



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - первый член прогрессии, q - её разность \Rightarrow

$$bq^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad \text{— десятый член} \quad (1)$$

$$bq^{11} = 2-x \quad \text{— двенадцатый член} \quad (2)$$

$$bq^{12} = \frac{\sqrt{25x+34}}{(3x+2)^3} \quad \text{— двенадцатый член} \quad (3)$$

Условия, при котором все члены существуют:

$$\frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \Rightarrow$$



$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \quad (*)$$

$$\frac{(3)}{(1)} : q^8 = \frac{\sqrt{25x+34}}{(3x+2)^3 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

Т.к. $q^8 > 0$, то:

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad (4)$$

$$\frac{(2)}{(1)} : q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \quad \wedge (4) :$$

$$q^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^4} \quad \text{— с учетом (4) :$$

$$\frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^4} \quad | \cdot (3x+2)^2 \neq 0$$

$$1 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} \Rightarrow$$

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (2-x)^2 = 25x+34 \\ (2-x)^2 = -25x-34 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+4 = 25x+34 \\ x^2-4x+4 = -25x-34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases}$$

По теореме Виета находим корни:

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = -1 \\ y = -19 \\ y = -2 \end{cases}$$

$x = -1$ - не удовлетворяет условию *

$x = \overset{30}{-19}$: т.к. $bq^3 > 0$, $q^2 > 0$ то $bq'' > 0$.
но при $x = \overset{30}{-19}$: $bq'' = 2 - 30 = -28 \Rightarrow$
 $x = 30$ - не удовлетворяет.

при $x = 2$: $bq'' = 2 - x = 0$. При этом \Rightarrow
в таком случае и bq^3 , и bq^{12} должны
равняться 0, но: $bq^3 = \sqrt{(-50+34)(-6+2)} =$

$$\begin{aligned} \text{при } x = 2: \quad bq^3 &= \sqrt{(-50+34)(-6+2)} = \sqrt{16 \cdot 4} \\ &= 8 \\ bq'' &= 4; \quad bq^{12} = \sqrt{\frac{-16}{-64}} = \frac{1}{2} \\ \frac{bq''}{bq^3} &= q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{bq^{12}}{bq''} &= q^6 = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^6 \text{ - удовлетворяет.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = -19: \quad bq^3 &= \sqrt{(-475+34)(-55)} = 21\sqrt{55} \\ bq'' &= 2+19 = 21; \quad bq^{12} = \sqrt{\frac{-441}{(-55)^3}} = 21 \cdot \sqrt{\frac{1}{55}} \\ \frac{bq''}{bq^3} &= q^2 = \frac{21}{21\sqrt{55}} = \frac{1}{\sqrt{55}}; \quad \frac{bq^{12}}{bq''} = q^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{55}}\right)^3 = \left(q^2\right)^3 \text{ -} \\ &\text{удовлетворяет} \end{aligned}$$

Ответ: $x = -2$; $x = -19$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + z = 2\sqrt{y-3x-x^2}z \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

Исследуем второе уравнение:

$$400 - z^2 \geq 0, \Rightarrow z \in [-20; 20].$$

Максимальное значение $\sqrt{400-z^2}$ достигается при минимальном z^2 , т.е. при $z=0$

$$\Rightarrow \sqrt{400-z^2} \leq 20$$

Пусть $k = |y+2| + 2|y-18|$

1) $y \leq -2$: $k = -y-2 - 2y+36$ при $y=-2$
 $k = -3y+34 \Rightarrow k \in [40; +\infty)$

2) $-2 \leq y \leq 18$: $k = y+2 - 2y+36$ при $y=18$
 $k = -y+38 \Rightarrow k \in [20; 40]$

3) $y \geq 18$: $k = y+2 + 2y-36$ при $y=-2$
 $k = 3y-34 \Rightarrow k \in [20; +\infty)$ при $y=18$

Таким образом, минимальное значение $k = 20$.

$$\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y+2| + 2|y-18| \geq 20 \\ \sqrt{400-z^2} \leq 20 \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y+2| + 2|y-18| = 20 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ z = 0 \end{cases} \text{ - с учетом этого первое уравнение системы имеет вид:}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 2 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

Разложим $18-3x-x^2$ на множители:

$$18-3x-x^2=0 \Rightarrow x^2+3x-18=0$$

По теореме Виета: $\begin{cases} x=-6 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow$

$$18-3x-x^2 = -(x+6)(x-3) = (x+6)(3-x) \Rightarrow$$

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$~~

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -6 \leq x \leq 3 \quad (*)$$

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7 \quad | \wedge 2$$~~

~~$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} + 3-x = 4(x+6)(3-x) - 20\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$~~

~~$$4(x+6)(3-x) - 20\sqrt{(x+6)(3-x)} + 40 = 0$$~~

Пусть $t = \sqrt{(x+6)(3-x)}$:

~~$$4t^2 - 20t + 40 = 0 \quad | : 2 \Rightarrow$$~~

~~$$2t^2 - 10t + 20 = 0$$~~

~~$$D = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 0 \Rightarrow$$~~

~~$$t_1 = \frac{10-0}{4}$$~~

~~$$t_2 = \frac{10+0}{4}$$~~

~~$$t_1 = \frac{5}{2}$$~~

~~$$t_2 = 5$$~~

$$1) \sqrt{(x+6)(3-x)} = \frac{5}{2}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = \frac{25}{4}$$

$$-x^2 - 3x + \frac{47}{4} = 0$$

$$x^2 + 3x - \frac{47}{4} = 0$$

$$D = 9 + 47 = 56$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$2) \sqrt{(x+6)(3-x)} = 4$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16$$

$$-x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 = 17, \Rightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Оценим эти значения

$$1) \frac{-3 - \sqrt{56}}{2} < \frac{-3 - 8}{2} < \frac{-3 - \sqrt{56}}{2} < \frac{-3 - 7}{2} \Rightarrow \frac{-11 - 3 - \sqrt{56}}{2} < -5 -$$

удовлетворяет

$$2) \frac{-3 + 7}{2} < \frac{-3 + \sqrt{56}}{2} < \frac{-3 + 8}{2} \Rightarrow 2 < \frac{-3 + \sqrt{56}}{2} < \frac{5}{2} -$$

удовлетворяет (*)

$$3) \frac{-3 - 5}{2} < \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < \frac{-3 - 4}{2} \Rightarrow -4 < \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < -\frac{7}{2} -$$

$$4) \frac{-3 + 4}{2} < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < \frac{-3 + 5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < 1 -$$

удовлетворяет (*)

Ответ: $(x; y; z): \left(\frac{-3 - \sqrt{56}}{2}; 18; 0 \right),$
 $\left(\frac{-3 + \sqrt{56}}{2}; 18; 0 \right), \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right), \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; 18; 0 \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$; $a \neq b \pmod{3}$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -992/2 \\ -8 \\ 496 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2/8 \\ b-c = -1/12 \end{cases}$$

992		2	
496		2	
248		2	= 31 · 32
124		2	
62		2	
31		31	

$a = b$
 $a < b$ X

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases}$$

попробуем

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

$$b > a \Rightarrow$$

$$b-c > a-c \Rightarrow \text{т.к. } p^2 > 1, \text{ то } p \neq 2.$$

$$\Rightarrow \text{отм. 2: } \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a+b = -1-p^2 \\ a^2+b = 1000 \end{matrix}$$

$$-(1-p^2)a = 1000 - a^2$$

$$b-a = p^2 - 1$$

$$b-a = (p-1)(p+1)$$

$p \neq 2$, т.к. $b-a : 3$
 $p = 3 : b-a = 8$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$b-a = p^2 - 1$$

$$b-a = (p-1)(p+1)$$

~~$p = 5$~~ $p = 5$ и $p = 7$:
 p имеет ост. 1 или 2

$$\Rightarrow p = 3 - \text{ср. реш.} \Rightarrow$$

$$b-a = 8 \Rightarrow b = 8+a$$

$$a^2 + a + 8 = 1000$$

$$a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow$$

$$a_1, a_2 = -992$$

$$a_1, a_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ a = 31 \end{cases}$$

$p-1$ или $p+1$
решения
ка 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3p \cos x + 12 \cos x - 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

пусть $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$p = -\frac{1}{t^3} - \frac{3t + 1}{t^2}$$

$$p = -\frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^2} - \frac{3}{t}$$

пусть $a = \frac{1}{t} \Rightarrow$

$$p = -a^3 - 3a^2 - 3a$$

$$p' = -3a^2 - 6a - 3 = -3(a+1)^2$$

$$\Rightarrow p' \leq 0 \text{ при всех } a.$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \Rightarrow$$

$$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty).$$

Ответ: $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

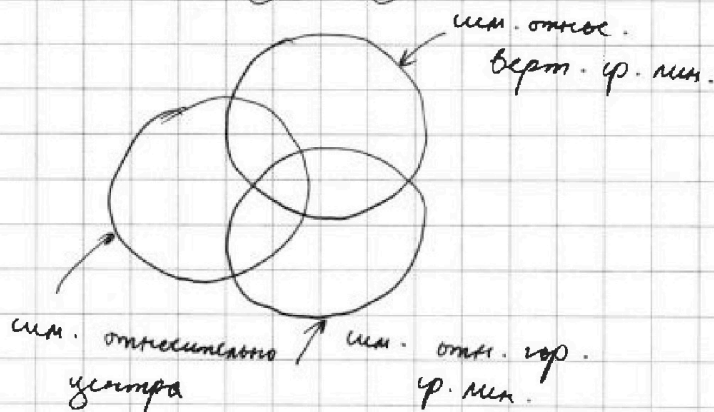
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15.

У нас есть три множества случаев:

- 1) Симметрия относительно горизонтальной средней линии.
- 2) Симметрия относительно вертикальной средней линии.
- 3) Симметрия относительно центра.

Если изобразить их с помощью кругов Эйлера:



Имеется пересечение этих множеств:

- 1) Допустим, какая-то точка симметрична одному допустим, для нас во всех точках обладают допустим, выбранные точки симметричны и относительно верт., и относительно гор. ср. линии. Введем систему координат с центром в центре нашего прямоугольника и ищем точку из таких точек:
 $A(x_i, y_i)$.

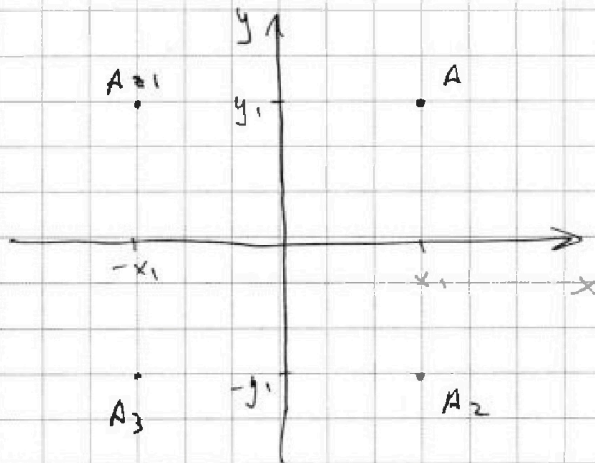


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



сим. отн. верт. ф. линии

\Rightarrow есть т. $A_1(-x_1; y_1)$

сим. отн. ~~ф~~ гор. ф. линии

\Rightarrow есть т. $A_2(x_1; -y_1)$

симметрия т. A_1 отн.

гор. и т. A_2 отн.

вертикали дают точку

$A_3(-x_1; -y_1)$. - как мы

видим, выполняются все три вида симметрии.

2) Допустим, наобороте т. сим. отн. центра и гор. ф. линии \Rightarrow рассмотрим $A(x_1; y_1)$

A отн. гор $\rightarrow A_2(x_1; -y_1)$

A отн. центра $\rightarrow A_1(-x_1; -y_1)$

A_1 отн. гор и A_2 отн.

центра $\rightarrow A_3(-x_1; y_1)$

Снова все виды симметрии

3) Для симметрии относительно верт. ф. линии и центра доказываемся аналогично \Rightarrow

закрашенное мн. точек удов. либо одной из симметрий, либо всем 3 сразу.

4) Для симметрии относительно гор. или верт. выбираем n точек в половине поля, остальные однозначно определяются: $S_1 = \frac{30000!}{4! 29996!}$

$S_1 =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Для симметрии относительно центра:

$$S_2 = \frac{60000 \cdot 59998 \cdot 59996 \cdot 59994}{4!}$$

6) Для всех симметрий одновременно:

выбираем 2 точки в центре поля, остальные одну можно определить \Rightarrow

$$S_3 = \frac{15000 \cdot 14999}{2!}$$

7) При $2S_1 + S_2$ - количество S_3 будет

получено 3 раза \Rightarrow исковое S :

$$S = 2S_1 + S_2 - 2S_3 \Rightarrow$$

$$S = 2 \cdot \frac{30000!}{4! \cdot 29998!} + \frac{60000 \cdot 59998 \cdot 59996 \cdot 59994}{4!} - 2 \cdot 15000 \cdot 14999$$

$$\text{Ответ: } S = 2 \cdot \frac{30000!}{4! \cdot 29998!} + \frac{60000 \cdot 59998 \cdot 59996 \cdot 59994}{4!} - 15000 \cdot 14999$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и б.

1) $(a-c)(b-c)$ - простое в квадрате \Rightarrow

$(a-c)(b-c) = p^2$. Т.к. $(a-c)$ и $(b-c)$ - целые, возмозможны варианты:

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow b < a - \text{не ую. I условие}$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow b < a - \text{не ую. I условие}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow a = b - \text{не ую. I условие}$$

Остается 2 варианта:

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

при возмозможности из второго уравн. первое в обеих случаях получим:

$$b-a = p^2 - 1 \Rightarrow$$

$$b-a = (p-1)(p+1)$$

1) Если $p=2$, то $b-a=3$ - цел. II не выполн.

2) Если $p=3$, то $b-a=8$ - цел. II выполнено

3) Если $p > 3$, то $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$

либо $(p-1)$, либо $(p+1)$ делится на 3 \Rightarrow

$b-a$ делится на 3 \Rightarrow условие II не выполняется

$\Rightarrow p=3$ - единственное значение $p \Rightarrow$

$b-a=8 \Rightarrow b=a+8$ - подставим

в IV условие.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + a + 8 = 1000$$

$$a^2 + a - 992 = 0 \Rightarrow \text{по теореме Виета:}$$

$$\begin{cases} a = -32 \\ a = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-32; -24) \\ (31; 39) \end{cases}$$

(учитывая то, что $p = 3$, подставим в наши случаи:

$$\begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = -9 \\ b - c = -1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} -32 - c = -9 \\ -24 - c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = -23$$

$(-32; -24; -23)$

или

$$\begin{cases} 31 - c = -9 \\ 39 - c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 40$$

$(31; 39; 40)$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = 9 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} -32 - c = 1 \\ -24 - c = 9 \end{cases} \Rightarrow c = -33$$

$(-32; -24; -33)$

или

$$\begin{cases} 31 - c = 1 \\ 39 - c = 9 \end{cases} \Rightarrow c = 30$$

$(31; 39; 30)$

Ответ: $(-32; -24; -23); (31; 39; 40); (-32; -24; -33); (31; 39; 30)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ 13 _
ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2 (3x+2)^2}$$

$$1 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2} \Rightarrow (2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$\begin{cases} (2-x)^2 = 25x+34 \\ (2-x)^2 = -25x-34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 25x + 34 \\ x^2 - 4x + 4 = -25x - 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 30: \begin{cases} b_{q^0} = \sqrt{784(92)} = 28\sqrt{92} \\ b_{q''} = -28 \\ b_{q^{1/2}} = \sqrt{\frac{784}{(92)^2}} = \frac{28}{92} \\ b_{q^8} = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow q^8 = \frac{1}{55^2} \\ q^4 = \frac{1}{55} \\ q = \sqrt[4]{\frac{1}{55}} \end{cases}$$

$$x = -19: \begin{cases} b_{q^0} = \sqrt{475 \cdot 55} \\ b_{q''} = 21 \\ b_{q^{1/2}} = \sqrt{\frac{475}{55^2}} \\ b_{q^{1/2}} = \sqrt{\frac{509}{55^2}} \end{cases}$$

$$x = -2: \begin{cases} b_{q^{1/2}} = 0 \\ b_{q^0} = \sqrt{(34-50)(2-6)} = 0 \end{cases}$$

Ответ: -19.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \Rightarrow$$

$$bq^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$bq^{11} = 2-x$$

$$bq^{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$q > 0$

$$x = \frac{-34}{25}$$



$$\Rightarrow q^9 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow q = (3x+2)^{-\frac{2}{9}}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{(3x+2)^2} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \quad q = (3x+2)^{-\frac{2}{9}}$$

$$\frac{b^2}{(3x+2)^4} = b^2 q^{18} = (25x+34)(3x+2)$$

$$bq^{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$b = (25x+34)(3x+2) \cdot \frac{(3x+2)^3}{25x+34}$$

$$b = \sqrt{(25x+34)(3x+2)^5}$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3 \cdot (25x+34)(3x+2)}}$$

$$bq^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

$$bq^{11} = 2-x$$

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$bq^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^4 = \frac{4-4x+x^2}{(25x+34)(3x+2)}$$

$$q^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2(3x+2)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик
 $\sqrt{3}$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x = \underline{4 \cos^3 x - 3 \cos x}$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 24 \cos x + 4 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad | \quad p t^3 = -3t^2 - 3t - 1$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad | \quad p = -3 \frac{t^2}{t^3} - 3 \frac{t}{t^3} - \frac{1}{t^3}$$

$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t^2(p t + 3) + 3t + 1 = 0$$

$$3t^2 \left(\frac{p t}{3} + 1 \right) + 3t + 1 = 0$$

$$9t^2 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$3t^2(3t+1) + 3t+1 = 0$$

$$3t(3t+1)(3t^2+1) = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{p t}{3} = 3t \quad p = -3 \frac{1}{t} - 3 \frac{1-t}{t^2}$$

$$p = -3a - 3a^2 - a^3$$

$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t = 0 \text{ - кор., если}$$

$$1 = 0 \text{ - X}$$

$$p = \frac{-3t^2 - 3t + 1}{t^3}$$

$$-1 < t < 0$$

$$a^2 - 6a - 3$$

$$p' = 3(a^2 - 6a - 3) \quad \Delta = 36 + 4 \cdot 3 = 48 \quad a \in \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$p = -3a - 3a^2 + a^3$$

$$p' = 3a^2 - 6a - 3 \quad p = -3a - 3a^2 + a^3$$

$$p = -a^3 - 3a^2 - 3a; \quad p' = -3a^2 - 6a - 3 = -3(a^2 + 2a + 1) =$$

$$p' = 0 \quad \text{при } a = -1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черк.

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$pt^3 = -3t^2 - 3t - 1$$

$$p = -3 \frac{t^2}{t^3} - 3 \frac{t}{t^3} - \frac{1}{t^3}$$

$$p = -3 \frac{1}{t} - 3 \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}$$

$$p(1) = -3 - 3 - 1 = -7$$

$$p(-1) = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow p \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$$

$$a = \frac{1}{t} \Rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$p = -3a - 3a^2 - a^3$$

$$p = -a^3 - 3a^2 - 3a$$

$$p' = -3a^2 - 6a - 3 = -3(a^2 + 2a + 1) = -3(a+1)^2 \Rightarrow$$

$$p' \leq 0, \Rightarrow a = -1$$



~~$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$~~

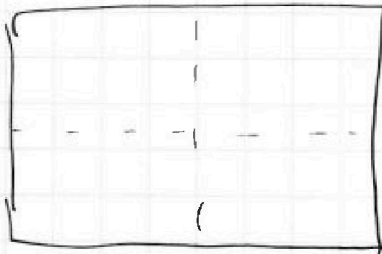
$$t = 1$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$-8t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$p = 0: 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

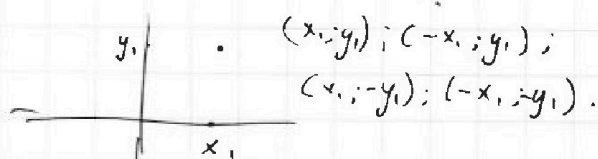
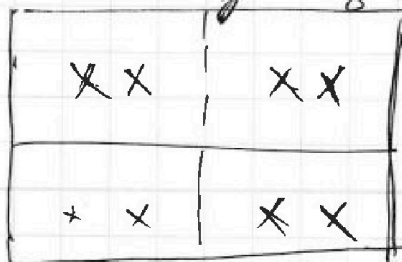
$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -12$$



площадь $500 \cdot 120 = 500 \cdot 60 \Rightarrow 30000$

$$\frac{3000 \cdot 2999 \cdot 2998 \cdot 2997}{4!} = 2 +$$

+(две четвр. ш.) : $\frac{6000 \cdot 5998 \cdot 5996 \cdot 5994}{4!}$



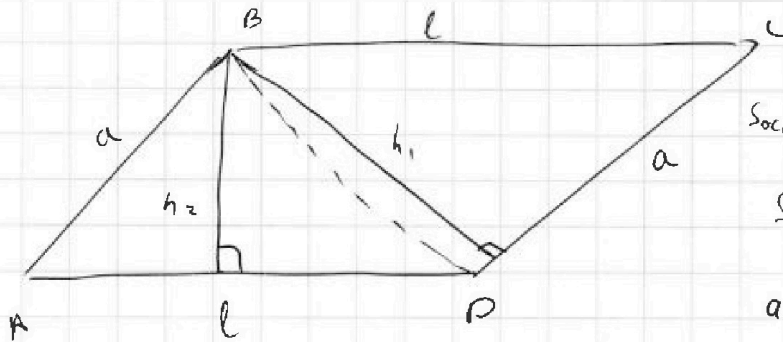


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\text{общ}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{общ}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{4S_{\text{общ}}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$$

$$ah_1 = b \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} h_1 = b \Rightarrow$$

$$h_1 = \frac{b \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$h_2 l = h_1 a \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{h_1 a}{l}$$

$$a = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{h_1} = \frac{l}{h_2}$$

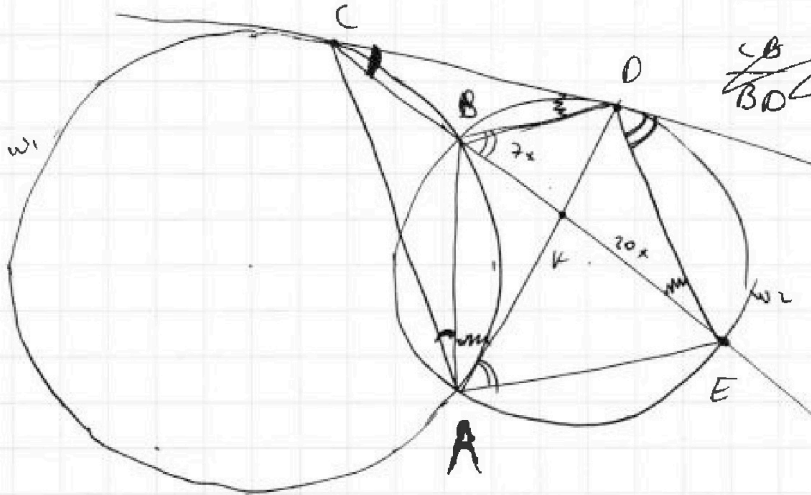
$$ah_1 = lh_2 \Rightarrow$$

$\triangle CBD \sim \triangle CDE \Rightarrow$

$$\frac{CB}{BD} = \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{BD}{DE} = \frac{DC}{EC}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$\begin{cases} a = -32 \Rightarrow b = -204 \\ a = 31 \Rightarrow b = 39 \end{cases}$$

$$(a; b) \rightarrow (-32; -24), (31; 39) \quad p = 3$$

$$\begin{aligned} a - c = -9 &\Rightarrow -32 - c = -9 \Rightarrow c = -23 \\ b - c = -1 &\Rightarrow -24 - c = -1 \end{aligned} \quad (-37; -24; -23)$$

$$\begin{aligned} a - c = 1 &\Rightarrow -32 - c = 1 \\ b - c = 9 &\Rightarrow 39 - c = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31 - c = -9 &\Rightarrow c = 40 \\ 39 - c = -1 &\Rightarrow c = 40 \end{aligned}$$

$$(31; 39; 40)$$

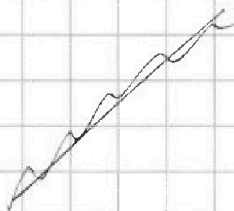
$$\begin{aligned} a - c = 1 &\Rightarrow -32 - c = 1 \\ b - c = 9 &\Rightarrow -24 - c = 9 \Rightarrow c = -33 \end{aligned}$$

$$(-32; -24; -33)$$

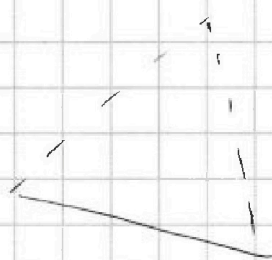
$$\begin{aligned} 31 - c = 1 &\Rightarrow c = 30 \\ 39 - c = 9 &\Rightarrow c = 30 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = 30$$

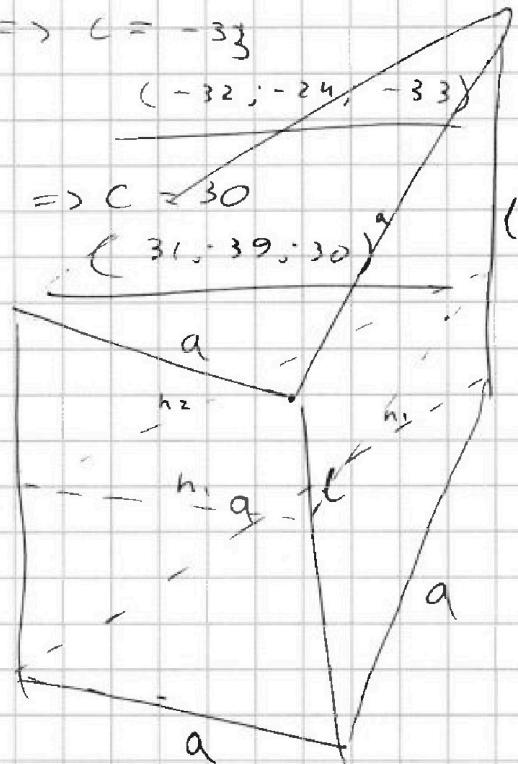
$$(31; 39; 30)$$



$$\begin{aligned} h_1 &= 6 \\ h_1 &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} h_2 &= 5 \\ \frac{h_1}{h_2} &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$



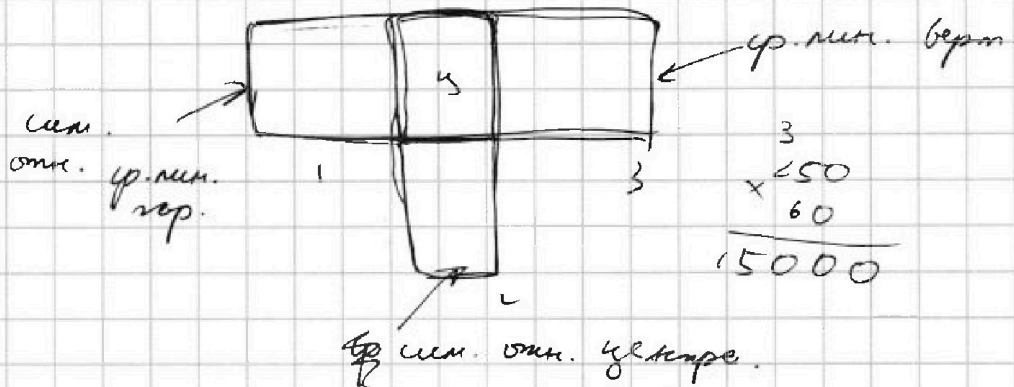
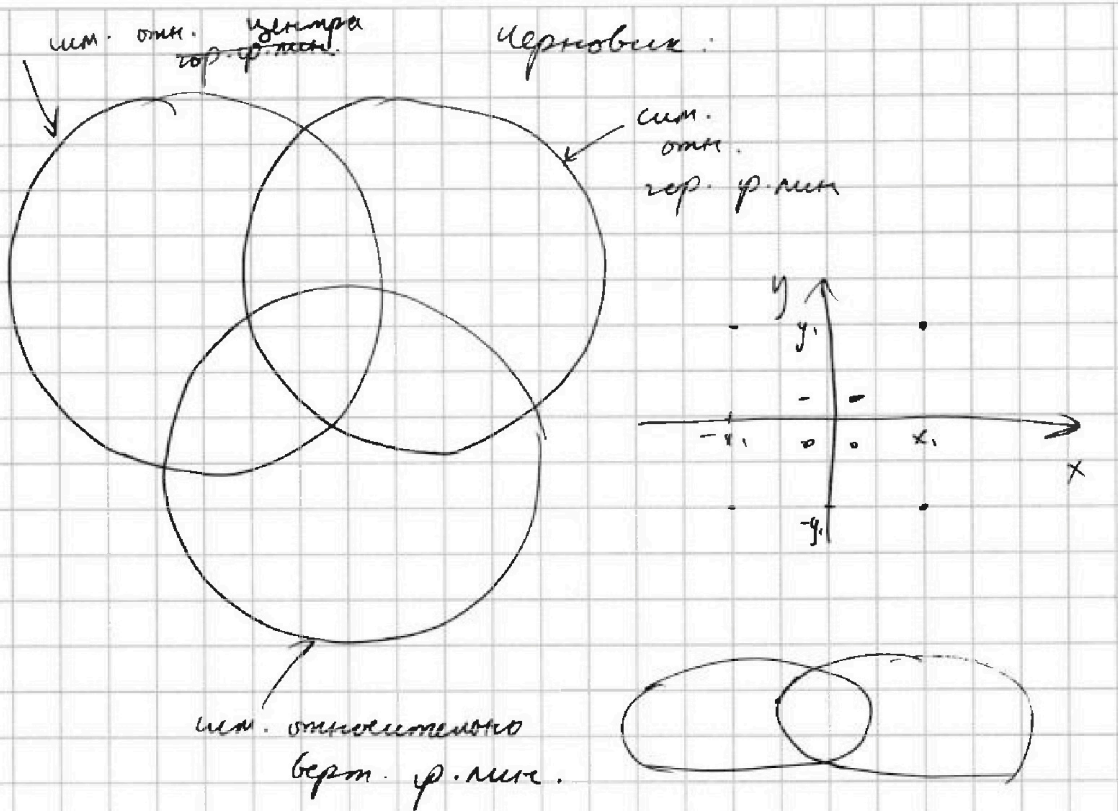


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



фр. сим. отн. центра.

$$y = \frac{15000 \cdot 14999}{2} = \frac{15000!}{2! \cdot 14998!}$$

$$S = 1 + 2 + 3 - 2g \Rightarrow$$

$$S = \frac{3000 \cdot 2999 \cdot 2998 \cdot 2997}{4!} \approx \frac{3000!}{4! \cdot 2996!}$$

$$S = 2 \cdot \frac{3000!}{4! \cdot 2996!} + \frac{6000 \cdot 5998 \cdot 5996 \cdot 5994}{4!} - \frac{15000!}{14998!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y = 18$; $z = 0$: черновик.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2-3x+18}$$

$$-x^2-3x+18 \geq 0$$

$$x^2+3x-18 \leq 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 18 = 81$$

$$x_1 = \frac{-3-9}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3+9}{2}$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 3$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 19 \\ \times 4 \\ \hline 72 \\ 72 \\ \hline 72 - 25 = \\ \hline 47 \\ \hline 3 \\ \times 4 \\ \hline 18 \\ 12 \\ \hline 30 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\Rightarrow -x^2-3x+18 = -(x+6)(x-3)$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-(x+6)(x-3)} \quad (1, 2)$$

\downarrow

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$-6 \leq x \leq 3$$

$$-6 \leq x \leq 3$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

$$\sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} + 3-x = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$9 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 4(x+6)(3-x) - 28\sqrt{(x+6)(3-x)} + 49$$

$$9 - 2t = 4t^2 - 28t + 49$$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 2 \cdot 20 = 9$$

$$t_1 = \frac{13-3}{4}$$

$$t_2 = \frac{13+3}{4}$$

$$-x^2-3x - \frac{4^2}{4} = 0$$

$$x^2+3x + \frac{4^2}{4} = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 < 0$$

$$\sqrt{(x+6)(3-x)} = t_1 = \frac{5}{2}$$

$$t_2 = 4$$

$$(x+6)(3-x) = 16$$

$$-x^2-3x+18 = 16$$

$$x^2+3x-2 = 0$$

\checkmark



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z^2}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$\sqrt{400-z^2} = \sqrt{(20-z)(20+z)} \quad z \geq -20$$

$$\Rightarrow z \in [-20; 20]$$

$$\begin{aligned} z &\leq 20 \\ -z &\leq 20 \\ -z &\geq -20 \end{aligned}$$

$$x \geq -6 \Rightarrow$$

$$3-x-2z \geq 0$$

$$y-3x-x^2$$

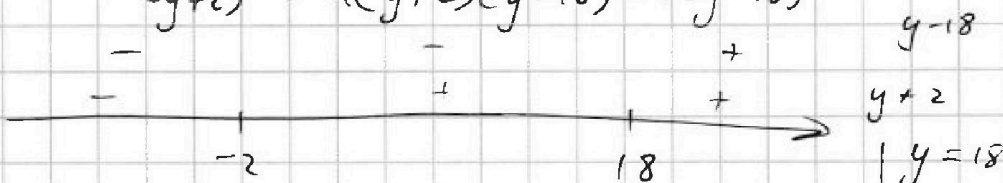
$$-x \leq 6$$

$$3-x \leq 3$$

$$3-x-2z \leq$$

$$|y+2| \geq 0$$

$$(y+2)^2 + 4(y+2)(y-18) + 4(y-18)^2$$



$$y \leq -2: \quad \begin{aligned} K &= -y-2-2y+36 \\ K &= -3y+34 \quad \rightarrow K_{\min} = 40 \end{aligned}$$

$$-2 \leq y \leq 18: \quad \begin{aligned} K &= y+2-2y+36 \\ K &= -y+38 \quad \Rightarrow \begin{cases} K_{\min} = 20 \\ y = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

$$y \geq 18: \quad \begin{aligned} K &= y+2+2y-36 \\ K &= 3y-34 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{400-z^2} = 20 \\ \Rightarrow \\ K = 3 \cdot 18 - 34 = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_{\min} = 20 \quad \Rightarrow K \geq 20 \quad \sqrt{400-z^2} \leq 20$$

$$\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| = 20$$