



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

арифметическая прогрессия  $a_n = a_1 + d(n-1)$

Заметим, что  $a_n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3 & (1) \\ a_5 = a_1 + 4d = x^2 + 4x + 3 & (2) \\ a_9 = a_1 + 8d = 3x^2 & (3) \end{cases}$$

тогда  $a_3 \in \mathbb{Z}$

$$a_3 = 3(x+1)$$

$$x+1 = \frac{a_3}{3}$$

$$x = \frac{a_3}{3} - 1 \in \mathbb{Q}$$

$$\downarrow \\ x \in \mathbb{Q}$$

$$(3) - (1) \Rightarrow \begin{cases} 6d = 3x^2 - 3x + 3 \\ 2d = x^2 - x - 1 \end{cases} \quad -4d = -2x^2 + 2x + 2 \quad (**)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow x^2 + 4x + 3 - 3x - 3 = -4d \quad (**)$$

$\Leftrightarrow$

$$(**) + (***) \rightarrow x^2 + 4x^2 + 4x^2 - 3x^2 = -2x^2 + 2x + 2$$

$$x^2 + 8x^2 - 3x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x^3 + 3x^2 - 2) = 0$$

$(x+1) \in \mathbb{Q}$

$$x+1=0 \quad \text{или} \quad x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x^3 + x^2 + 2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2(x+1) + 2(x+1)(x-1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

ни подходят, т.к.  $x \in \mathbb{Q}$

Значит  $x = -1$

Тогда берем

$$a_3 = 3x + 3 = 0 = a_1 + 2d$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = (1 - 2)^2 = 1 = a_1 + 4d$$

$$a_9 = 3x^2 = 3$$

$$2d = 1 \quad a_1 = -1$$

$$d = 0,5$$

$$a_3 = a_1 + 2d = -1 + 1 = 0$$

$$a_5 = a_1 + 4d = -1 + 2 = 1$$

$$a_9 = a_1 + 8d = -1 + 4 = 3$$

подходит

Ответ:  $x = -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Рассмотрим все возможные вариации свободных опираемых на ОТА

(1)  $A = 13p^2$   
 $B = 75q^2$   
 $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot p \cdot p$   $m+n > m+n-9 > 0$   
 $p, q$  - простое;  $m, n \in \mathbb{N}$

1)  $m+n = 13$   
 $m+n-9 = 4 = p^2$   
 $p = 2$   
 Тогда смотрим на B  
 $B = mn(m+n-3) = 5^2 \cdot 3 \cdot q^2$   
 $m+n-3 = 10 = 5q \Rightarrow q = 2$   
 Тогда  $mn = 15q = 5 \cdot 3 \cdot q$   
 $mn = 30$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=13-n \\ n(13-n)=30 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n \\ 13n-n^2=30 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n \\ n^2-13n+30=0 \end{cases} \quad \begin{cases} m=13-n \\ \text{т. Выход} \\ n_1=3 \\ n_2=10 \end{cases} \quad \begin{cases} m=10 \\ n=3 \\ n=10 \\ m=3 \end{cases}$$

2)  $m+n = 13p$   
 $m+n-9 = p^2$   
 $9 = 12p$  Не подходит, т.к.  $p \in \mathbb{N}$

3)  $m+n = p^2$   
 $m+n-9 = 13$   
 $m+n = 24 = 8 \cdot 3 \neq p^2$   
 не подходит

4)  $m+n-9 = 1$   
 $m+n = 13 \cdot p^2$   
 $m+n = 10 < 13 \cdot p^2$   
 не подходит.

(2)  $A = 75q^2$   
 $B = 13p^2$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 5^2 \cdot 3 \cdot q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \quad m+n-3 > 0$$

1)  $m+n-3 = 13$  посмотрим на A  
 $m+n = 16$   
 тогда  $m=n=p$   
 $m+n = 16$   
 $m+n-9 = 7$

$$A = (m+n)(m+n-9) = 16 \cdot 7 \neq 5^2 \cdot 3 \cdot q^2$$

не подходит

2)  $m+n-3 = p$   
 $m=p$   $n=13$   
 $m+n-9 = m$   
 $n-3=0$   
 Неверно

3)  $m+n-3 = 1$   
 $m+n = 4$   
 $mn = 13p^2$   
 посмотрим на A  $A = (m+n)(m+n-9) = -5 \cdot 4 \neq 75q^2$   
 не верно

4)  $m+n-3 = p^2$   
 $m=13$   $n=1$   
 $p^2 = 13+1-3 = 11$   
 $p^2 = 11$  Нет решений в  $\mathbb{N}$

Ответ: (3, 10); (10, 3)

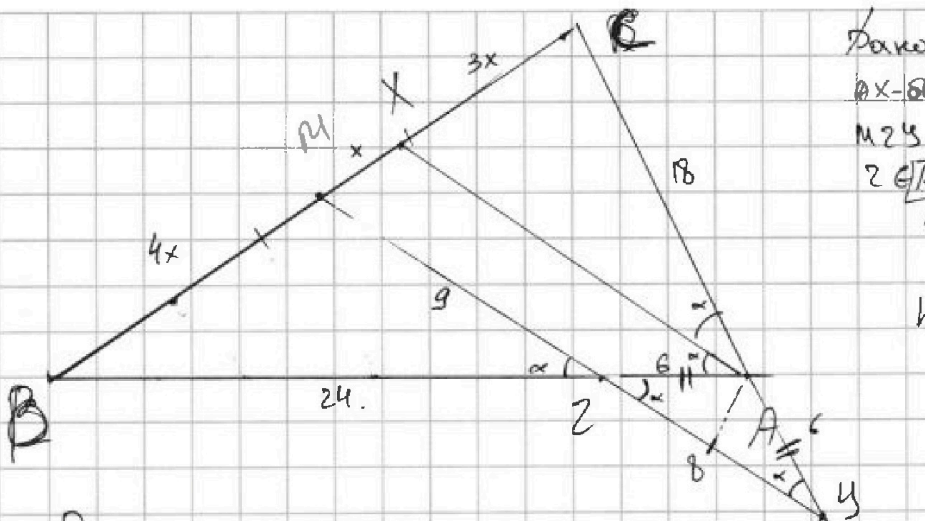


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $\triangle ABC$   
 $AX$  - медиана  
 $MY \parallel AX$   
 $Z \in [AB]$   $Y \in [CA]$   
 $AC = 18$   $AZ = 6$   
 $YZ = 8$   
 Найти:  $BC$

Решение:

1)  $AX \parallel MY \Rightarrow \angle XAC = \angle MYC = \alpha$  (как соответств.)  
 $\angle MZB = \angle AZY = \alpha$  (как вертикальн.)

2)  $\triangle AZY$  - равноб.  $\Rightarrow AZ = AY = 6$

3)  $\triangle MZB$  и  $\triangle AZY$  - подобные (по двум углам)

$$\frac{BM}{AZ} = \frac{AZ}{AY} = \frac{MZ}{ZY} \Rightarrow \frac{BM}{6} = \frac{6}{6} = \frac{MZ}{8} \Rightarrow MZ = 8$$

4)  $\triangle CAX \sim \triangle CMY$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{AX}{MY} = \frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$$\frac{18}{24} = \frac{AX}{MY} \Rightarrow AX = \frac{18}{24} \cdot 17 = \frac{3}{4} \cdot 17 = \frac{51}{4}$$

5)  $\triangle BMZ \sim \triangle BXA$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{MZ}{AX} = \frac{BM}{BX}$

$$\frac{BZ}{BZ+6} = \frac{8}{\frac{51}{4}} \Rightarrow \frac{BZ}{BZ+6} = \frac{32}{51} \Rightarrow 51BZ = 32BZ + 192 \Rightarrow 19BZ = 192 \Rightarrow BZ = \frac{192}{19}$$

6)  $\triangle BMZ \sim \triangle BXA$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{BM}{BX} = \frac{4}{5}$

$$BZ = \frac{4}{5} \cdot AB = \frac{4}{5} (BZ+6) \Rightarrow 5BZ = 4BZ + 24 \Rightarrow BZ = 24$$

$$5BZ = 4BZ + 24 \Rightarrow BZ = 24$$

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cos(180-2\alpha) AZ \cdot AY$$

$$64 = 36 + 36 - 2 \cos 2\alpha \cdot 36$$

$$\cos 2\alpha = \frac{-8}{72} = -\frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7)  $\triangle ABC$  — тупоугольный.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC.$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 30 \cdot 18^2$$

$$BC^2 = 900 + 324 + 120$$

$$BC^2 = 1020 + 324 = 1344$$

$$BC = \sqrt{1344} =$$

$$\text{Ответ: } BC = \sqrt{1344}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x+5y^2} & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:  $\begin{cases} y \leq 6 \\ x \geq -1 \\ 6+5x-x^2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$(2) \quad x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x+5y^2}$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})} = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((x^2 + y^2)(x+y) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1) = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)(x+y) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad a = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$x = y > 0$$

подставим в (1) и решаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{6+5x-x^2} - 5$$

$$\sqrt{x+1} + 6 - x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(6+5x-x^2) + 25 - 20\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\begin{cases} x \geq 6-5 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = t \geq 0$$

$$z - 2t = 4t^2 + 25 - 20t$$

$$4t^2 - 18t + 28 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 14 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{81 - 112} = 3$$

$$t_1 = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2} \quad t_2 = \frac{9+3}{4} = 3$$

Возвращаемся к старой переменной

$$1) \quad \sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 6 = \frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$4x^2 - 20x + 24 + 9 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 400 - 240 = 160$$

$$x_1 = \frac{20 - 4\sqrt{10}}{8} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$2) \quad \sqrt{(x+1)(6-x)} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 9$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 12 = 13$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_3 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

Ответ:  $\begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ y = \frac{15}{2} \end{cases}$   
 $\begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$   
 $\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

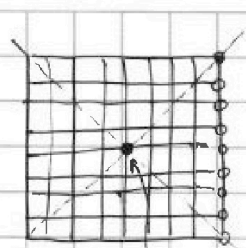


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



главная диагональ

Всего  $9 \cdot 9 = 81$  узел

Нужно выбрать 2 узла. Это можно сделать и затем их перекрестить  $C_{81}^2$  - способами.

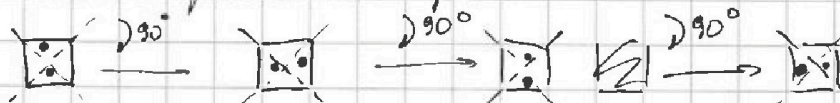
Если мы имеем какую-то раскраску, то из одной раскраски путем поворотов мы можем сделать либо 1 раскраску (если точки выбраны несимметрично относительно главной диагонали), либо 2 раскраски (если точки выбраны симметрично относительно главной диагонали).

Т.е. встает проблема выбора точки относительно главной диагонали:



при поворотах возникает лишь 2 различные комбинации

При несимметричном выборе:



возникло 4 разных комбинации.

1) Выбор точки симметрично отк. центра. Можно выбрать одну из 80 точек. Задаётся автоматически. Но мы считали случаи в  $2!$  раза, т.к. выбор 1а и автом. узел. 2а - есть кресторазогонный выбор.

Т.к. число возникающих комбинаций при поворотах = 2, то способов покрасить 2 точки, которые симметр. отк. центра,

равно  $\frac{80}{2 \cdot 2} = (20)$

2) Выбор точки несимметрично отк. центра.

~~Выбор из точек~~ I) одна из точек выбрана центральная, тогда число способов выбрать это = 30

Всего способов покрасить без поворотов  $\frac{80}{2} = 40$

Тогда 2а можно выбрать из  $81 - 1 - 1 = 79$  отк. центра равна

Всего способов:  $C_{79}^2 - 40 = \frac{79!}{2!} - 40 = \frac{79 \cdot 78}{2} - 40 = 3080 - 40 = 3040$

$\frac{79 \cdot 80}{4} =$  Тогда всего  $(81-1)40 = 3200$  Всего  $3040 + 3200 = 6240$

$\frac{6240}{4} = 1560$  Ответ: 1560

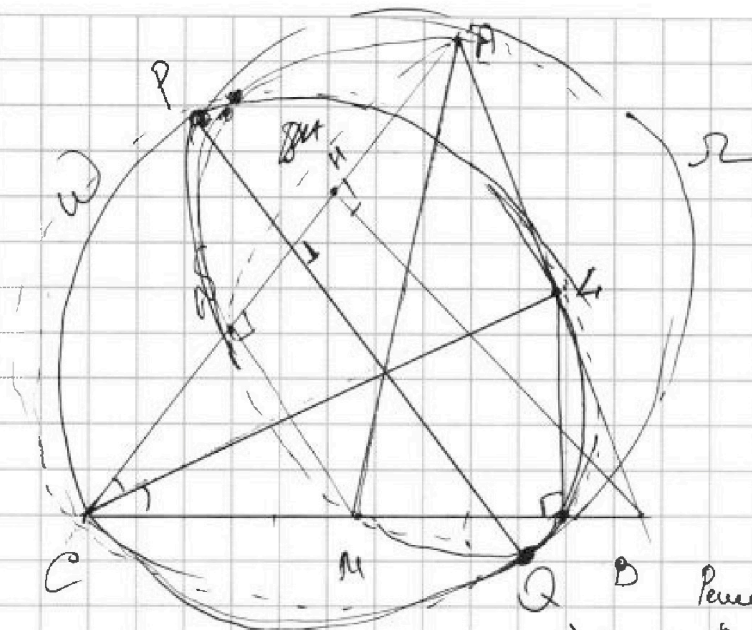
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



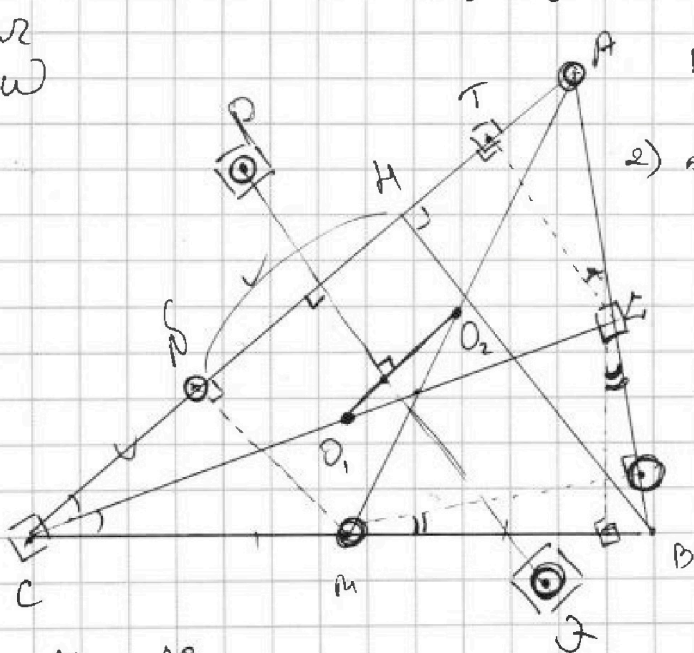
Дано:  $ABC$   
 $AM$  - медиана  
 $CL$  - биссектриса  
 $BH$  - высота  
 $\Omega$  - диаметр  $AM$   
 $W$  - диаметр  $CL$   
 $\Omega \cap W = P, Q$   
 $PQ \parallel BH$      $\Omega \cap AC = S$

$AB = 10$      $AN = 8$   
 Найти:  $AC, BC$ ?

Решение:

1)  $O_1$  - центр  $W$      $O_2$  - центр  $\Omega$   
 $O_1 O_2$  - средняя линия

$O_1 \in W$   
 $O_2 \in \Omega$



$O_1 O_2 \perp PQ$   
 $PQ \perp CA$ ,  $O_1 O_2 \perp PQ \Rightarrow O_1 O_2 \parallel AC$   
 (по аналогии)

2)  $\triangle CAH \sim \triangle CHB \Rightarrow$   
 $\frac{CH}{CB} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{2}$

$CH = 2 \cdot AH$

3)  $\triangle AHC \sim \triangle AHB$  (по углам)

$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AB}$

$HL \parallel HB \Rightarrow \frac{AT}{HT} = \frac{AL}{LB}$  (Парал.)

$CL$  - биссектр.  $\Rightarrow \frac{CA}{BC} = \frac{AL}{LB}$

$$\frac{AT}{HT} = \frac{AC}{BC}$$

4)

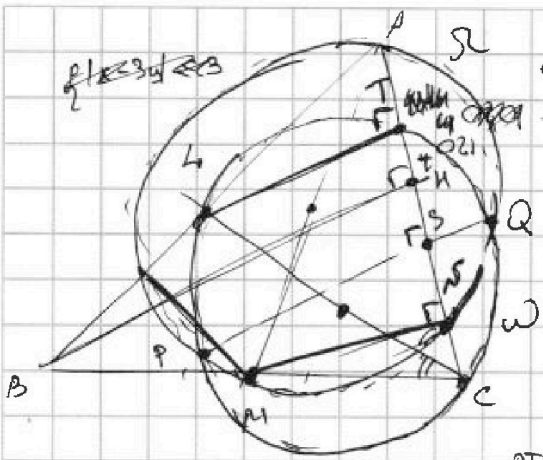


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновой и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1200

AF=B  
AP=B

AC=2  
BC=1

AM=2  
AN=2

AP=1  
AQ=1

AT/TH = AL/LD

AP=1  
AQ=1

AP=1  
AQ=1

CA/CA = ex/ex  
DA/DA = ex/ex

81/18

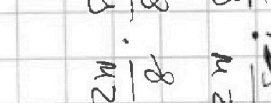
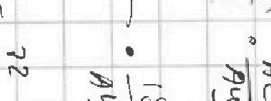
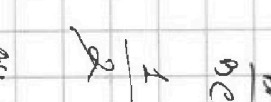
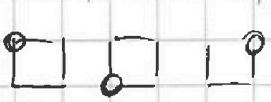
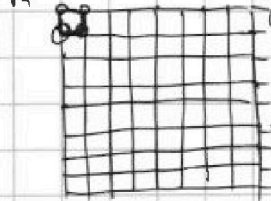
81/18

AC/AB = AC/AB  
AC/AB = AC/AB

AC/AB = AC/AB  
AC/AB = AC/AB

ex/DA = ex/DA  
ex/DA = ex/DA

ex/DA = ex/DA  
ex/DA = ex/DA



ay = 72/182

1/2 \* 18/182 = 1

1/2 \* 8/182 = 1

3

1-1/2 \* ex/DA  
F = ex/DA  
G = ex/DA

1-1/2 \* ex/DA  
G = ex/DA

1

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Арифметическая прогрессия  $a_n = a_1 + d(n-1)$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n \quad A = (m+n)^2 - 9(m+n)$$

$$B = mn + mn^2 - 3mn \quad B = mn(m+n-3)$$

$$A = (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117 \quad P = 3$$

$$B = mn(m+n-3) = 5^2 \cdot 9 = 225 \quad P = 3$$

0n7-001

$$a_3 = 3x + 3 = a_1 + 2d$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = a_1 + 4d$$

$$a_9 = 3x^2 = a_1 + 8d$$

$$3x^2 - 3x - 3 = 2d \Rightarrow 3(x+1) = a_1 + 2d$$

$$x^2 - x - 1 = 2d \Rightarrow (x(x+2))^2 = a_1 + 4d$$

$$3x^2 = a_1 + 8d$$

$$\begin{cases} 3(x+1) = a_1 + 2d \\ x(x+2)x(x+2) = a_1 + 4d \\ 3x^2 = a_1 + 8d \end{cases}$$

$$3(x+1) = 3x^2 - 3x - 3 \Rightarrow 2d = x^2 - x - 1$$

$$x^2 - x^2(x+2)^2 = 4d \Rightarrow (x+1)^2(1-x^2+4x-4) = 4d$$

$$-x^2(x^2+4x+3) = 4d \Rightarrow -x^2(x^2+4x+3) = 4(x^2 - x - 1)$$

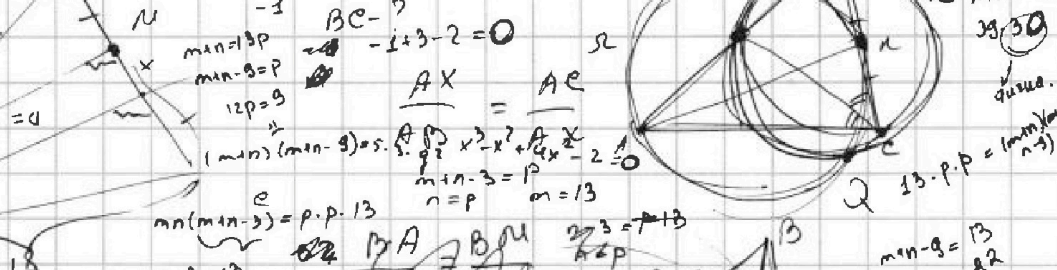
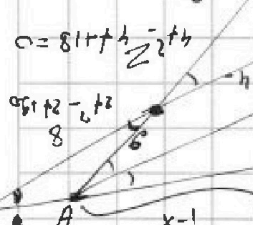
$$-x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 = 2d$$

$$3x^2 - 3x - 3 = 2d$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 = 3x^2 - 9x - 9$$

$$-1 + 3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

7. Мембраны + подобие



$$x^3 + 4x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x^2 - 3x - 3 = x^2 - x + 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 = x^2 - x + 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = -x^4 - 4x^3$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 3x + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = a_1 + 8d = 3x^2$$

$$ad = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3$$

$$gd = 3x^2 - 3x + 3$$

$$3x + 3 = a_1 + 2d$$

$$(x^2 + 2x)^2 = a_1 + 4d$$

$$3x^2 = a_1 + 8d$$

$$2d = x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 = -4d$$

$$x^4 + 4x^3 + x^2 = -4d$$

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2(x+1)x^3 + 3x^2(x+1) - 2(x+1) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \quad (1) \\ x-3y \geq -3 \quad (2) \\ 3x-y \leq 1 \quad (3) \\ 3x-y \geq -1 \quad (4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} (1)+(3) &\Rightarrow 4x-4y \leq 4 & (x-y \leq 1) \\ (2)+(4) &\Rightarrow 4x-4y \geq -4 & (x-y \geq -1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \quad (1) \\ x-3y \geq -3 \quad (2) \\ 3x-y \leq 1 \quad (3) \\ 3x-y \geq -1 \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1)+(2) &\Rightarrow 4x-4y \leq 4 \\ &\quad x-y \leq 1 \quad (*) \\ &\quad -x+y \geq -1 \quad (**) \end{aligned}$$

$$(*)+(**) \Rightarrow -2y \geq -4 \Rightarrow y \leq 2 \quad (***)$$

$$8x+4y = S = 4(2x+y)$$

$$\begin{aligned} (*) &\quad x-y \leq 1 \\ (**) &\quad -x+y \geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad x-3y &\leq 3 \\ -x+3y &\geq -3 \\ -2 &\geq y \geq \frac{-3+x}{3} \end{aligned}$$

$$-6 \geq -3+x \Rightarrow x \leq -3$$

Аналогично

$$\begin{aligned} y &\leq -2 & 4y &\leq -8 \\ x &\leq -3 & 8x &\leq -24 \end{aligned}$$

$$4y+8x \leq -32$$

$$S_{\max} = 8x+4y = -32$$

Ответ: -32

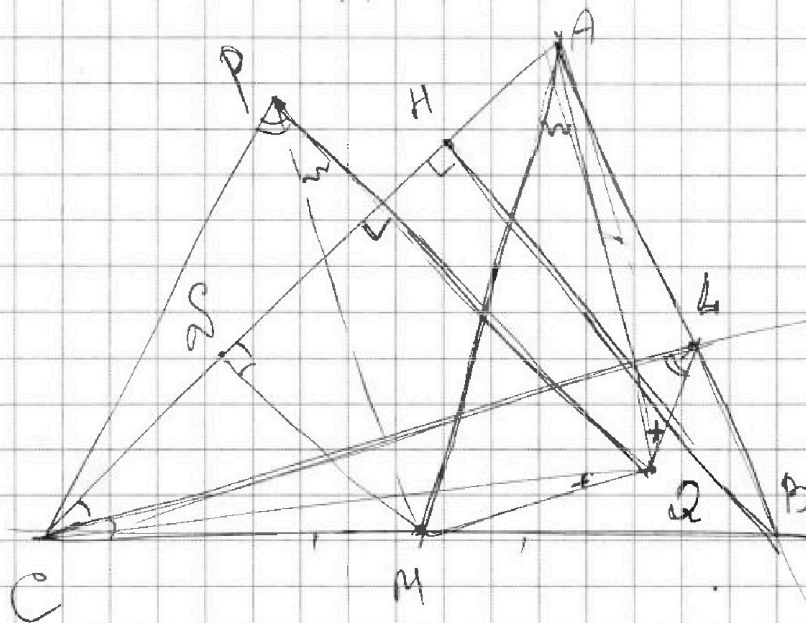
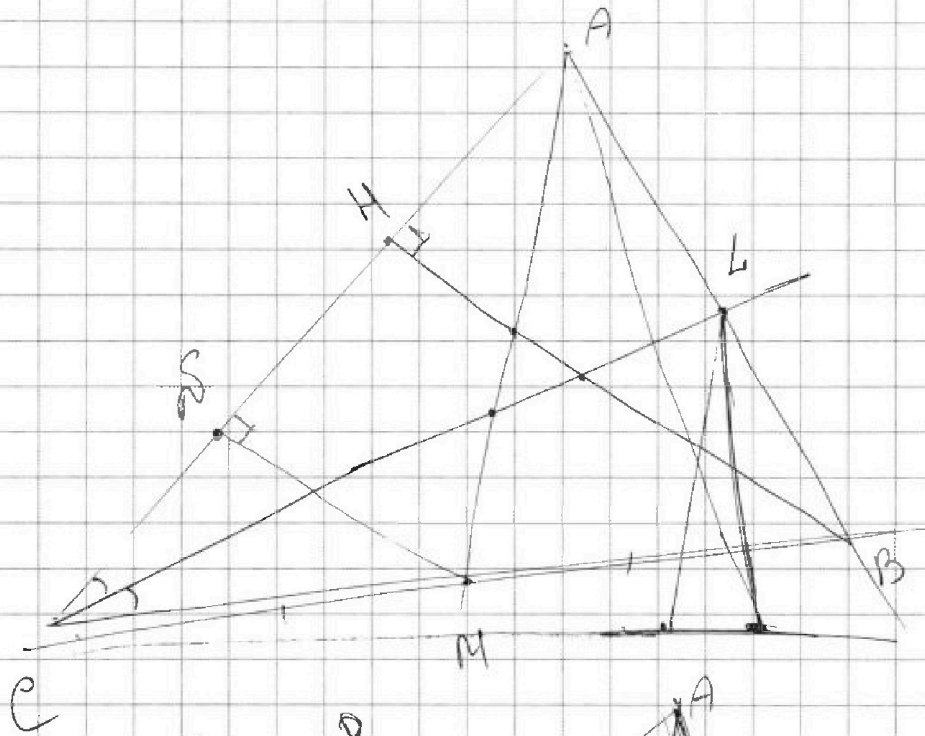


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

