



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(a_n) — арифм. прогрессия

$$a_3 = 3x + 3 \quad a_5 = (x^2 + 2x)^2 \quad a_7 = 3x^2$$

Пусть d — разность арифм. прогрессии (a_n) , тогда

$$\begin{cases} a_5 = a_3 + 2d \\ a_7 = a_3 + 6d \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d \\ 3x^2 = 3x + 3 + 6d \quad |:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d \\ 2d = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + x^2 - x - 1$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ — корень} \quad (-1)^4 + 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 2 =$$
$$= 1 - 4 + 3 + 2 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 & x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3} & x^3 + 3x^2 - 2 \\ -3x^3 + 3x^2 & \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} & -2x - 2 \\ & \underline{-2x - 2} \\ & 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ — корень}$$

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$$

~~$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 \\ \hline 2x^2 - 2 & \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 & x+1 \\ \hline x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \hline 2x^2 + 0x & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_4 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \quad x_5 = -1 + \sqrt{3}$$

Заметим, что $d \neq 0$.

$$2d = x^2 - x - 1 \text{ м.л.} \quad d = \frac{x^2 - x - 1}{2}$$

$$x^2 - x - 1 \neq 0$$

Случай:

~~$$x^2 - x - 1 = 0$$~~

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x \neq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $-1; -1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |12-3y| \leq 3 \\ |13x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |12-3y|-3 \leq 0 \quad | \cdot (12-3y+3) > 0 \\ |13x-y|-1 \leq 0 \quad | \cdot (13x-y+1) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y-3)(12-3y+3) \leq 0 \\ (13x-y-1)(13x-y+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y)^2 - 9 \leq 0 \\ (13x-y)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (12-3y)^2 - 9 \leq 0 \\ (13x-y)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

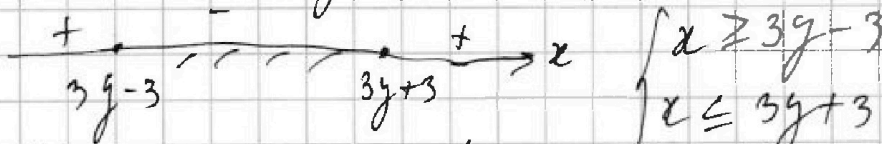
$$\begin{cases} (12-3y)^2 - 9 \leq 0 \\ (13x-y)^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y-3)(x-3y+3) \leq 0 \quad (1) \\ (3x-y-1)(3x-y+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y-3)(x-3y+3) \leq 0 \quad (1) \\ (3x-y-1)(3x-y+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

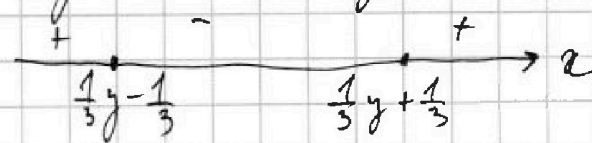
Ищем отрезок x :

1) Ищем: $x = 3y + 3$, $x = 3y - 3$



$$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \leq 3y + 3 \end{cases}$$

2) Ищем: $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$



$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \quad | \cdot 3 \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \quad | \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq y - 1 \\ 3x \leq y + 1 \end{cases}$$

Ищем:

$$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\ x \leq 3y + 3 \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x \geq \max(3y - 3; \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})$$

$$x \leq \min(3y + 3; \frac{1}{3}y + \frac{1}{3})$$

Но так как $3y + 3 > \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3} < 3y - 3$, то x было равно $\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$. Но для x и y были как можно больше. Но для x и y были как можно больше.

Итак: нет решения.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем:

$$\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 45q^2 \\ A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = \\ &= (m+n)(m+n-9) \\ B &= m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 13} \\ 25 \\ \hline 5 \\ 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \quad (1) \\ mn(m+n-3) = 3 \cdot 5^2 q^2 \quad (1) \\ (m+n)(m+n-9) = 3 \cdot 5^2 q^2 \quad (2) \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \quad (2) \end{cases}$$

1) Заметим, что $13p^2 > 0$ и $m+n > 9$ тогда $m+n-9 > 0$ м.е. $m+n > 9$ (м.к.маи-нам)

Заметим, что $m+n$ и $m+n-9$ взаимно просты, тогда $(m+n)(m+n-9)$ — четное. П.к. p — простое, то число $13p^2$ может быть четным только, если $p=2$. Имеем:

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 2^2, \quad m+n > 9$$

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m+n = 13$$

$$\begin{cases} m+n = 26 \\ m+n-9 = 2 \end{cases} \text{ f}$$

$$\begin{cases} m+n = 52 \\ m+n-9 = 1 \end{cases} \text{ f}$$

2) Заметим, что если $q \neq 2$, то $3 \cdot 5^2 q^2$ — нечетно, но если $mn(m+n-3)$ — четно было нечетно. м.е. m — нечетно, n — четно, $(m+n-3)$ — нечетно. $(m+n-3)$ — нечетно, тогда $mn(m+n-3)$ — нечетно. м.к. $m+n-3 > 0$, м.е. $m+n > 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Если $q \neq 2$: $mn(m+n-3) = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$, $m+n=13$~~

~~$10mn = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$ т.е. $2 \cdot 5mn = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$ т.е.~~

~~$2mn = 3 \cdot 5 \cdot q^2$~~

~~Если $q \neq 2$, то $3 \cdot 5q^2$ — нечетно, а $2mn$ — четно, угад.~~

$q=2$.

$2mn = 3 \cdot 5 \cdot 2^2$

Если $mn = 3 \cdot 5 \cdot 2$

$m+n=15$
 $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$ или

$\begin{cases} m=2 \\ n=15 \end{cases}$ или

$\begin{cases} m=5 \\ n=6 \end{cases}$ или

$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$ или

$\begin{cases} m=15 \\ n=2 \end{cases}$

или $\begin{cases} m=6 \\ n=5 \end{cases}$ $m+n=11 \neq 13$

$m+n=11 \neq 13$ т.е.

$\begin{cases} m=10 \\ n=3 \end{cases}$ или

$\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}$

$m+n=13, \neq$

2) ~~$mn(m+n-3) = 6(m+n)(m+n-9) = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$~~

$(m+n)(m+n-9)$ — четно, угад. $q=2$

$(m+n)(m+n-9) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

замена: $m+n=x$

$x(x-9) = 300$

$x^2 - 9x - 300 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot (-300) = 81 + 1200 = 1281$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{1281}}{2}$, $\sqrt{1281}$ — ~~нечетное~~ ^{нечетно} число т.е.

x — ~~нечетное~~ ^{нечетно} число т.е. $m+n$ — ~~нечетно~~ ^{нечетно} —

не можем иметь т.е. mn — ~~нечетно~~ ^{нечетно}, угад.

$m \in \emptyset$ и $n \in \emptyset$, угад. $(2) = (6) \cap (2) \neq m \in \emptyset; 1 \in \emptyset$.

(1) \cup (2): ~~$m=3, n=10; m=2, n=15; m=5, n=6; m=10, n=3;$~~

~~$m=15, n=2; m=6, n=5; m=3, n=10; m=10, n=3.$~~

Ответ: ~~$m=3, n=10; m=2, n=15; m=5, n=6;$~~

~~$m=10, n=3; m=15, n=2$~~

Ответ: $m=3, n=10; m=10, n=3.$

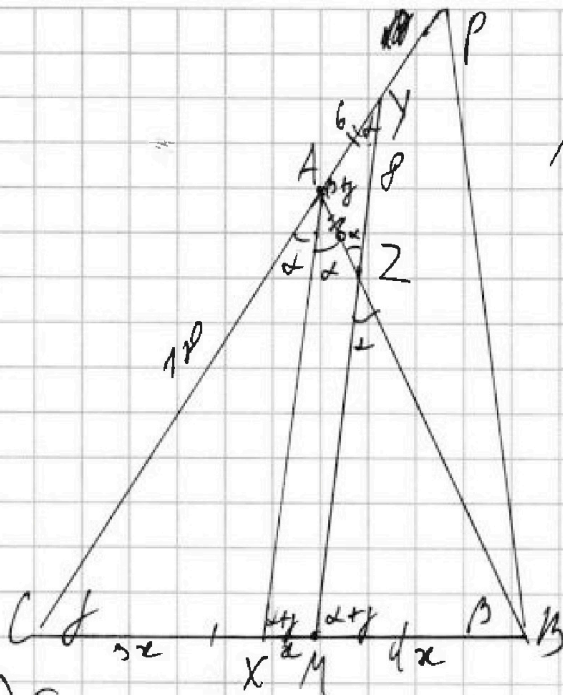


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$; AX — медиана;
 M — середина BC ; $Y \in$ отрез. AC ;
 $MY \parallel AX$; $AX \cap MY = Z$;
 $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
 Найти: BC

1) Будем $\angle FAX = \angle BAX = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $\angle B = \beta$
 $\angle AZY = \angle BAX = \alpha$ (как накрест лежащие при $AX \parallel MY$).

В $\triangle ABC$: $\angle BAC + \angle C + \angle B = 180^\circ$

$$2\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ.$$

$\angle BAY = \angle C + \angle B = \beta + \gamma$ — внешний угол $\triangle ABC$.

В $\triangle AZY$: $\angle BAY + \angle CYM + \angle AZY = 180^\circ$

$\angle CYM = 180^\circ - \beta - \gamma - \alpha$ $\angle CYM = \angle FAX = \alpha$ (соответственные при $AX \parallel MY$), значит $\triangle AZY$ — р/б, значит $AZ = AY = 6$

2) $AX \parallel MY$, значит $\frac{AY}{AC} = \frac{MY}{CX}$ (по т. Талеса)

$$\frac{MY}{CX} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \text{ Будем } MY = x, \text{ тогда } CX = 3x.$$

$$BM = CM = MX + CX = x + 3x = 4x \text{ (т.к. } M \text{ — серед. } BC)$$

3) AX — медиана $\triangle ABC$, значит $\frac{AC}{AB} = \frac{4x}{3x}$
 (по свойству медианы) $AB = \frac{AC \cdot 3x}{4x} = \frac{18 \cdot 3x}{4x} = \frac{135}{2} = 67.5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) По т. косинусов в $\triangle AZY$:

$$\cos \angle ZAY = \frac{AZ^2 + AY^2 - YZ^2}{2AZ \cdot AY} = \frac{6^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

ср $\angle BAC = 180^\circ - \angle ZAY$ (смежные)

$$\cos \angle BAC = \cos(180^\circ - \angle ZAY) = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

5) По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle BAC$$

$$(8x)^2 = 18^2 + 30^2 + 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9}$$

$$64x^2 = 324 + 900 + 1080 \cdot \frac{1}{9}$$

$$64x^2 = 1224 + 120$$

$$64x^2 = 1344$$

$$x^2 = 21 \quad x = \sqrt{21}$$

$$BC = 8x = 8\sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$.

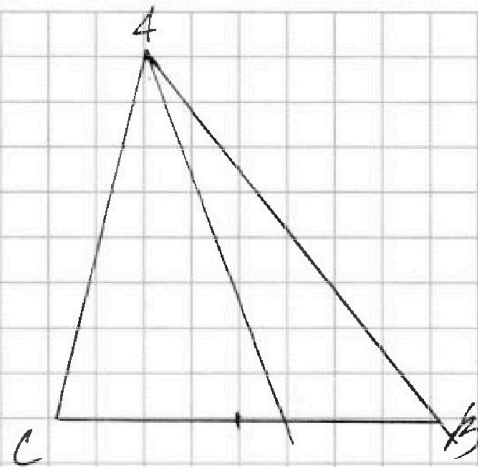
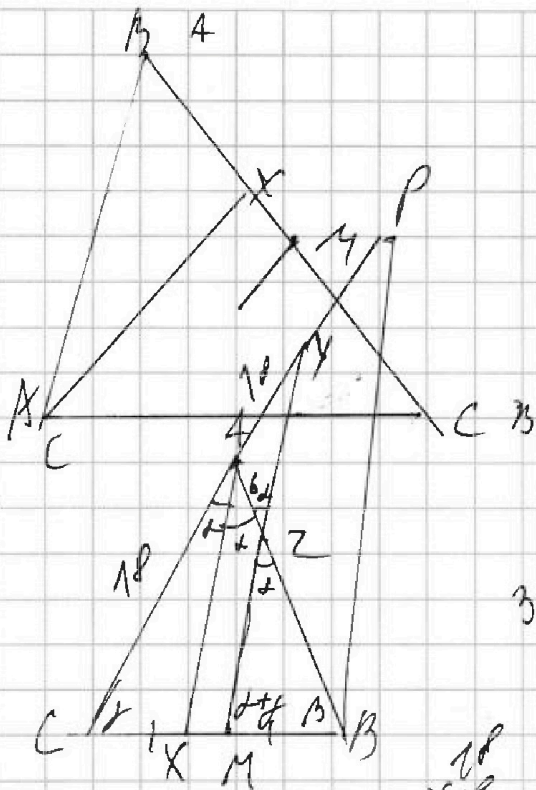


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$B + \gamma = 180^\circ - 2\alpha$$

$$36 + 36 = 72$$

$$72 - 6 = 66$$

$$18 \cdot 6 = 108$$

$$\begin{array}{r} 1349 \overline{) 64} \\ \underline{128} \\ 69 \\ \underline{-69} \\ 0 \end{array}$$

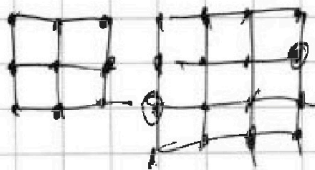
$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \overline{) 9} \\ \underline{-9} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 0 \end{array}$$

$$2 \times 2 = 4 - \text{губок}$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

81



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

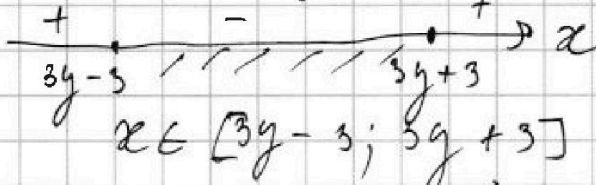


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Нум: $x = 3y + 3$, $x = 5y - 3$



$\max(4y + 8x) - 1$
 $(y - 3x + 1)(y - 3x - 1)$
 $y = 3x - 1$ $y = 5x + 1$

$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ x \leq 5y + 3 \end{cases}$

2) Нум: $(x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3})$

$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$

$x \in [\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}; \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}]$

$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\ x \leq \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases}$

$2x \leq \frac{10}{3}y + \frac{10}{3} \quad | \cdot 3$

$4x \leq \frac{40}{3}y + \frac{40}{3}$

$4y + 8x \leq \frac{40}{3}y + \frac{40}{3} = \frac{10}{3}y + \frac{40}{3}$

$\begin{cases} -x \geq -3y - 3 \\ 3x \geq y \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 3y + 3 \\ -3x \leq -y + 1 \\ -2x \leq 2y + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} -x \geq -3y - 3 \\ 3x \geq y - 1 \\ 2x \geq -2y - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y + 3 \geq x \\ 3x \geq y - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y + 3 + 3x \geq x + y - 1 \\ x + y \geq -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 3y - 3 \\ -x \geq -3y - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_{\max}: x = 3y + 3 \\ x = \frac{10}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases}$

$4x \leq 24y - 24$

$\begin{cases} 4x \geq 4y - 4 \\ 4x \leq 4y + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 4y + 8y + 8 = 12y + 8 \\ 12 \\ x_{\min} \end{cases}$

$\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq y - 1 \\ x \leq y + 1 \end{cases}$

$\begin{array}{r} 30 \\ \cdot 39 \\ \hline 351 \\ + 114 \\ \hline 1521 \end{array}$

$\begin{array}{r} 31 \\ \cdot 31 \\ \hline 93 \\ \hline 961 \end{array}$