



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- Ⓐ [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $143^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- Ⓑ [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
- Ⓒ [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 792$ .
- Ⓓ [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 13/2$ , а  $MZ \cdot MY = 5$ .
- Ⓔ [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$  или  $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ ?
- Ⓚ [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 5 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- Ⓛ [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .

31 балл всего



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть кол-во вершин -  $n$ , тогда  $\sum \angle = 180^\circ(n-2)$   
↑  
сумма всех углов

с другой стороны

$\sum \angle = S_n$  с суммой арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}; a_1 = 143^\circ; a_n = 143^\circ + 2^\circ(n-1)$$

$$180^\circ(n-2) = \frac{(143^\circ + 143^\circ + 2^\circ(n-1)) \cdot n}{2}$$

$$360n - 720 = 286n + 2n^2 - 2n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 360}}{2} = 19 \pm \sqrt{19^2 - 360} = 19 \pm 1$$

наибольшее  $n = 20$

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 10 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 3 + \ln 2$$

$$\ln(2) \cdot (4x + 3y + 3z - 1) + \ln 3 (z - 1) = 0$$

$\uparrow$   $\in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$                        $\uparrow$   $\in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$

~~мы~~  $\ln(2)$  и  $\ln(3)$   $a \cdot \ln(2) + b \cdot \ln(3) = 0$

только если  $a = 0$  и  $b = 0$  (если  $a$  и  $b \in \mathbb{Z}$ )

(т.е., когда  $-a \cdot \ln 2 - b \ln 3 \rightarrow \frac{-a}{b} = \log_2 3$ )

$\uparrow$   $\in \mathbb{Q}$                        $\uparrow$   $\notin \mathbb{Q}$

тогда:

$$4x + 3y + 3z - 1 = 0$$

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$y = \frac{-2 - 4x}{3}$$

$$y^2 = \frac{16x^2 + 16x + 4}{9}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + x^2 + \frac{16x^2 + 16x + 4}{9} = \frac{1}{9} (25x^2 + 16x + 13)$$

$$f(x) = 25x^2 + 16x + 13 = \left(5x + \frac{8}{5}\right)^2 + 13 - \frac{64}{25}$$

$$f(x) \min = \frac{25 \cdot 13 - 64}{25} = \frac{261}{25}; \quad (x^2 + y^2 + z^2) \min = \frac{261}{25 \cdot 9} = \frac{29}{25}$$

Ответ:  $\frac{29}{25}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = \{x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6\}$$

$$\Sigma M = 7x + 21$$

$$P = \Sigma M - (x+i_1), \quad i_1 \in [0; 6]$$

$$Q = \Sigma M - (x+i_2), \quad i_2 \in [0; 6] \quad i_1 \neq i_2$$

$$P = 6x + 21 - i_1$$

$$Q = 6x + 21 - i_2$$

$$P^2 - Q^2 = 792 = (i_2 - i_1)(12x + 42 - (i_1 + i_2))$$

$$792 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$i_2 - i_1 \in [0; [1; 6]$$

$$\text{Тогда } i_2 - i_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

при этом  $P$  и  $Q$  - простые  $\Rightarrow P/3$  и  $Q/3$

(обезопасно  $P \neq 3$  и  $Q \neq 3$  т.к.  $x \geq 0$ )

тогда  $i_1 \neq 3$  и  $i_2 \neq 3$

$$1) \quad i_2 - i_1 = 4$$

$$\cancel{x} \quad x+1 \quad x+2 \quad \cancel{x+3} \quad x+4 \quad x+5 \quad \cancel{x+6}$$

тогда очевидно  $i_2 = 5$ ,  $i_1 = 1$

$$\text{тогда } (12x + 42 - (i_1 + i_2)) = 2 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 19 - 2 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow 4x = 54 \quad \boxed{x = 14}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) i_2 - i_1 = 2$$

тогда единственная вершина

$$i_2 = 4 \quad i_1 = 2$$

тогда

$$(12x + 44 - 6) = 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 14 - 2 = 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$4x = 120 \quad \boxed{x = 30}$$

$$3) i_2 - i_1 = 2$$

два варианта:  $\begin{cases} i_2 = 2 \\ i_1 = 1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} i_2 = 5 \\ i_1 = 4 \end{cases}$

$$3.1) i_2 = 2 \quad i_1 = 1$$

$$12x + 42 - 3 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 14 - 1 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$4x = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 - 13 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$3.2) i_2 = 5 \quad i_1 = 4$$

$$12x + 42 - 9 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 14 - 3 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$4x = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 - 11 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Область~~ Область  $\{6\}$  вершин  $a$ :

$$M = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

или  $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

Область:  $M = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$  или

$$M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

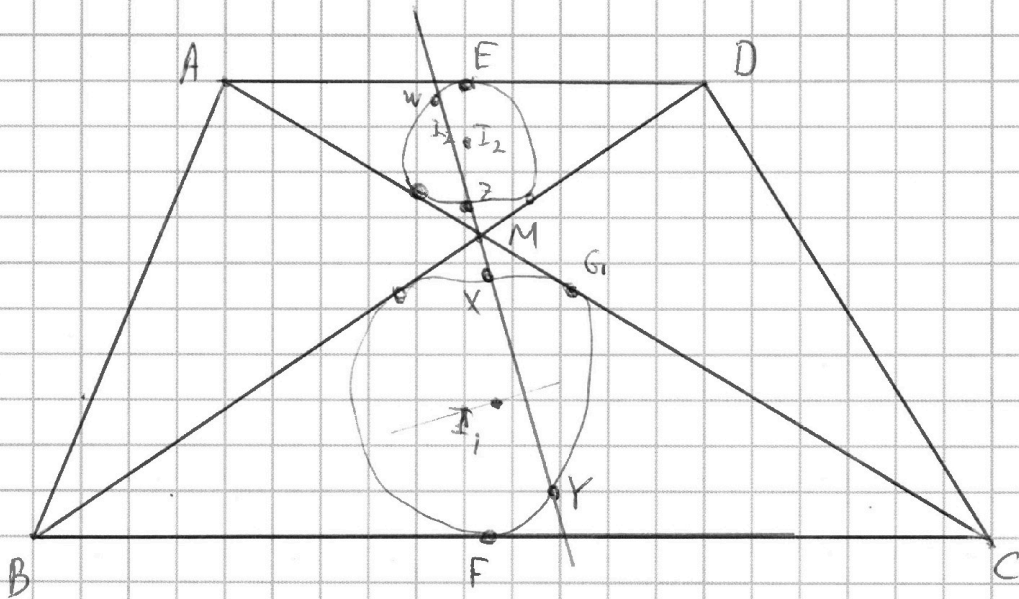


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I_1, I_2 = \frac{13}{2}$$

$\triangle ADM \sim \triangle CBM$  ( $\angle CBM = \angle MDA$ ,

$$MZ - MY = 5$$

$\angle AMC = \angle DMA$ )  $\rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{AM}{DM} = 2$

$\rightarrow$  коэффициент подобия  $k=2 \Rightarrow$  пусть  $r_2 = n \Rightarrow r_1 = 2n$ ;

тогда  $2MI_2 = MI_1$  (все линейные размеры

в  $\triangle AMC$  в 2 раза больше чем в  $\triangle AMD$ ) и тогда

$I_1, I_2 = I, M + MI_2$  (т.к.  $I_1$  лежит на бис.  $\angle AMC$

который совпадает с бисс.  $\angle AMD$  на которой

лежит  $I_2$ ).  $I_1, I_2 = I, M + MI_2 = 3MI_2 = \frac{14}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow MI_2 = \frac{13}{6}; MI_1 = \frac{13}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По свойствам векторов (скаляр произв):

$$MX \cdot MY = (MG)^2; \quad MX = 2MZ$$

$$MX \cdot MY = 2 \cdot MZ \cdot MY = 10 - (MG)^2 = (MI_x)^2 - r_z^2$$

по 1. формуле для  $\Delta MGI_x$

$$r_z^2 + 10 = (MI_x)^2 = \frac{169}{9}$$

$$r_z^2 = \frac{169 - 90}{9} = \frac{79}{9}$$

$$r_z = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{79}}{3}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } \sin \frac{\pi}{14} = a; \cos \frac{\pi}{7} = b \text{ тогда}$$

$$b = \sqrt{1-a^2}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} = b^2 - a^2 = \sqrt{1-4a^2b^2}$$

$$\sin \frac{\pi}{7} = 2ab$$

$$\sin \left( \frac{3\pi}{14} \right) = \sin \left( \frac{2\pi}{14} + \frac{\pi}{14} \right) = 2ab \cdot b + a \cdot (b^2 - a^2)$$

$$\frac{5}{4} = 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}}$$

$$\frac{5}{4} (1+a) \sqrt{4(b^2 - a^2 + 2ab^2 + ab^2 - a^2)}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{b^2 - a^2 + 3ab^2 - a^2}{1+a}} = \frac{(b^2 - a^2)(1+a) + 2ab^2}{1+a}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{b^2 - a^2 + 2ab^2} = \frac{2a(1-a^2)}{1+a}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{b^2 - a^2 + 2a(1-a^2)}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-a^2 - a^2 + 2a - 2a^3}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-4a^2 + 2a}$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{2a(1-2a)}$$

Рассмотрим  $f(x) = \sqrt{1-x} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$  максимален

то в значении  $f(x) = \frac{1}{4}$  при условии  $x = \frac{1}{2}$

Заметим, что  $2a(1-2a) = f(2a)$ ,  $2a \neq \frac{1}{2}$  и т.д.

$$a \neq \frac{1}{4} \text{ т.к. } \sin \left( \frac{\pi}{14} \right) < \frac{\pi}{14} < \frac{13\pi}{14} < \frac{14\pi}{14 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Следовательно

$$\frac{1}{4} > 2a(1-2a)$$

...

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

Ответ:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пирамида -  $n \geq 3$  точки лежат в одной плоскости и еще одна не лежащая в этой плоскости.

1) Если все основания -  $n$ . Тогда способов

выбора  $n$  точек основания:

$$C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 7 + 1 = 7(14) + 1 = 99$$

способов выбора вершины - 5.

Всего пирамид  $S_1 = 99 \cdot 5 = 495$

2) Если все основания не  $n$ .

~~Тогда способов выбора  $n$  точек основания -~~

~~$C_{12}^3 = 220$~~

~~способов выбора вершины -  $12 - 3 = 9$~~

~~$S_2$  пирамид  $S_2 = 220 \cdot 9 = 2200 - 220 = 1980$~~

~~Всего пирамид: но тогда дваноси поимити~~

~~все  $n$  треугольные пирамиды содержатся в  $n$  точек~~

~~или  $n$ . таких чисел:  $C_2^3 \cdot 5$  штук~~

~~$S_3 = 7 \cdot 5 \cdot 5 = 225 \cdot 2 = 450$~~

~~Всего -  $S_1 + S_2 - S_3 = 495 + 1980 - 450 = 2025$~~

Ответ: 2280



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То же всего перемешу

$$S_2 = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 5 = 495$$

Но ~~перемешу~~ три ~~перемешу~~ перемешу с ~~перемешу~~

возможны следующие 2 комбинации в

обмен сахара а и х

$$S_3 = C_2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 275$$

Всего перемешу:  $S_1 + S_2 - S_3 = 2 \cdot 495 - 275 = 715$

Ответ: 715



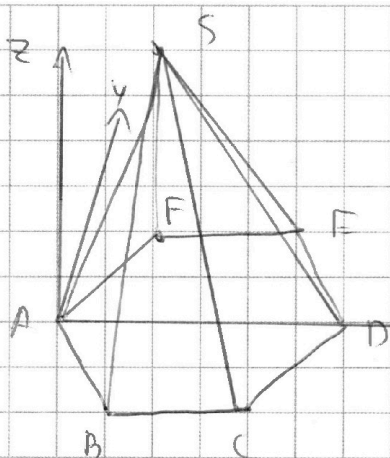
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

4 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Введем декартову систему координат.

$$A = (0, 0, 0)$$

$Ox$  совпадает с  $AD$ ,

$Oy$  лежит в ~~AD~~ плоскости

основания ( $y \perp Ox$ )  $Oz \perp$  плоскости основания.

Пока ~~...~~  $Y = (B, 0, 0)$

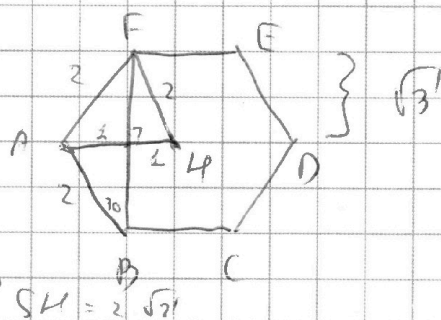
$$\vec{OY} = \vec{AF} + \lambda \cdot \vec{FS}$$

$$F = (1, \sqrt{3}, 0)$$

$$\vec{FS} = (1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$$

$$S = (2, 0, 2\sqrt{2})$$

$$\vec{FS} = (1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$$



$$\vec{OX} = \vec{OF} + \lambda \vec{FS} = (1 + \lambda \cdot 1; \sqrt{3} + \lambda \cdot (-\sqrt{3}); 0 + \lambda \cdot (-2\sqrt{2}))$$

$$\vec{X} = (\lambda + 1; \sqrt{3}(1 - \lambda); -2\sqrt{2}\lambda)$$

$$\vec{XF} = (\lambda$$

$$\vec{YX} = (B - \lambda - 1; \sqrt{3}(\lambda - 1); 2\sqrt{2}\lambda)$$

$$|\vec{YX}|^2 = e^2 = (B - \lambda - 1)^2 + 3(\lambda - 1)^2 + 8\lambda^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие что  $XY \parallel SAB$ :

1) Найдем уравнение плоскости  $SAB$ :

Возьмем три точки:  $S, A, B$  тогда

Плоск  $SAB$ :  $ax + by + cz + d = 0$

$$A: a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \rightarrow d = 0$$

$$B: a - \sqrt{3}b = 0$$

$$\rightarrow a = \sqrt{3}b$$

$$S: 2a + 2\sqrt{2}c = 0$$

$$2\sqrt{3}b + 2\sqrt{2}c = 0 \quad c = -\sqrt{1,5}b$$

$$SAB: \sqrt{3}b \cdot x + by - \sqrt{1,5}b \cdot z = 0$$

$$SAB: \sqrt{3}x + y - \sqrt{1,5}z = 0$$

$$n_{SAB} \leftarrow \text{вектор нормали} \quad n_{SAB} = (\sqrt{3}; 1; -\sqrt{1,5})$$

$$\overline{n_{SAB}} \perp \overline{XY} \Rightarrow (\overline{n} \cdot \overline{XY}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{3} \cdot (B - x - 1) +$$

$$+ 1 \cdot (\sqrt{3}(x - 1)) - \sqrt{1,5} \cdot (2\sqrt{2}x) = 0$$

$$= B - x - 1 + x - 1 - 2x \rightarrow 2x + 2 = B$$

$$B = 2x + 2$$

$$e^2 = B^2 + x^2 + 1 - 2Bx \rightarrow B^2 + 2x + 3x^2 - 6x + 3 + 8x^2 =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= 12x^2 + B^2 - 2Bx - 2B - 4x + 4 =$$

$$= 12x^2 + 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 4x - 4x - 4 - 4x + 4 =$$

$$= 12x^2 - 4x + 4$$

Надо найти наименьшее значение функции

$$D \quad x = x_0 = \frac{4}{2 \cdot 12} = \frac{1}{6}$$

$$C^2 = 12 \cdot \frac{1}{36} - \frac{4}{6} + 4 = \frac{2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{24}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$C = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{11}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти наименьшее  $e^2$  / формулы наименьшего

$$e^2 \rightarrow (e^2)_{\min}$$

$$(\frac{e^2}{\alpha})' = 0$$

$$e^2 = \beta^2 + \alpha^2 + 1 - 2\beta\alpha - 2\beta + 2\alpha + 3\alpha^2 - 6\alpha + \beta + 8\alpha^2 =$$

$$= 12\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\alpha - 2\beta - 4\alpha + 4$$

Очевидно наименьшим  $e^2$  достигается там, где

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial\alpha} = 0 \text{ и } \frac{\partial(e^2)}{\partial\beta} = 0 \text{ т.е. на границах}$$

$$e^2 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial\alpha} = 0 = 24\alpha - 2\beta - 4 \Rightarrow 12\alpha - \beta = 2 \Rightarrow \beta = 12\alpha - 2$$

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial\beta} = -2\alpha - 2 + 2\beta = 0$$

$$\frac{\partial(e^2)}{\partial\beta} = -2\alpha - 2 + 2\beta = 0$$

$$-2 - 2\alpha + 24\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{11}; \beta = 10$$

$$\text{Тогда } e^2 = 12 \cdot \frac{9}{121} + 100 - \frac{60}{11} - 20 - \frac{12}{11} + \frac{44}{11} =$$

$$121 e^2 = 12 \cdot 9 + 12100 - 660 - 20 \cdot 121 -$$

$$-11 \cdot 12 + 44 \cdot 11 = 118380 = 3 \cdot 10 \cdot 3946 =$$

$$= 3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1973 = 4 \cdot 15 \cdot 1973$$

$$e = \frac{2 \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{1973}}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Условие 7 пирамиды:

если  $n \geq 3$  точка в одной плоскости

и еще одна точка не попадает в плоскости остальных.

Рассмотрим несколько случаев:

1) плоскость основания пирамиды -  $\alpha$ ,  $\rho \perp \alpha$

способов выбрать вершины основания:

$$\frac{7!}{2!4!} = \frac{7!}{2!} \left( \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2} \right) =$$

$$= 7 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 7 + 1 =$$

$$= 2 \cdot (14) + 1 = 29$$

способов выбрать вершину - 5

$$\text{всего вершин} S_1 = 29 \cdot 5 = 145$$

2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi}{4} = a \quad \cos \frac{\pi}{4} = b$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\sqrt{1-4a^2} + \frac{2ab^2}{1+a}}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\sqrt{1-4a^2} \sqrt{1-a^2}} + 2a$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\sqrt{1-4a^2 - (1-a^2)}} + \frac{2a(1-a^2)}{1+a} =$$

$$= \sqrt{1-4a^2 + 4a^4} + 2a(1-a) =$$

$$= \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4a^4} + 2a(1-a) =$$

$$= 2a^2 - 1 + 2a - 2a^2 = 2a - 1$$

$$\begin{array}{r} 1980 \\ + 475 \\ \hline 2455 \\ - 225 \\ \hline 2280 \end{array}$$

$$\boxed{1973}$$

$$\begin{array}{r} 1973 \\ \times 2 \\ \hline 3946 \\ + 1973 \\ \hline 39460 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1121060 \\ + 121060 \\ \hline 1242120 \\ - 1204448 \\ \hline 37672 \\ + 669 \\ \hline 38341 \\ + 121060 \\ \hline 159447 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1183303 \\ \times 11 \\ \hline 1183303 \\ + 1183303 \\ \hline 1301633 \end{array}$$

$$- 484$$

$$= 4 \cdot 121 - 11 \cdot 44$$

$$132 = 11 \cdot 12$$

$$12 \cdot 9 = 108$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 20 \\ \hline 2420 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (B - x - 1)^2 &= (B - (x+1))^2 \\ &= B^2 - 2B(x+1) + x^2 + 2x + 1 = \\ &= B^2 - 2Bx - 2B + x^2 + 2x - 11 \end{aligned}$$

$$22x = 6$$

$$x = \frac{3}{11}$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial B} = 0$$

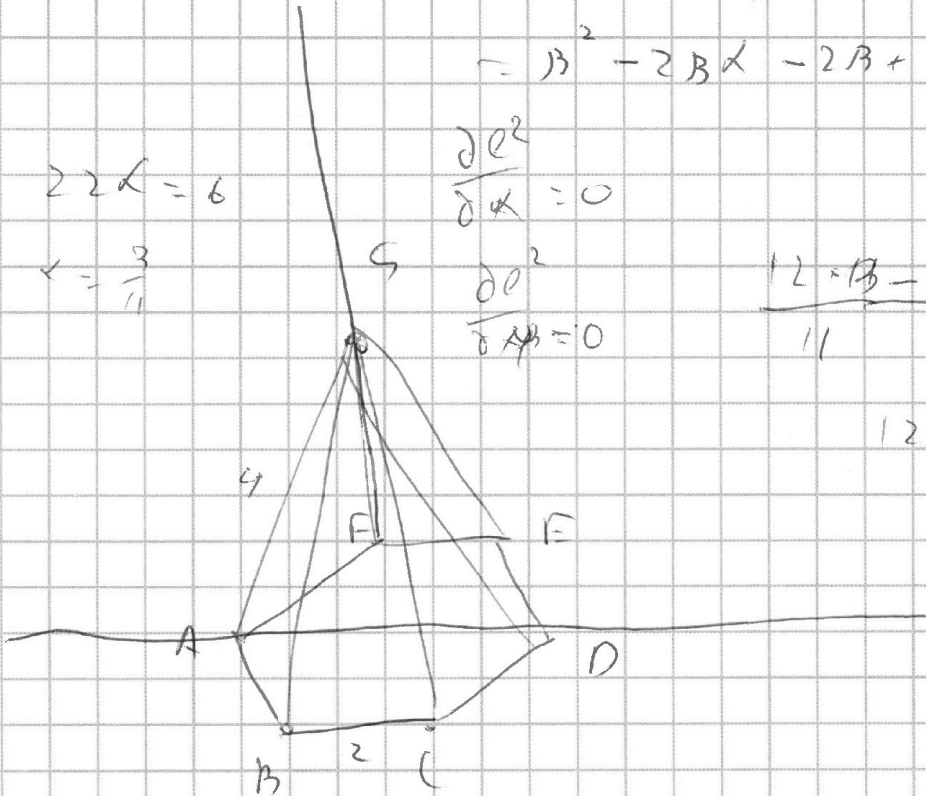
$$\frac{12 - B - 22}{11}$$

$$12 - 11 = 11^2 + 11 =$$

$$= (21 + 11) = 132$$

$$132 - 22 =$$

$$= \frac{110}{11} = 10$$



$$\frac{\partial (e^1)}{\partial x} = 24x - 2B - 4 = 0$$

$$12x - B = 2$$

$$B = 12x - 2$$

$$\frac{\partial e^2}{\partial B} = 0 = -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$B =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{5}{4} \sqrt{1-4a^2b^2} + \frac{2ab^2}{1+a} = b = \sqrt{1-a^2}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + \frac{2a \sqrt{1-a^2}}{1+a}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{2a \sqrt{1-a^2}}{1+a}, \quad a < \frac{\pi}{14}$$

$$1-a > 8a \sqrt{1-a^2}$$

$$1 > \sqrt{a(8\sqrt{1-a^2}-1)} > \sqrt{1-a^2}$$

$$a^2 < \left(\frac{\pi}{14}\right)^2$$

$$1 > 1-a^2 > \left(\frac{\pi}{14}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{14} > 2a > a(8\sqrt{1-a^2}-1)$$

$$\frac{\pi}{14} >$$

$$284$$

$$\begin{array}{r} 142 \\ -180 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ -142 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 325 \\ -64 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130014 \\ -12 \quad \quad \quad 325 \\ \hline 10 \quad \quad \quad 2 \\ -2 \quad \quad \quad 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26119 \\ -12 \quad \quad \quad 29 \\ \hline 2 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вершин -  $n$

Риса  $\sum \text{углов} = 180(n-2)$

$$19^2 = (20-1)^2 =$$

$$= 400 - 1 - 40 =$$

$1440 =$

$$= 369 - 361$$

$$\frac{180}{181}$$

$$S_n = a + (a+b) + \dots + (a+(n-1) \cdot b)$$

$$S_n + a + b = (a+b) + (b+1 \cdot b) + \dots + (a+n \cdot b) =$$

$$= S_n$$

$$S_n = a + (n-1)b + a + \dots + a + b + \dots$$

$$2S_n = 2a + (n-1)b + 2a + (n-1)b + \dots$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot 10 \\ 360 \\ \underline{284} \\ 76 \end{array}$$

$$\frac{2S_n}{n} = 2a + (n-1)b$$

$$S_n = \frac{2a + (n-1)b}{2} \cdot n$$

$$\begin{array}{r} 76 = \\ 2 \cdot 38 = \end{array}$$

$$180(n-2) = \frac{(143 + 143 + (n-2) \cdot 2) \cdot n}{2}$$

$$4 \cdot 19$$

$$360n - 720 = 286n + 2n^2 - 2n$$

$$2n^2 - 76n + 360 = 0$$

$$n = \frac{76 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 2 \cdot 360}}{4}$$

$$19 \pm \sqrt{9^2 - 180}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin 50^\circ + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sin 60^\circ - \cos 30^\circ$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{SA.}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha + \cos \beta =$$

$$\frac{5}{4} \left( 1 + \sin \frac{\pi}{14} \right) \sqrt{4 \left( \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14} \right)}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14}}{1 + \sin \frac{\pi}{14}}} \quad \sin \frac{\pi}{14} = a$$

$$\cos \frac{\pi}{14} = b$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{7} \right) = 2ab \quad \cos \left( \frac{\pi}{7} \right) = \sqrt{1 - 4a^2b^2}$$

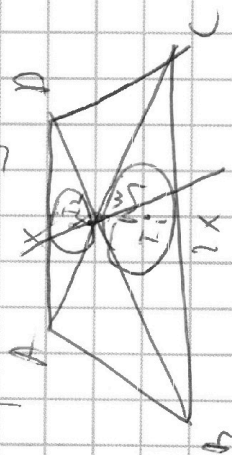
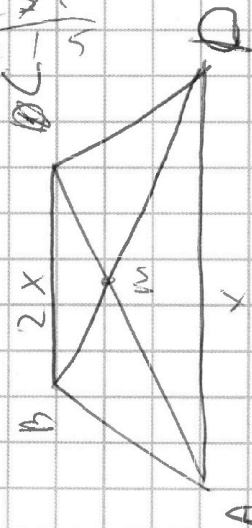
$$\sin \left( \frac{3\pi}{14} \right) = 2ab \cdot b + a \cdot \sqrt{1 - 4a^2b^2}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - 4a^2b^2} + 2ab^2 + a \sqrt{1 - 4a^2b^2}}{1 + a}}$$

$$\frac{5}{4} \sqrt{\frac{\sqrt{1 - 4a^2b^2} (1 + a) + 2ab^2}{1 + a}}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 55 \\ \hline 495 \\ 225 \\ \hline 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 550 \\ \times 275 \\ \hline 2750 \\ 11000 \\ 38500 \\ \hline 151250 \end{array}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a^2 = 764$$

$$\sin X = \frac{1}{4}$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$\sin 2X = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 360}}{2}$$

$$= 19 \pm \sqrt{19^2 - 360} = 19 \pm 1$$

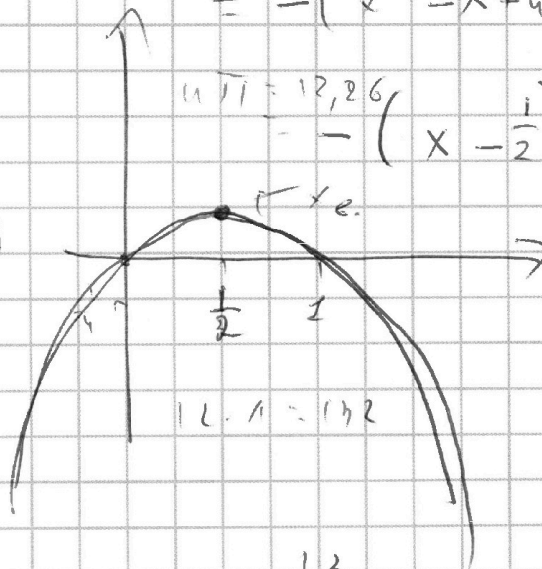
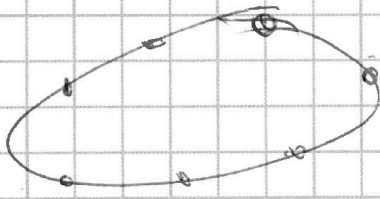
$$x(1-x) = 4\pi = \frac{2\pi}{15}$$

$$\sin x < x$$

$$x - \sqrt{x^2} = -\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{14} = \frac{3\pi}{14} < \frac{3\pi}{14}$$

$$= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} =$$



$$11\pi = 12,26$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$13 \cdot 2 - 14 + 2 =$$

$$= 13 \cdot 2 - 12 = 0$$

$$= 120$$

$$12 \cdot 11 = 132$$

$$29 - x \approx \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{4} = 3,25$$

$$\pi < \frac{13}{4}$$

$$66 \cdot 2 - 14 =$$

$$= 66 \cdot 2 =$$

$$54/10 = 14$$

$$6(11 - 2) = 0,9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

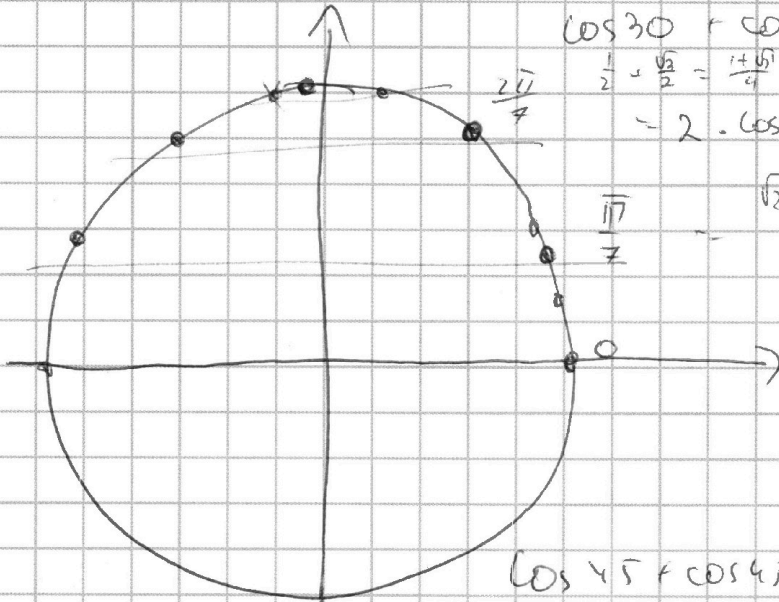
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 -

$\cos 2x =$

$$\cos x + \cos B = 2 \cos \frac{x+B}{2} \cos \frac{x-B}{2}$$



$$\cos 30 + \cos 60 =$$

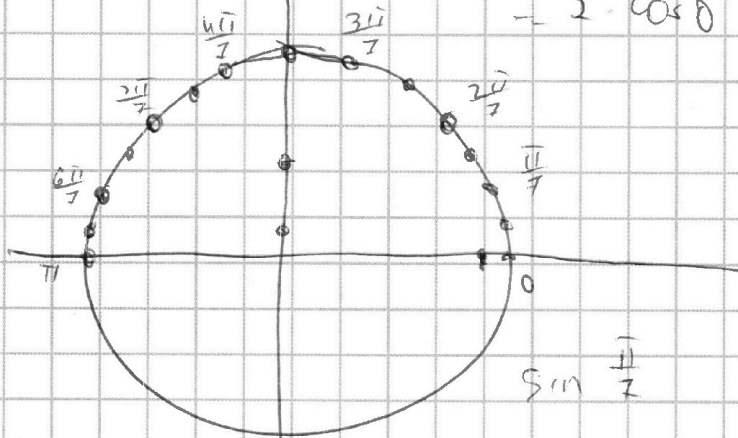
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \cdot \cos 45 \cdot \cos 15 =$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 15$$

$$\cos 45 + \cos 45 = \sqrt{2} =$$

$$= 2 \cdot \cos 0 \cdot \cos 45 \checkmark$$



$$\sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x + \cos B = 2 \sin \frac{x+B}{2} \cos \frac{x-B}{2}$$

$$\sin 45 + \cos 45 = \sqrt{2} = 2 \cdot \sin 45 \cdot \cos 0 =$$

$$= 2 \cdot \sin 45 \cdot \cos 0 = \sqrt{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

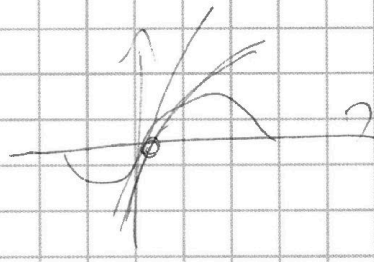
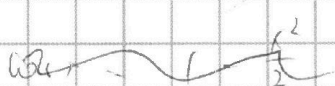
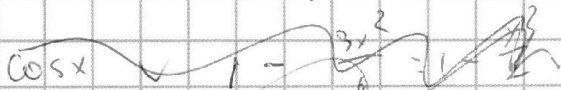
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x \geq x$$

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$$



$$24 - 12 \cdot 2 = 3.8$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln(2^3 - 3) = \ln 6$$

$$\ln(2) \cdot (4x + 3y + 3z) + z \ln(8) = \ln 2 + \ln 3$$

$$z = 1$$

$$z = 1$$

$$\begin{array}{r} 792 \quad | \quad 2 \\ \underline{6} \quad \quad \quad 1396 \\ 19 \end{array}$$

$$396 - 400 - 4 = 4.99$$

$$4x + 3y + 3z = 1$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \underline{-12} \\ 7 \end{array}$$

$$792 = 12 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11$$

$$4x + 3y = -2$$

$$M = \{x, x+1, x+2, \cancel{x+3}, x+4, x+5, \cancel{x+6}\}$$

$$\sum M = 7x + 21 = 7(x+3)$$

$$p = 7x + 21 = (x+i_1) \cdot \dots \quad p \text{ - простое}$$

$$q = 7x + 21 = (x+i_2) \cdot \dots \quad q \text{ - простое}$$

$$p = 6x + 21 - i_1 \quad \leftarrow \text{простое}$$

$$q = 6x + 21 - i_2$$

$$(i_2 - i_1) \in [1, 6]$$

$$(p-q)(p+q) = 792$$

$$(i_2 - i_1) | (12x + 42 - i_1 - i_2) = 792$$

$$1 \cdot 2 \text{ или } 4$$

$$7 \cdot 2 \text{ или } 396 \text{ или } 198$$