^2 = 1 \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y = -1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y-1)^2 = 1 \\ (y-1)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 1 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y \in \{0, 2\} \\ y = 1 \\ x \in \{0, 2\} \end{cases}, \text{ т.е.}$$

В этом случае решением являются следующие пары  $(1, 2), (1, 0), (0, 1), (2, 1)$ .

Таким образом, решением уравнения —  $(0, 2), (2, 0), (1, 2), (1, 0), (0, 1), (2, 1)$  (как показано в паре точек просто подставляем  $x$  и  $y$  в уравнение и убеждаемся что выполняется условие).

Ответ:  $(0, 2), (2, 0), (1, 2), (1, 0), (0, 1), (2, 1)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, featuring multiple geometric diagrams and calculations. The diagrams include triangles with various points (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z), circles, and lines. The calculations involve trigonometric functions (sine, cosine, tangent), algebraic equations, and geometric formulas (area, perimeter, volume). Key elements include:

- Top Left:** A multiplication table:  $\begin{matrix} 38 \\ \times 53 \\ \hline 114 \\ 190 \\ \hline 2014 \end{matrix}$
- Top Center:** A diagram of a circle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment AK is drawn, and the angle  $\angle CAK$  is marked. The calculation  $\cos(2\angle CAK) = \frac{1}{4}$  is shown.
- Top Right:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment EA is drawn, and the angle  $\angle EAK$  is marked. The calculation  $\frac{EA}{AK} = \frac{EB}{BK}$  is shown.
- Middle Left:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment AK is drawn, and the angle  $\angle CAK$  is marked. The calculation  $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  is shown.
- Middle Center:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment AK is drawn, and the angle  $\angle CAK$  is marked. The calculation  $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  is shown.
- Middle Right:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment EA is drawn, and the angle  $\angle EAK$  is marked. The calculation  $\frac{EA}{AK} = \frac{EB}{BK}$  is shown.
- Bottom Left:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment AK is drawn, and the angle  $\angle CAK$  is marked. The calculation  $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  is shown.
- Bottom Center:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment AK is drawn, and the angle  $\angle CAK$  is marked. The calculation  $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$  is shown.
- Bottom Right:** A diagram of a triangle with points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. A line segment EA is drawn, and the angle  $\angle EAK$  is marked. The calculation  $\frac{EA}{AK} = \frac{EB}{BK}$  is shown.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

