



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Котлов~~ сумма углов n -угольника $= 180^\circ (n-2)$

$$\Rightarrow n(131+n) = 180^\circ (n-2)$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0 \quad D - \text{не квадрат целого числа}$$

\Rightarrow такой n не существует



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{2x + 2y = -3} \quad 2x + 3z = -3$$

$$2x + 3z = -3$$

$$2x = -3z - 3, \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2} \quad (x = -\frac{3}{2}z - \frac{3}{2})$$

$$6u + 3z = -3$$

$$2u + z = -1$$

$$\begin{cases} u = 1 + t \\ z = -1 - 2t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cancel{x^2 + y^2 + z^2} \quad x^2 + 4 + z^2$$

$$x^2 + z^2 = 9u^2 + z^2 = 9(t+1)^2 + (-1-2t)^2 =$$

$$= 9t^2 + 18t + 9 + 4t^2 + 4t + 1 = 13t^2 + 22t + 10 = f(t)$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{11}{13} \quad (x_0; y_0) \text{ — координаты вершины } f(x)$$

$$y_0 = \frac{121}{13} + \frac{242}{13} + 10 = \frac{363}{13} + 10 = \frac{363 + 130}{13} =$$

коэф. при $x^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ — парабола ветвями вверх \Rightarrow

$$f(x) \geq y_0 = \frac{493}{13} \quad 38 = \frac{494}{13} > \frac{493}{13} > \frac{481}{13} = 37$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

~~$$\ln(25^x) + \ln(75^y) + \ln(125^z) = \ln 45$$~~

$$\ln(25^x) + \ln(75^y) + \ln(125^z) = \ln 45$$

$$\ln(5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z}) = \ln(5 \cdot 3^2)$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^1 \cdot 3^2$$

~~т.к. x, y, z - целые числа, 3^y не делится на 3^2 , $5^{2x+2y+3z}$ не делится на 3^2~~

~~$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2$
НОД(5, 3) = 1
НОД(5, 3^2) = 1
 3^y не представимо как 5^k~~

т.к. x, y, z - целые числа, 3^y не представимо как

5^k ($k \neq 0$) и $5^{2x+2y+3z}$ не представимо как 3^k .

Значит степень вхождения 5 в $(3 \cdot 5^{2x+2y+3z})$ - это $5^{2x+2y+3z}$

Аналогично, степень вхождения 3 в $(5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y)$ - это 3^y .

Значит
$$\begin{cases} 5^{2x+2y+3z} = 5^1 \\ 3^y = 3^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow 38$ - наименьшее целое число, больше $\frac{493}{13}$

$$\Rightarrow \min(x^2 + z^2) = 38 \Rightarrow \min(x^2 + y^2 + z^2) = 38 + 4 = 42$$

Ответ: 42



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = 6a + k$$

$$1+2+3+\dots+5 \leq k \leq 1+2+\dots+6$$

$$6a + k \not\equiv 3 \text{ значит } k \not\equiv 3 \Rightarrow$$

$$15 \leq k \leq 21$$

$$16 \leq k \leq 20$$

$$p = 271 = 6a + k$$

$$\Rightarrow 255 \geq 271 - k \geq 251$$

~~а) $a \geq 42$
т.к. $6a$~~

$$\Rightarrow 255 \geq 6a \geq 251$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \geq 42 \\ k = 19 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$$

~~Реш:~~ $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \text{либо } 1) a:2 \quad b:2^2$$

$$\text{либо } 2) a:2^2 \quad b:2$$

1) ~~а:5~~ Рассмотрим два варианта: $a:5$ или $a:5$

$$a:5: \quad a=2 \cdot 5 \quad b=2^2 \cdot 3^3 \quad \text{I}$$

$$a:5: \quad a=2 \quad b=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \quad \text{II}$$

$$2) \quad a:5: \quad a=2^2 \cdot 5 \quad b=3^3 \cdot 2 \quad \text{III}$$

$$a:5: \quad a=2^2 \quad b=3^3 \cdot 2 \cdot 5 \quad \text{IV}$$

$$\text{I:} \quad p = \frac{a+b}{2} = \frac{5+54}{2} = 59$$

$$q = \frac{b-a}{2} = \frac{54-5}{2} = 49 \leftarrow \text{не простое. Пара не подходит}$$

$$\text{II:} \quad p = 271$$

$$q = 265$$

$$\text{III:} \quad p = 37$$

$$q = 17, \text{ но } q \nmid 1+2+3+\dots+7 = 7 \cdot 4 = 28$$

$1+2+3+4+5+6 \leq 21$, q не подходит
(минимальная сумма)

$$\text{IV:} \quad p = 137$$

$$q = 133, \quad 133:7 \quad \text{Пара не подходит.}$$

$$\Rightarrow p = 271 \quad q = 265.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. M = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+b\}$$

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

$$\text{т.к. } p, q \in \mathbb{N}, \quad p+q > p-q$$

~~Суммарное количество~~

$$\text{Пусть } a = p-q; \quad b = p+q \Rightarrow a < b \quad ab = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

~~Значения всевозможные варианты a, b учитывая что ab = p^2 - q^2 и a < b и a, b \in \mathbb{N}~~

~~a
5
5-2
5-2^2~~

Допустим $a : 3^3$, тогда

если a будет кратно группе простых

$$\text{чисел, то } a \geq 3^3 \cdot 2 = 72, \text{ тогда } b \leq \frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2} =$$

$$= 40, \text{ но в таком случае } a > b ?!$$

Значит если $a : 3^3$, то $a = 3^3$.

$$\text{Мы знаем, что } a+b = 2p \Rightarrow 3^3 + \frac{1080}{3^3} : 2$$

т.е. $3^3 + 2^3 \cdot 5 : 2$, но это не так \Rightarrow

$a \not\vdots 3^3$. Если $a : 3$ и $b : 3$, то $2p : 3$,

ведь $a+b : 3$. Значит: $p = 3$.

Такого не может быть т.к. p - сумма ~~двух~~ ~~или~~ ~~неск.~~ ~~и~~ ~~неск.~~ чисел и $p \geq 6$. Значит, что b всегда $: 3^3$.

$a+b = 2p \Rightarrow$ Если одно из чисел будет $: 2^3$, то другое

будет $\not\vdots 2$, значит они будут разной четности и $a+b \not\vdots 2$



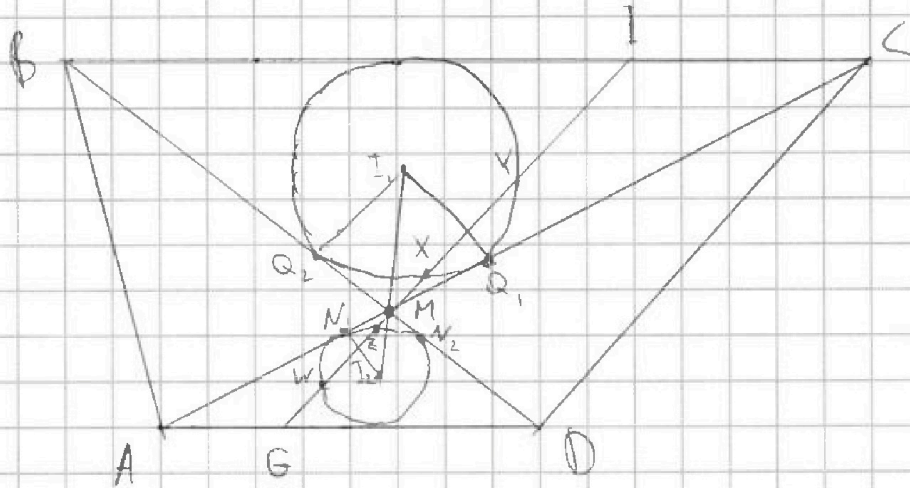
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3/4.



1) I_1 лежит на $S_{\text{кас}} \angle BMC$, I_2 лежит на $S_{\text{кас}} \angle AMD$
(поскольку это инцентр) значит I_2, M, I_1 лежат на одной прямой.

Пусть MN_1, MN_2 - отрезки касательных из $(\cdot)M$ к W_2 ; пусть MQ_1, MQ_2 - отрезки касат. проведенные из $(\cdot)M$ к W_1 . Значит:

$$MQ_2 = MQ_1 = \frac{BM + MC - BC}{2}$$

$$MN_1 = MN_2 = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

$\triangle AMD \sim \triangle BMC$ т.к. $\angle AMD = \angle BMC$, $\angle CAD = \angle ACB$
($AD \parallel BC$)

Пусть $MA \cdot AD = b(\cdot)$

\Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \vee \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

пусть $\alpha = \frac{3\pi}{14}$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \quad \vee \quad 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \quad \vee \quad 3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow$$

$$5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha \quad \vee \quad 3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 \quad \vee \quad 0$$

~~Анализ~~

$$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = 0$$

Заменим пусть $t = \sin \alpha$

$$t = -1 \text{ - не подходит}$$

$$\begin{array}{r|l} 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 & t+1 \\ \hline 16t^2 + 16t^2 & 16t^2 - 24t + 9 \\ \hline -24t^2 - 15t & \\ \hline -24t^2 - 24t & \\ \hline & 9t + 9 \\ & -9t - 9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) = (t+1)(4t-3)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}}$ ← сравнивается

Замена: пусть $\frac{3\pi}{14} = \alpha$

$5 - 4 \sin 3\alpha \sqrt{3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$; $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$\Rightarrow 5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha \sqrt{3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha}$

Замена: пусть $t = \sin \alpha$

$5 - 12t + 16t^3 \sqrt{3t - 4 + 8t^2}$

$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 \sqrt{0}$

используем $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$

$t = -1$ — корень $f(t)$

$\Rightarrow f(t) = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) = (t+1)(4t-3)^2$

$4t - 3 \neq 0$ т.к. $t \neq \frac{3}{4}$, ведь $\sin \frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4}$

т.к. $\frac{3\pi}{14} < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} < \arcsin \frac{3}{4}$

Значит $(4t-3)^2 > 0$. Тогда остается сравнить $t+1$ и 0 .



На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 0 < \sin \frac{3\pi}{14} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \sin \frac{3\pi}{14} + 1 < \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\Rightarrow t + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (t+1)(4t-3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда есть основание $\notin d$
 N - число треугольн. $N = \frac{K \cdot Q}{4}$.~~

Найти кол-во треугольных треугольн. N .

$$N = \frac{K \cdot Q}{4}$$

K - кол-во способов выбрать основание треугольн.

Q - кол-во способов выбрать вершину

Понятно, что основание и вершина заданы треугольн. треугольн. Но одну и ту же треугольн. можно задать 4 способами (т.к. 4 ^{треугольн.} стороны грани 4 верш.)

Значит делим на 4. Также понятно, что любые три точки могут быть основанием треугольн. т.к. любые три точки лежат в одной плоскости.

Значит \odot кол-во способов выбрать основание - кол-во способов выбрать 3 любые точки $\Rightarrow K = C_3^3$

тогда вершиной ~~может~~ ^{может} быть любая из 9 оставшихся точек $\Rightarrow Q = 9$

$$\Rightarrow N = \frac{C_3^3 \cdot 9}{4}$$

Остается найти найти кол-во треугольн. с основанием содержащим больше 3х точек. A_1, A_2, A_3, A_4 - не лежат в одной пл. \Rightarrow такое основание $\notin d$.



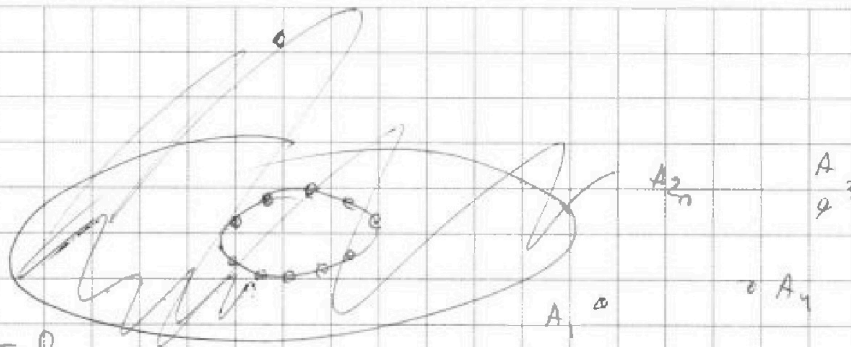
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

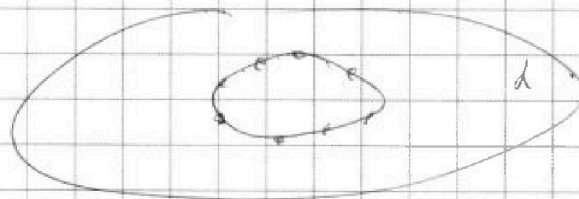
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



ϵ — перпенд. α



Точки $A_1, A_2, A_3, A_4 \notin \alpha$,

Точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной плоскости, поскольку если бы лежали, то лежали бы в плоскости α .

Тем же образом можно показать, что не лежат в одной плоскости и точки, которые $\in \alpha$ т.к. в противоположной стороне

эти точки лежат в α , но A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в α .

Значит, если бы существовала плоскость, в которой лежали бы все точки, то в какой-то $\in \alpha$, а какая-то $\notin \alpha$. А следовательно, не может быть A_1, A_2, A_3, A_4 т.к. они не лежат в одной плоскости.

Значит, если бы существовала плоскость, в которой лежали бы все точки, то в какой-то $\in \alpha$, а какая-то $\notin \alpha$. А следовательно, не может быть A_1, A_2, A_3, A_4 т.к. они не лежат в одной плоскости.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Понятно, что любой набор точек $\in d$ (точек кубов U) может являться основанием ~~множества~~ ~~упорядоченного~~, так как есть многоугольник с этими вершинами, то он всегда выпуклый, ~~так как~~ ~~знаем~~

$$M = B \cdot C$$

B - кол-во способов выбрать основание

C - кол-во способов выбрать вершину.

Так, основание $\in d$, вершина $\notin d$, значит вершинной может быть A_1, A_2, A_3, A_4 (4 вершины) $\Rightarrow C = 4$
Кол-во способов

Выбрать основание с 4 точками ~~не~~ выбрать 4 точки
=

В пространстве d т.е. C_8^4

Кол-во способов

выбрать основание с n (где $4 \leq n \leq 8$) ~~не~~ точками

- C_8^n . Значит $B = C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 = C_8^8$

$$M = 4 \left(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 \right)$$

Тогда всего способов $M + N = 4 \left(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 \right)$

$$+ \frac{C_{12}^3 \cdot 9}{4} \quad \text{Ответ: } 4 \left(C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 \right) + \frac{C_{12}^3 \cdot 9}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$Mx \cdot My = 4$$

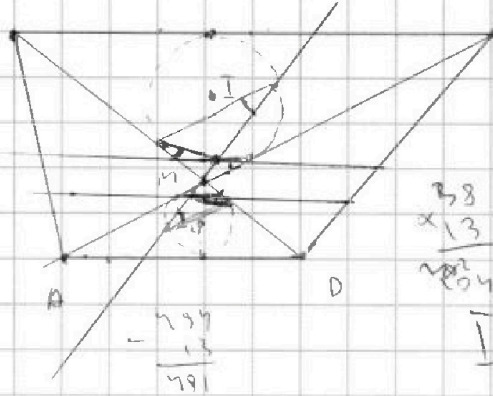
$$a - My \neq$$

$$\begin{array}{r} 493 \\ - 39 \\ \hline 103 \end{array}$$

$$\frac{Mx \cdot My}{2} = 9$$

$$Mx \cdot My = 18$$

$$MQ^2 = 23\sqrt{2}$$



$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 13 \\ \hline 494 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 79 \\ 78 \\ \hline 130 - 26 = \\ 104 \end{array}$$

$$I_1, I_2 = 8$$

$$4Mz \cdot Mw = Mx \cdot My$$

$$\frac{Mz}{Mx} = \frac{My}{Mw}$$

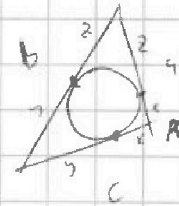
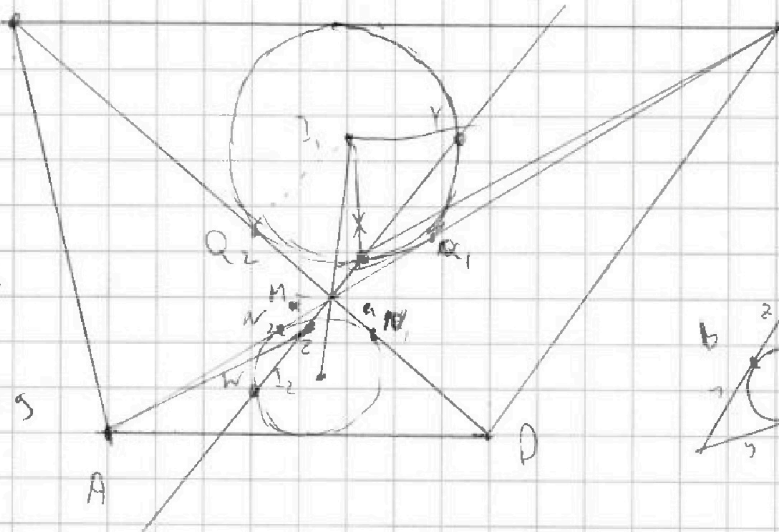
RW r₁ - ?

$$Mz \cdot My = 9$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 13 \\ \hline 494 \end{array}$$

$$\frac{Mz}{Mw} = \frac{Mx}{My}$$

$$Mx \cdot Mw = 9$$



$$x = \frac{a+c-b}{2}$$

$$Mx \cdot My = MQ^2 = 4 \cdot Mz \cdot Mw$$

$$Mz \cdot Mw = MN^2$$

$$MN = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

$$MQ = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{AM + MD - AD}{2}$$

~~$$\frac{Mz}{Mw} = \frac{Mx}{My}$$~~

$$MQ = 2MN$$

$$MQ^2 = 4MN^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

$$k \cdot k + 2(1+2+\dots+n-1)$$

$$= n \cdot k + (n-1) \cdot n$$

$$= n(k+n-1) = \sqrt{180 \cdot n} \cdot 180(n-2)$$

$$(131+n)n = 180n - 2$$

$$6 \cdot 120 = 4 \cdot 760$$

2

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

min $x^2 + y^2 + z^2$

$$x \ln 5 + x \ln 5 + y \ln 5 + y \ln 5 + y \ln 3 + 3 \cdot z \cdot \ln 5 = 2 \ln 3 + 8 \ln 5$$

3

$$(2x + 2y + 3z) \ln 5 + y \ln 3 = \ln 5 + 2 \ln 3$$

$$\ln 5 - 3$$

$$\ln 5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = \ln 5 - 3$$

$x^2 + z^2 = \min$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^{-3}$$

$$2x + 3z = -3$$

$$x =$$

$$2x + 2y + 3z = 1$$

$$y = 2$$

$$2x + 3z + 7 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Mu

$S = 180^\circ(n-2)$

$S = 132 + 134 + \dots + 132 + 134 + \dots$

$132(n-1) + 2(2+4+6+\dots)$

$132n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180(n-2)$

$132n + n(n-1) = 180n - 360$

$n^2 - 48n + 360 = 0$

$D = 48^2 - 4 \cdot 360 = 2304 - 1440 = 964$

$\sqrt{D} = 31$

$n = \frac{48 \pm 31}{2}$

$n_1 = \frac{48 + 31}{2} = 39.5$ (не целое)

$n_2 = \frac{48 - 31}{2} = 8.5$ (не целое)

Нет решений.

3:

$130 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180(n-2)$

$130n + n(n-1) = 180n - 360$

$n^2 - 50n + 360 = 0$

$D = 50^2 - 4 \cdot 360 = 2500 - 1440 = 1060$

$\sqrt{D} \approx 32.56$

$n = \frac{50 \pm 32.56}{2}$

$n_1 \approx 41.28$ (не целое)

$n_2 \approx 8.72$ (не целое)

Нет решений.

4:

$132 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180(n-2)$

$132n + n(n-1) = 180n - 360$

$n^2 - 48n + 360 = 0$

$D = 48^2 - 4 \cdot 360 = 2304 - 1440 = 964$

$\sqrt{D} = 31$

$n = \frac{48 \pm 31}{2}$

$n_1 = \frac{48 + 31}{2} = 39.5$ (не целое)

$n_2 = \frac{48 - 31}{2} = 8.5$ (не целое)

Нет решений.

5:

$132 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180(n-2)$

$132n + n(n-1) = 180n - 360$

$n^2 - 48n + 360 = 0$

$D = 48^2 - 4 \cdot 360 = 2304 - 1440 = 964$

$\sqrt{D} = 31$

$n = \frac{48 \pm 31}{2}$

$n_1 = \frac{48 + 31}{2} = 39.5$ (не целое)

$n_2 = \frac{48 - 31}{2} = 8.5$ (не целое)

Нет решений.

6:

$132 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180(n-2)$

$132n + n(n-1) = 180n - 360$

$n^2 - 48n + 360 = 0$

$D = 48^2 - 4 \cdot 360 = 2304 - 1440 = 964$

$\sqrt{D} = 31$

$n = \frac{48 \pm 31}{2}$

$n_1 = \frac{48 + 31}{2} = 39.5$ (не целое)

$n_2 = \frac{48 - 31}{2} = 8.5$ (не целое)

Нет решений.

7:

$132 \cdot n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 180(n-2)$

$132n + n(n-1) = 180n - 360$

$n^2 - 48n + 360 = 0$

$D = 48^2 - 4 \cdot 360 = 2304 - 1440 = 964$

$\sqrt{D} = 31$

$n = \frac{48 \pm 31}{2}$

$n_1 = \frac{48 + 31}{2} = 39.5$ (не целое)

$n_2 = \frac{48 - 31}{2} = 8.5$ (не целое)

Нет решений.

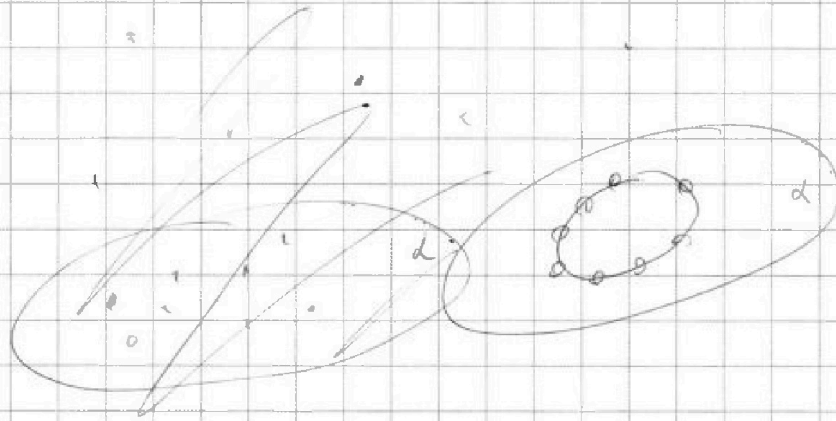


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

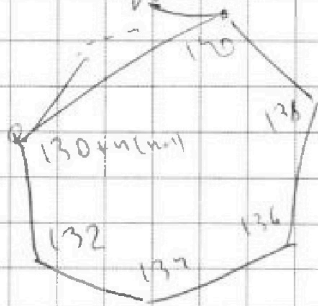
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Если основание $\in d$:

$$\binom{3}{8} + \binom{7}{8} + \binom{5}{8} + \binom{6}{8} + \binom{2}{8} + \binom{1}{8} \cdot 4$$

$$+ \binom{3}{4} \cdot 125$$



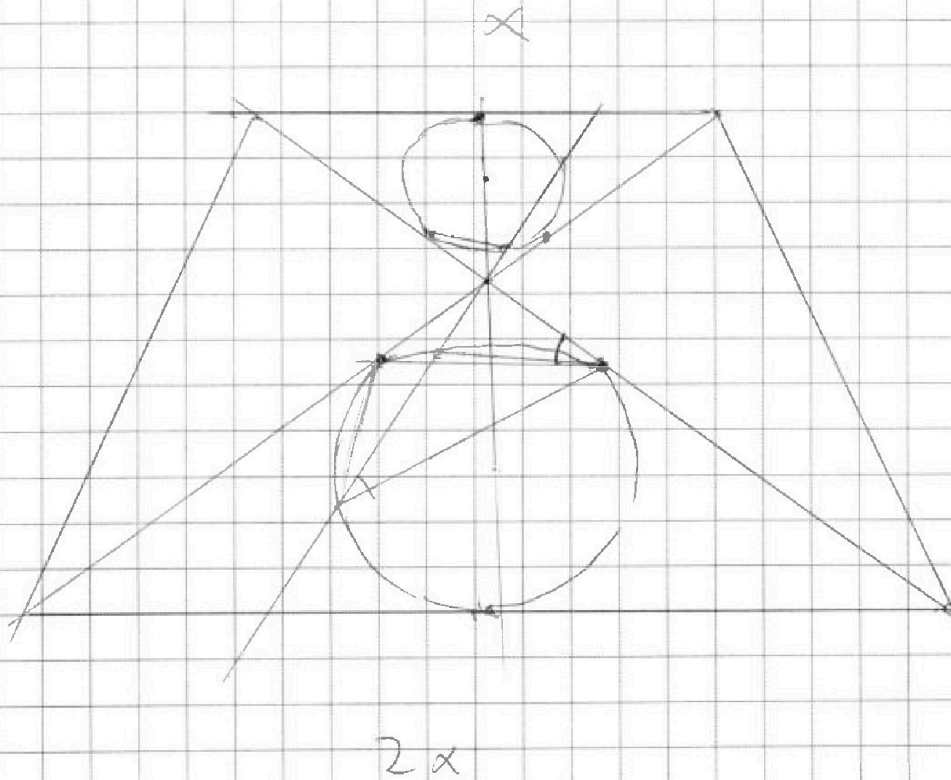


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. M = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$$

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 1080 = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

Пусть $p-q = a$

$$p+q = b$$

Тогда:
$$ab = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$$

$$\frac{a+b}{2} = p$$

$$\frac{a+b-a}{2} = q$$

т.к. $p, q \in \mathbb{Z}$, $a+b : 2 \Rightarrow a, b$ — одной четности

\Rightarrow Но либо a , либо b точно будет $:2$ т.к. $ab : 2$

$\Rightarrow a : 2, b : 2$ (одной четности)

$$\rightarrow a = 2a_1, \quad b = 2b_1$$

$$ab = 4a_1b_1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уч. 1) Пусть $ZM \cap AD = G$

$ZM \cap BC = I$

$$\angle AMG = \angle IMC$$

~~⇒ МВСМ~~

Т.к. $\triangle AMD \sim \triangle BMC$, $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, то

$\frac{DM}{MB} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$, поэтому B, M, D ~~на одной прямой~~
лежат на одной пр.

и A, M, C - лежат на одной прямой \Rightarrow при гомотетии
с центром M с коэффициентом 2 $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMB$

$\Rightarrow \omega_1 \omega_2 \rightarrow \omega_1$ и т.к. $\angle AMG = \angle IMC$, $MN \rightarrow MQ$

$$I_2 M \rightarrow I_1 M \Rightarrow \frac{MX}{MZ} = 2 \cdot \frac{MN_1}{MQ_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1 Q_2}{I_2 M_1} = 2$$

Заменим степень точки M отн. ω_1 и ω_2 !

$$MQ_1^2 = MX \cdot MY = 4MN_1^2$$

$$\frac{I_2 M}{I_1 M} = \frac{1}{2} \Rightarrow MI_1 = \frac{2}{3} \cdot 8$$

$$MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = \frac{1}{2} MQ_1^2 = 9$$

$$\Rightarrow MQ_1 = 3\sqrt{2}, MN_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$I_1 Q_2 \perp I_2 Q_1 \Rightarrow I_1 Q_2^2 + I_2 Q_1^2 = MI^2$$

Аналогично ~~тогда $I_1 Q_1^2 + I_2 Q_2^2 = I_2 M^2$~~

$$I_1 Q_2^2 = \frac{256}{9} - 18 \Rightarrow \text{Ответ: } r = \sqrt{\frac{256}{9} - 18}$$