



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) a_7 = a_{15} \cdot q^8; a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}; x \neq -1$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)}$$

Всегда следует, что $q^8 = (x+1)^2$

(либо все $a_i = 0$, при $x = \frac{35}{13}$, но тогда $a_{15} \neq 0$ противоречит этому)

$$2) \text{ Из п.1: } q^2 = \sqrt[4]{(x+1)^2} \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$3) \text{ Тогда } a_{15} \cdot q^2 = 15: (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)}$$

$$4) \text{ Правая часть } \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$$

$$\text{ левая часть } \geq 0 \Leftrightarrow 5-x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 5]$$

$$5) \text{ Из п.4: } x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{35}{13}; 5]$$

Рассмотрим 1-й пред-ок: $(5-x) \cdot \sqrt{-x-1} =$

$$= \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)} \Leftrightarrow -(5-x)^2 = 13x-35$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 - \text{кор} \\ x = 2 - \text{и кор} \end{cases}$$

Аналогично 2-й пред-ок: $(5-x) \cdot \sqrt{x+1} =$

$$= \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)} \Rightarrow -x^2 + 23x - 60 = 0$$

$$x = 3 \text{ или } x = 20$$

кор

и кор

Ответ: $x = 3$
 $x = -5$ (не трудно показать, что тогда $q = \sqrt{2}$ и все работает)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

1) Заметим, что $\sqrt{169-z^2} \leq 13$

2) $|y+1| + 3|y-12| = \begin{cases} -4y+35; & y \in (-\infty; -1) \\ -2y+37; & y \in [-1; 12) \\ 4y-35; & y \in [12; +\infty) \end{cases}$

Отсюда следует, что левая часть ≥ 13 (минимум каждой из трех ф-ций ≥ 13 , при этом равенство достигается только в 3-м случае)

3) Из п.1 и п.2: $\sqrt{169-z^2} = 13 \Rightarrow z=0$
 $4y-35=13 \Rightarrow y=12$

Тогда: $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12} = 2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)}$,

при этом: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ (x+3) \cdot (4-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 4]$

4) $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)} - 5$

$$x+3 + 4-x - 2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)} = (2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)} - 5)^2$$

$$2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)} = t; \quad 7-t = (t-5)^2; \quad t^2 - 9t + 18 = 0$$

$t=6$ или $t=3$

1) $2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)} = 6$
 $(x+3) \cdot (4-x) = 9$
 $x^2 - x - 3 = 0$

2) $2\sqrt{(x+3) \cdot (4-x)} = 3$
 $4 \cdot (x+3) \cdot (4-x) = 9$
 $4x^2 - 4x - 39 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжим

$$1) D = 1 + 12 = 13$$

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2) D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 39$$

$$D = 16 \cdot 40 = 64 \cdot 10$$

$$X = \frac{48 \pm 8\sqrt{10}}{8} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$$

Нетрудно проверить, что все корни в $[-3; 4]$,

$$\text{т.к. } \sqrt{13} \quad 3 \leq \sqrt{13} \leq 4$$

$$3 \leq \sqrt{10} < 3,5$$

Таким образом, Ответ: $z = 0, y = 12, X = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$X = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$2) 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = p + 3$$

$$3) f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$

4) Из п.3 выг, что φ -ые \uparrow на промежутках от $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$, а $t = -\frac{1}{2}$ - точка перегиба

$$5) \text{ тогда } t \in [-1; 1] \Leftrightarrow f(t) \in [-1; 13]$$

$$6) \text{ Из п.5: } p + 3 \in [-1; 13] \Rightarrow p \in [-4; 10]$$

$$7) 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - (p+3) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$8) p = 3 \Rightarrow \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$p = -4 \Rightarrow \cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$p = 10 \Rightarrow \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$9) 4\cos^3 x + (3-p)\cos^2 x + 3\cos x - (p+3)\sin^2 x = 0$$

Данное куб. ур-ие (из п.2) можно решить по формуле Кардано, где получится, что $\cos x$ зависит от p , т.е. $\cos x = pK + a$, a, K - действ.
 $x = \pm \arccos(pK + a)$

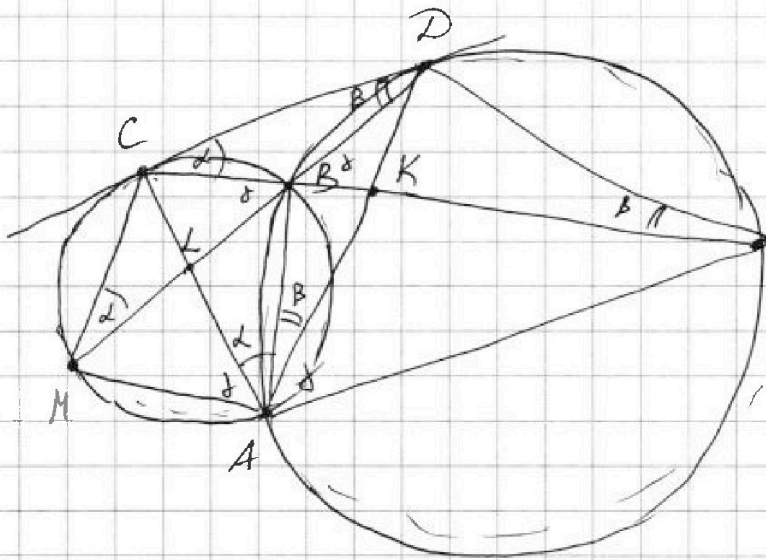


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- 1) Проведем DB
до σ . пересек с ω
(с. M)
- 2) $MB \cap AC = L$ (т. L)
- 3) $\angle DCB = \angle CMB =$
 $= \angle CAB = \alpha$
(из с. в. касса.)
- 4) $\angle CDB = \angle DEB =$
 $= \angle BAD = \beta$
аналогично п. 3)

5) $\angle CBM = \angle CAM$ (на одну дугу) $= \delta$

6) $\angle CBM = \angle DBE = \delta$, как вершинок \Rightarrow
 $\angle DBE = \angle DAE = \delta$ (как \sphericalangle отпр. на одну дугу)

7) $\angle DBE = \angle BCD + \angle CDB$ (как внешн.) $\Rightarrow \delta = \alpha + \beta$

$\Rightarrow AK$ - бисс $\angle CAE$. $\Rightarrow \frac{BK}{KE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$

8) Аналогично AL - бисс $\angle MAD \Rightarrow$

$$\frac{ML}{LD} = \frac{MA}{AD}$$

9) $\triangle MCD \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{MC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{MD}{CE} = k$

10) $\triangle MAD \sim \triangle CAE \Rightarrow \frac{MA}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{MD}{CE} = k \Rightarrow$

11) $\triangle BKA \sim \triangle DKE \Rightarrow \frac{AK}{KE} = \frac{BK}{KD} = \frac{AB}{DE}$

Из п. 9, п. 10 и п. 11 $\Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $(a-c) \cdot (b-c) = p^2$. т.к p простое, то y

p^2 всего 6 значений: $1; p; p^2; -1; -p; -p^2$

2) Если $(a-c) = p$ и $(b-c) = p$, то $a = b \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-b) : 3$, это противоречит 2 пункту.

Аналогично если $(a-c) = -p$ и $(b-c) = -p$

3) Значит, либо $(a-c) = p^2$ и $b-c = 1$,

либо $(a-c) = -1$ и $b-c = -p^2$

(никак иначе, т.к $a > b$, при этом $|p^2| > 1$)

4) Первый случай: $(a-c) = p^2$ $\Rightarrow a-b = p^2 - 1$
 $(b-c) = 1$

Заметим, что если $p \neq 3$, то $(p^2 - 1) : 3$ (т.к

квадрат любого числа дает ост. 0 или 1,

а т.к любое p не равно 3 и делится на 3,

то $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$.

Чтобы не было противоречия п.2 условия:

$p = 3$

5) \Rightarrow Из п.4 $a-b=8$, $\begin{cases} a = b+8 \\ a^2 + b^2 = 560 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$
 $b = 23$, $a = 31$
 $b = -24$, $a = -16$

6) $a = 31, b = 23 \Rightarrow c = 22$
 $a = -16, b = -24, c = -25$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7) Рассмотрим 2-й случай: $(a-c) = -1$
 $(b-c) = -p^2$

$a-b = p^2 - 1$. Аналогично 1-му случаю

$$p=3, a=b+3, b=23, a=31$$
$$b=-24, a=-16$$

Всего ^нпарей: $a=31, b=23, c=31+1=32$
 $a=-16, b=-24, c=15$

Итого ответ: 4 тройки: $a=31, b=23, c=22$
 $a=-16, b=-24, c=25$
 $a=31, b=23, c=32$
 $a=-16, b=-24, c=15$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 \sin^2 x = p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x - (p+3) \sin^2 x - p \cos^2 x$$

$$4 \cos^3 x + (3-p) \cos^2 x + 3 \cos x - (p+3) \sin^2 x = 0$$

$$q^3 = (x+1)^2$$

$$q^2 = \sqrt{(x+1)^2} \quad q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$x \leq 5$$

$$(5-x)^2 = 13x - 35$$

$$(5-x) \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{13x-35} \cdot \sqrt{|x+1|} \quad (x+1) < 0$$

$$x < -1$$

$$(5-x) \cdot \sqrt{-x-1} = \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)}$$

$$(5-x)^2 \cdot (-x-1) = \sqrt{} \cdot (13x-35) \cdot (x+1)$$

$$-(5-x)^2 = 13x-35$$

$$-x^2 + 10x - 25 = 13x - 35$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = -5$$

$$x = 2$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$-x^2 + 23x - 60 = 0$$

$$x = 20$$

$$x = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \triangle MCO \sim \triangle COE \Rightarrow \frac{MC}{CO} = \frac{MO}{CE} = \frac{EO}{ED} = \frac{MO}{13x} = k$$

$$\frac{MA}{AO} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$2) \triangle MAD \sim \triangle CAE \Rightarrow \frac{MA}{AC} = \frac{MO}{CE} = \frac{AD}{AE} = \frac{MD}{13x} = k$$

$$\frac{MA \cdot AD}{AC \cdot AE} = \frac{3}{10}$$

$$3) \triangle AKE \sim \triangle BKD \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{AE}{BD} = \frac{KE}{KD} = a$$

$$a = \frac{AK}{BD}$$

$$4) \triangle AKB \sim \triangle EKD \Rightarrow \frac{AK}{KE} = \frac{AB}{ED} = \frac{BK}{KD} = \frac{AK}{10x} = a$$

$$AC = \frac{3}{10} AE \quad MA = \frac{3}{10} AD$$

$$5) AK - \text{бисс, } \sigma. \pi \Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} = \frac{MA}{AD} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{MA}{AC} \cdot \frac{AD}{AE} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{MC}{ED} = k^2$$

$$MA \cdot AD = \frac{3}{10} AD^2$$

$$ML \cdot AD = MA \cdot LD$$

$$\frac{MA}{AD} = \frac{ML}{LD} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{MA}{AD} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\frac{3}{10} AD^2}{\frac{3}{10} AE^2} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} = \frac{MA}{AD}$$

$$\frac{ML}{AL} = \frac{MC}{AB}$$

$$\frac{ML}{LD} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AK}{KD} = \frac{ML}{AL} = \frac{MC}{AB}$$

$$\frac{ML}{LC} = \frac{AL}{BL}$$

$$\frac{MC}{AL} = \frac{LC}{BL}$$

$$\frac{CO}{EO} = k$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - (p+3) = 0 \quad /: \cos x$$

$$4 \cos^2 x + 6 \cos x + (3 - \frac{p+3}{\cos x}) = 0$$

$$3 \cos x = -6 \pm \sqrt{36(p+3) - 12}$$

$$\frac{16}{13} \cos^2 x + 96 \cos x + 36 = \frac{16(p+3) - 12}{\cos x}$$

$$\frac{MC}{EO} = k^2$$

$$D = 36 - 4G \cdot \left(3 - \frac{p+3}{\cos x}\right)$$

$$-6 \pm \sqrt{36(p+3) - 12} = \cos x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \quad a_{25} = \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)} \quad 5-x \geq 0$$

$x \leq 5$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{\sqrt{13x-35}}{\sqrt{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{13x-35} \cdot \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt{13x-35}}{\sqrt{(x+1)^5}}$$

$$= \frac{(1-x-1)^2}{\sqrt{(x+1)^4}} = q^8 = (x+1)^2$$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt[2]{a^4} = |a^2| = 16ab^2 + 20aab$$

$$q^2 = \sqrt[4]{(x+1)^2} = \sqrt{x+1}$$

$|x+1| = x+1$
 $-x-1$
 $-x-1$

$13x-35 \geq 0$
 $x \geq \frac{35}{13}$
 $x \leq 5$

$a-b+5=2ab$
 $\sqrt{a-b+5} = \sqrt{2ab}$
 $y = -1$

$$(5-x) \cdot \sqrt[4]{(x+1)^2} = \sqrt{(13x-35) \cdot (x+1)} \quad a-2\sqrt{ab}+b =$$

$$5-x = \sqrt{13x-35}$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$x \leq 5 \quad = 4ab - 20\sqrt{ab} + 25$$

$$y \geq 12 \quad a+b+18\sqrt{ab} = 4ab+25$$

$$a+b=4ab$$

$$\sqrt{a-b} = 2\sqrt{ab} - 5 \quad x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x = 20$$

$$x = 3$$

$$z = 0$$

$$(4ab+25) + (a+b) = 18\sqrt{ab}$$

$$y < -1$$

$$-y-1+3 \cdot (-y+12) =$$

$$-y-1-3y+36 =$$

$$-4y = -4y+36$$

$$y \in [-1; 12] \quad y+1-3y+36 =$$

$$13 \quad 0 = 12$$

$$y+1-3y+36 = 4y-35 = 12$$

$$y = 12$$

$$y+1-3y+36 = -2y+37$$

$$\sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} = 2\sqrt{y+x-x^2} + 2$$

$$|x+1| + 3|x-12| = \sqrt{169-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{y+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{-x^2+x+12}$$

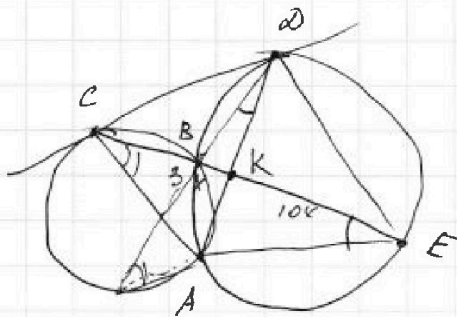


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$$

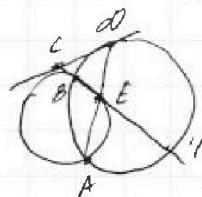
$$(a-c) \cdot (b-c) = p^2$$

$$p^2 = 1$$

○



(31



$$31 - 22 = 9$$

$$23 - 22 = 1$$

$$-24 + 25 = 1$$

$$b = 3$$

$$a \equiv 2 \pmod{3} \quad | \quad -16 + 25 = 9$$

$$11 \equiv 1$$

$$a - c = p^2 \quad p = 100$$

$$p = 3$$

$$b - c = 1$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$a - b = 3^2 - 1 = 8$$

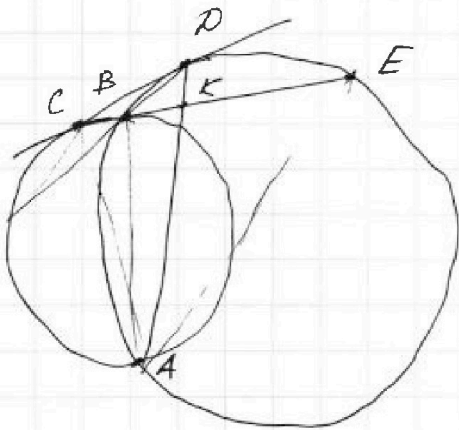
$$a = b + 8$$

$$b^2 + b + 8 = 560 \quad \begin{array}{r} 552 \quad | \quad 23 \\ -48 \quad | \quad 24 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$b = -24 \quad a = 16$$

$$b = 23 \quad a = 31$$



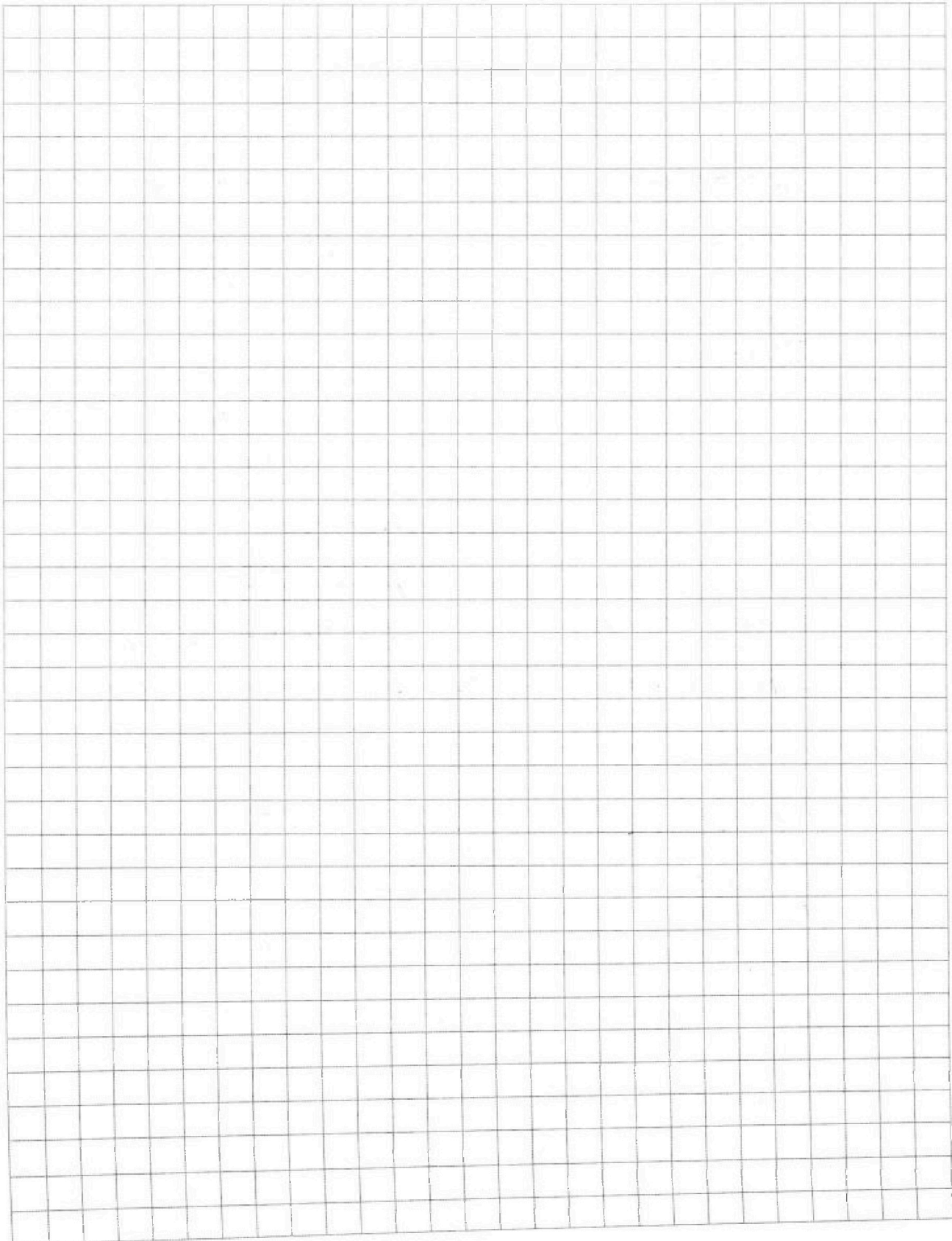


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер странички и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



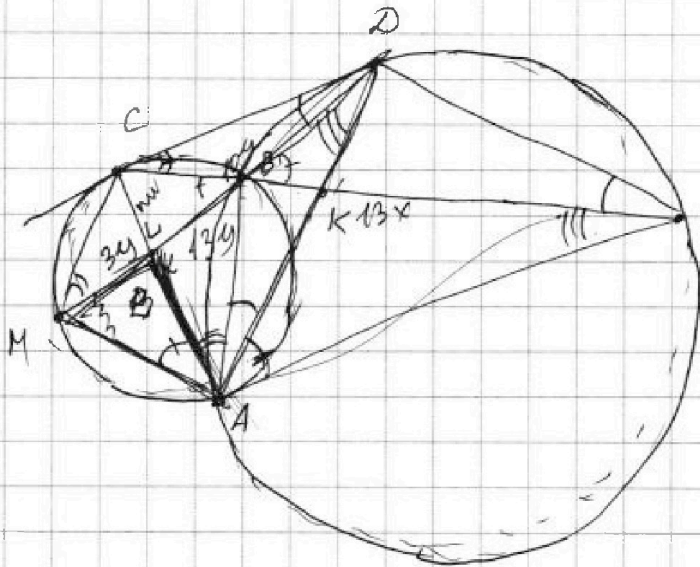
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{MC}{CO} = \frac{CO}{EO} = \frac{MO}{CE} = K$$

$$\frac{MA}{AC} = \frac{AO}{AE} = \frac{MO}{CE}$$

$$\frac{MC}{CO} \cdot \frac{MA}{AC} = \frac{CO \cdot AO}{EO \cdot AE}$$

$$\frac{S_{MAC}}{S_{ACO}} = \frac{S_{ACO}}{S_{AOE}}$$

1) $\triangle MCO \sim \triangle COE$ (из св-ва касан) $\Rightarrow \frac{MC}{CO} = \frac{CO}{EO} = \frac{MO}{CE}$

2) $\triangle AKE \sim \triangle BKO \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{KE}{KO} = \frac{AE}{BO} \Rightarrow \frac{AK}{KE} = \frac{BK}{KO} = \frac{AB}{BO}$

3) $\triangle MLC \sim \triangle ALB \Rightarrow \frac{ML}{AL} = \frac{MC}{AB} = \frac{LC}{LB}$; $\frac{MC}{CO} = \frac{CO}{EO}$; $\frac{AB}{BO} = \frac{AK}{KO}$

$$AK = \frac{AB \cdot AK}{BO} \cdot \frac{BO}{AE}$$

$$\frac{AB \cdot LC}{LB} = \frac{CO^2}{EO} \quad KE \cdot AC = AK \cdot AE = CK \cdot AE$$

$$\frac{CO^2}{EO} = \frac{AK \cdot LC}{LB \cdot KO}$$

$$AK = \frac{AE \cdot BK}{BO} = \frac{AB \cdot AE}{BO} \quad \frac{EO \cdot AK \cdot LC}{LB \cdot KO} = \frac{CO^2}{EO} \Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\triangle MAO \sim \triangle CAE$$

$$\frac{MO}{AO} = \frac{AO}{AE}$$

$$MO \cdot AO = MA \cdot AO$$

$$\frac{MO}{CE} = \frac{MA}{AC} = \frac{AO}{AE}$$

$$= \frac{AK}{AE} = \frac{KO}{AE}$$

$$\frac{AK}{AE} = \frac{BK}{BO}$$

$$\frac{MA}{AC} = \frac{AO}{AE}$$

$$\frac{MA}{AC} = \frac{AO}{AE} = \frac{CO}{EO} = \frac{MC}{CO}$$

$$\frac{MC}{EO} = \frac{MA \cdot AO}{AC \cdot AE} = \frac{S_{MAO}}{S_{CAE}} = K^2$$

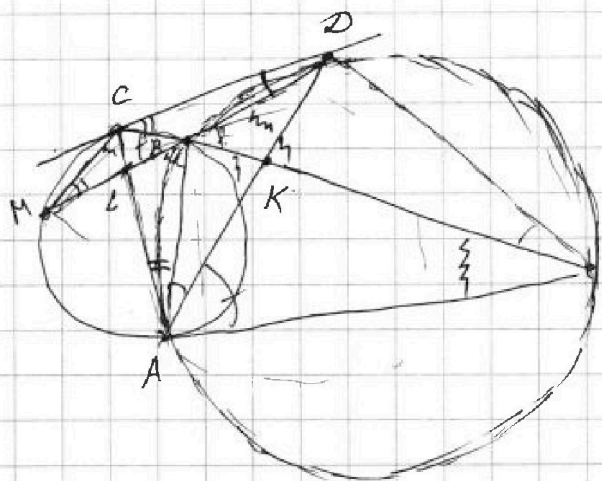


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AK}{KE} = \frac{BK}{DK} = \frac{BD}{AE}$$

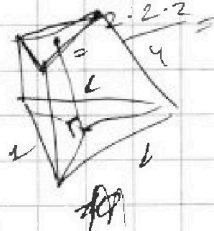
$$g = \sqrt{2}$$

$$\frac{AK}{10x} = \frac{BD}{AE}$$

$$x = -5$$

$$\sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}, 2, 4$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$



$$\triangle CDE \sim \triangle MCD$$

$$\frac{MD}{CE} = \frac{CD}{CM} = \frac{MC}{CD} = \frac{CD}{ED}$$

$$\triangle MCB \sim \triangle ABC$$

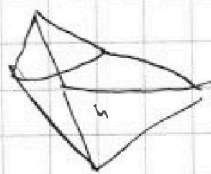
$$\frac{MC}{AB} = \frac{MB}{AC} =$$

$$\frac{DB}{AE} = \frac{BK}{AK}$$

$$g^2 = \sqrt{2}$$

$$13 \cdot (-5) = -65$$

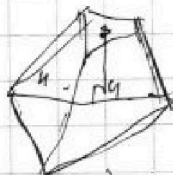
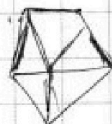
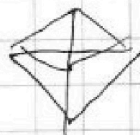
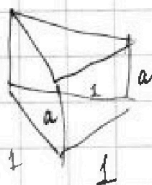
$$-100 \cdot (-4) = 20$$



$$\sqrt{\frac{-100}{-4^3}} = \sqrt{\frac{10^2}{4^3}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{10}{4^3}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{10}{4} \cdot 8 = 10 \sqrt{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p, \quad p \in [-10; 10]$$

$$\cos 3x + 3 \cdot (2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$6 \cos^2 x + 6 \cos x + \cos 3x = p - 3 \quad \begin{matrix} 4t^2 + 6t + 3 = \\ = 36 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0 \end{matrix}$$

$$\cos x \cdot (\cos 2x - 2 \sin^2 x) =$$

$$= \cos x \cdot (2 \cos^2 x - 1 - 2 \cdot (1 - \cos^2 x))$$

$$= \cos x \cdot (4 \cos^2 x - 3) =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p + \begin{matrix} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x \end{matrix}$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - p = p + 1$$

$$12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$D = 144 - 36 = 108$$

$$t = -\frac{1}{2} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) =$$

$$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= \cos 2x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= \cos x \cdot (\cos 2x - 2 \sin^2 x)$$

$$\cos x \cdot (2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x) =$$

$$= 2 \cos x \cdot \cos 2x - \cos x$$

$$\cos x \cdot (2 \cos^2 x - 2 \cos^2 x - 1 - (1 - 2 \sin^2 x))$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = (p+1)$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x =$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$12 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = (p+1) \cos^3 x + (6-p) \cos^2 x + 3 \cos x$$

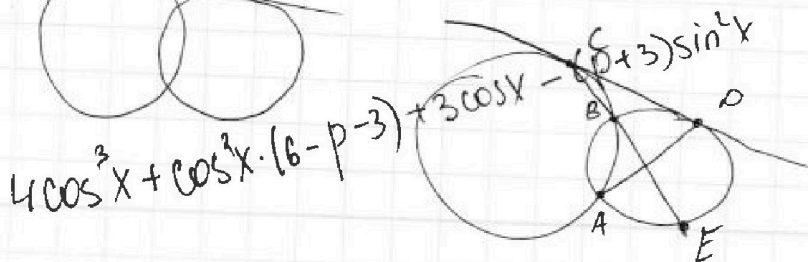
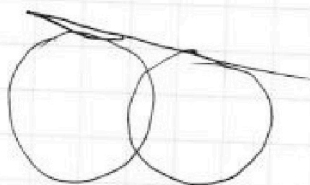
$$\begin{matrix} \cos x = -1 \\ \cos x = 1 \\ x = \pi \text{ или } 0 \end{matrix}$$

$$-1 - \min$$

$$1 - \max$$

$$\rightarrow 4 + 6 - 3 - 3 =$$

$$= [4; 10]$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x})^2$$

$$= x+3+4-x+2\sqrt{(x+3)(4-x)} = (2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5)^2$$

$$\neq 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = (2\sqrt{(x+3)(4-x)} - 5)^2$$

$$t+12 = t^2$$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

$$t = -4 \quad (t-4)(t-3) = 0$$

$$t = 3$$

$$t = 4$$

$$t = 3$$

$$(x+3)(4-x) = 36$$

$$7-t = (t-5)^2$$

4.

$$-4x^2 + 4x + 42 = 9$$

-4x

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$4(-x^2 + x + 12) = 9$$

$$7-t = t^2 - 10t + 25$$

$$t - 9t + 12 = 0$$

$$t = 6$$

$$t = 3$$

$$D = 16 + 16 \cdot 39 = 640$$

$$= 16 \cdot 4 \cdot 10 = 640$$

$$= 8 \cdot \sqrt{10}$$

$$= \frac{4 \pm 8\sqrt{10}}{8} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$$

$$2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 6$$

$$(x+3)(4-x) = 9$$

$$-x^2 + x + 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \sqrt{10} \approx -3$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{10} \approx 3.5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$