



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть a - арифметическая прогрессия, d - разность,
 n - число вершин многоугольника, тогда:

Сумма углов выпуклого многоугольника равна $180(n-2)$,
с другой стороны она равна сумме углов арифметической прогрессии, то есть $-\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

Подставив вместо a_1 132, вместо d 2 получаем:

$$\frac{2 \cdot 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$(132+n)n = 180(n-2)$$

$$n^2 + 132n = 180n - 360$$

$$n^2 - 48n + 360 = 0$$

$$(n-9)(n-40) = 0$$

Если $n=40$, то $a_n = 132 + 39 \cdot 2 = 210^\circ$, что не может быть.

Если $n=9$, то $a_n = 132 + 8 \cdot 2 = 148^\circ$ - подходит.

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12] \quad x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$e^{x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125} = e^{\ln 45}$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 5^2 \cdot 3^2$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^2 \cdot 3^2$$

Поскольку x, y, z целые: $2x + 2y + 3z = 2$

$$y = 2$$

$$2x + 3z = -3 \Rightarrow z - \text{кратное}$$

$$x = -\frac{3z+3}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(-\frac{3z+3}{2}\right)^2 + 4 + z^2 = \frac{9z^2 + 18z + 9}{4} + 4 + z^2 = \frac{13z^2 + 18z + 25}{4}$$

Рассмотрим $f(z) = 13z^2 + 18z + 25$ — парабола, ветви вверх

$$z_0 - \text{вершина}, \quad z_0 = -\frac{9}{13}$$

Когда наименьшее значение будет в ближайшем целом z от z_0 , но если $z = -1$ или 0 , 0 не подходит

так как z — кратное

$$z = -1; \quad x = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 + 4 + 1 = 5$$

Ответ: 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13) Пусть $n, n+1, n+2, \dots, n+6$ — числа входящие в множество M . Сумма всех чисел равна $7n+21$, также найдем шестёрки, нулево включим одно число из множества, рассмотрим все возможные шестёрки:

1) Исключим n : $6n+21 : 3$ — некруглое

2) Исключим $n+1$: $6n+20 : 2$ — некруглое

3) Исключим $n+2$: $6n+19$

4) $n+3$: $6n+18 : 3$ — некруглое

5) $n+4$: $6n+17$

6) $n+5$: $6n+16 : 2$ — некруглое

7) $n+6$: $6n+15 : 3$ — некруглое

Поэтому возможны следующие могут быть только

$6n+19, 6n+17$.

$$p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow p > q \Rightarrow p = 6n+19, q = 6n+17$$

$$(6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 1080 \quad (6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 1080$$

$$2 \cdot (12n+36) = 1080$$

$$n+3 = 45, n = 42$$

Проверим, что такое n подходит:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6n + 19 = 252 + 19 = 271 - \text{нельзя}$$

$$6n + 17 = 269 - \text{нельзя}$$

$$\text{Ответ: } M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$$

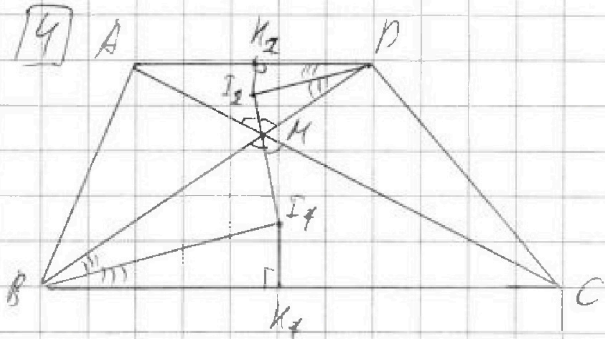
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD:BC = 1:2$$

$$I_1 I_2 = 8$$

$$MI_1 \cdot MI_2 = 9$$

$(r_1, r_2 - \text{радиусы } \omega_1 \text{ и } \omega_2)$

$r_1 = ?$

$\angle BMC \Rightarrow$

1) MI_2 - биссектриса $\angle AMD$, MI_1 - биссектриса

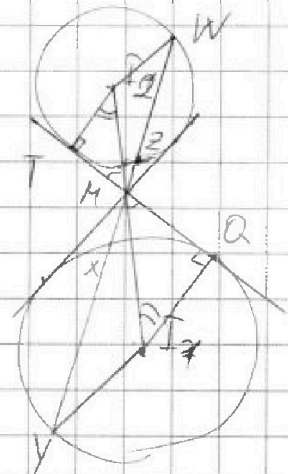
$\Rightarrow I_1, MI_2$ - параллельны

$I_1 Q$ - точки касания

$$2) \triangle BMC \sim \triangle DMA: \frac{BM}{MD} = \frac{BC}{AD} = 2$$

$$\triangle B M I_1 \sim \triangle D M I_2: \frac{MI_1}{MI_2} = \frac{BM}{DM} = 2$$

$$\frac{MI_1}{MI_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad MI_2 = \frac{8}{3}, \quad MI_1 = \frac{16}{3}$$



$$3) \triangle M I_1 Q \sim \triangle M I_2 R: \frac{I_1 Q}{I_2 R} = \frac{MI_1}{MI_2} = 2 \Rightarrow r_1 = 2r_2$$

$$4) \frac{MI_1}{I_1 Y} = \frac{\sin \angle Y M I_1}{\sin \angle M Y I_1} \quad (\text{из } \triangle M Y I_1)$$

$$\angle Y M I_1 = \angle W M I_2$$

$$\frac{MI_2}{I_2 W} = \frac{\sin \angle W M I_2}{\sin \angle M W I_2} \quad (\text{из } \triangle M W I_2)$$

$$\Rightarrow \sin \angle M Y I_1 = \sin \angle M W I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle M Y I_1 = \angle M W I_2$$

$$\frac{MI_1}{I_1 Y} = \frac{2 MI_2}{2 I_2 W} = \frac{MI_2}{I_2 W}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \angle YMI_1 = \angle WMI_2, \angle MYI_1 = \angle MWI_2 \Rightarrow \angle MI_1Y = \angle MI_2W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle MI_1Y \sim \triangle MI_2W \text{ (м.к. } \frac{MI_1}{MI_2} = \frac{I_1Y}{I_2W} \text{)} : \frac{MY}{MW} = \frac{MI_1}{MI_2} = 2$$

Аналогично из $\triangle MI_1X$ и $\triangle MI_2Z$: $\frac{MX}{MZ} = 2$

(подобие доказывает также, как и в 4) и 5)

$$6) MX \cdot MY = MQ^2 = MI_1^2 - I_1Q^2 \text{ (в } \triangle MI_1Q \text{)}$$

$$MZ \cdot MW = MT^2 = MI_2^2 - I_2T^2 \text{ (в } \triangle MI_2T \text{)}$$

$$MX \cdot MY \cdot MZ \cdot MW = (MI_1^2 - r_1^2)(MI_2^2 - r_2^2)$$

$$MX = 2MZ, MW = \frac{MY}{2} \Rightarrow MX \cdot MW = MZ \cdot MY$$

$$(MZ \cdot MY)^2 = (MI_1^2 - r_1^2)(MI_2^2 - r_2^2)$$

$$81 = \left(\frac{256}{9} - r_1^2\right)\left(\frac{64}{9} - r_2^2\right) \cdot 4$$

$$r_1^2 = 4r_2^2$$

$$4 \cdot 81 = \left(\frac{256}{9} - r_1^2\right)\left(\frac{256}{9} - r_1^2\right)$$

$$\left(\frac{256}{9} - r_1^2\right)^2 = 4 \cdot 81$$

$$\frac{256}{9} - r_1^2 = 18$$

Зем "-" так как $MI_1 > r_1$

$$r_1^2 = \frac{256 - 162}{9}$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$15) \quad 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{4} - 4 \cos \frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Пусть } \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{12} > \frac{3\pi}{14} > \frac{3\pi}{19} > \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \sqrt{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}$$

$$5 \sqrt{4(3 \sin \alpha - 4 \sin^2 \alpha)} + 3 \sin \alpha - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) \quad | +4$$

$$9 \sqrt{15 \sin \alpha - 16 \sin^2 \alpha} + 8 \sin^2 \alpha$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 15x - 16x^2 + 8x^2$

$$f'(x) = 15 - 48x + 16x$$

$$f'(x) \geq 0: \quad 15 - 48x + 16x \geq 0$$

$$48x^2 - 16x - 15 \leq 0$$

$$D = 64 + 15 \cdot 48 = 16(4 + 3 \cdot 45) =$$

$$= 16 \cdot 49 = (4 \cdot 7)^2$$

$$x = \frac{8 \pm 28}{48} = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{12} \right]$$

$f(x) \uparrow$ на промежутке $\left[-\frac{5}{12}, \frac{3}{4} \right]$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

— значит максимум в $\left[-\frac{5}{12}, \frac{3}{4} \right]$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$2\sqrt{2} \sqrt{3}$$

$$8 < 9$$

Значит: $f(\sin \alpha) < f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{16}{2\sqrt{2}} + \frac{8}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2} + 4$

Поэтому $15 \sin \alpha - 16 \sin^2 \alpha + 8 \sin^2 \alpha < \frac{7\sqrt{2}}{2} + 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

График $\frac{7\sqrt{2}}{2} + 4 \leq 9$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} + 4 \leq 9$$

$$7\sqrt{2} \leq 10$$

$$98 \leq 100$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} + 4 < 9 \Rightarrow 15 \sin^2 - 16 \sin^2 + 16 \sin^2 < 9$$

Значит $5 - 4 \sin 3\alpha > 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Из условия следует, что если у пирамиды в основании лежит многоугольник n с более чем 3 вершинами, то основание лежит в плоскости L .

1) Рассчитаем сколько пирамид составили L :

$$2^8 - 1 - 8 - \frac{8 \cdot 7}{2} = 219 \text{ — как-то способов выбрать многоугольник в } L.$$

Для каждой многоугольной основы n возможные вершины:

$$4 - 219 = 876$$

Остаток получаем, ^{предположим} n — крестиком с основанием, не лежащим в L .

2) Если в основании есть ровно 2 точки, не лежащие в L :

$$L: \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ — выбрать эти две точки}$$

Для каждой пары есть 8 вариантов для третьей точки основания $6 \cdot 8 = 48$

Для каждой тройки есть 2 точки, не лежащие в L :

$$L: 4 \cdot 2 = 8 \text{ Для каждой тройки есть 7 оставшихся}$$

точек из основания: $48 \cdot 7$, но каждой способ мы

рассчитали дважды, так как пару в основании можно

$$\text{выбрать двумя способами: } \frac{48 \cdot 7}{2} = 24 \cdot 7 = 168$$

3) Если в основании ровно 3 точки, не лежащие в L :



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 способа выбрать эти 3 точки, для каждой вершины
есть 8 точек у оснований; $8 \cdot 4 = 32$

4) Вершина соединяется с вершинами, составляющими у
4 точек, не лежащих в L ,

~~$$876 + 168 + 32 + 1 = 876 + 200 + 1 = 1077$$~~

Ответ: ~~1077~~

1) Рассмотрим скелет пирамид с основанием, лежащим в L :

Поскольку эти точки лежат на окружности,
все диагональные будут внешние.

2^й способ выбрать какие-то точки,

1 - пустое множество, 8 - множество у

1 вершины, $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ - множество у 2 вершин

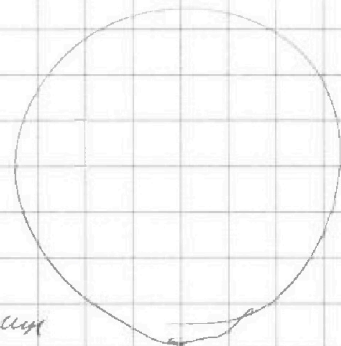
Так есть способ выбрать множества в L :

$$2^3 - 1 - 8 - 28 = 219$$

Для каждого множества 4 вершины
не лежащие в L ; $4 \cdot 219 = 876$

Итого: $876 + 168 + 32 + 1 = 1077$

Ответ: 1077





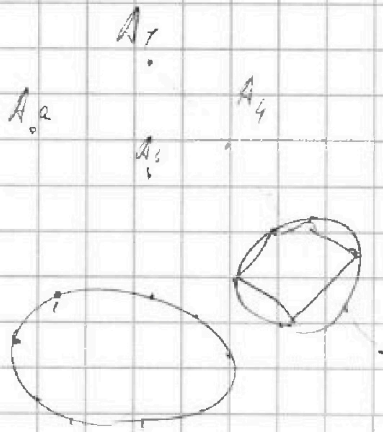
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) 1 - условие: $4 \cdot (2^b - 1 - \frac{3 \cdot 7 - 8}{2}) = 4 \cdot (856 - 1 - 8 - 28) = 4 \cdot 218$



$$\frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{10\sqrt{2}}{4} + 4 = \frac{7\sqrt{2}}{2} + 4$$

$$540 - 36 = 504$$

$$\begin{array}{r} 504 \overline{) 12} \\ 76 \overline{) 32} \\ \underline{-24} \\ \underline{-24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 2 \sqrt{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

7) $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{4} - 4 \cos \frac{3\pi}{4}}$

$$\frac{\pi}{6} < 2 < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} = 2$$

$$5 - 4 \sin 2 \sqrt{3 \sin 2 - 4 \cos 2}$$

$$\frac{\pi}{9} < 2 < \frac{\pi}{2}$$

$$2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 0 \cdot 2$$

$$\frac{\pi}{2} < 3d < \frac{3\pi}{4}$$

$$5 - 4 \sin 2 \sqrt{3 \sin 2} - 4 + 8 \sin^2 2$$

$$f(x) = 8x^2 + 2x$$

$$9 - 4 \sin^2 2 \sqrt{3 \sin 2} + 8 \sin^2 2$$

$$x_0 = -\frac{3}{16}$$

$$9 \sqrt{4(3 \sin 2 - 4 \sin^2 2)} + 3 \sin 2 + 8 \sin^2 2$$

$$x > 0 \quad f(x) \nearrow$$

$$9 \sqrt{8 \sin 2 - 16 \sin^2 2} + 3 \sin 2 + 8 \sin^2 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\sin 2) < f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\sin 2) < f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} - 2 + 2 = 7,5$$

$$\frac{15\sqrt{2}}{2} - 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 =$$

$$2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx$$

$$= \frac{15\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2} + 4 = \frac{7\sqrt{2}}{2} + 4$$

$$f(x) = 15x - (6x^3 + 8x^2)$$

$$f'(x) = 15 - 48x^2 + 16x =$$

$$x_0 = +\frac{1}{6}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} + 4 \sqrt{9}$$

$$-48\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{9}{3} + 15$$

$$48x^2 - 2 \cdot 48\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right)$$

$$= 48\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) =$$

$$\frac{48}{36} = \frac{4}{3}$$

$$7\sqrt{2} \sqrt{10}$$

$$98 < 100$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5] \quad 5 - 4\sin \frac{3\pi}{4} \sqrt{3\sin \frac{3\pi}{4} - 4\cos \frac{3\pi}{4}}$$

$$\sin 2\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$4\sin \frac{9\pi}{4} + 3\sin \frac{3\pi}{4} - 4\cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} = \alpha: \quad 4\sin \frac{3\alpha}{2} + 3\sin \frac{\alpha}{2} - 4\cos \alpha = 12\sin \frac{\alpha}{2} - 16\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 3\sin \frac{\alpha}{2} -$$

$$\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} > \beta = \frac{3\pi}{4} > \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \quad -4 + 8\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \beta: \quad 15\sin \beta - 16\sin^2 \beta + 8\sin^2 \beta - 4 = 8\sin \beta + 8\sin^2 \beta$$

$$= \sin \beta (15 - 8\sin^2 \beta) + \frac{1}{2}(15 - 16\sin^2 \beta) + \frac{7}{2}$$

$$\left(\sin \beta - \frac{1}{2}\right)(15 - 8\sin^2 \beta) \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$< \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow 11$$

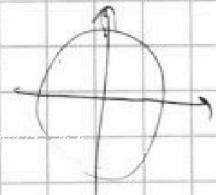
$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot 11 \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{2}-1 \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{14}{11}}$$

$$4\sin 3\beta + 3\sin \beta - 4\cos 2\beta$$

$$2\sqrt{2} \cdot 4 \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad 2$$



$$\frac{\pi}{8} < \beta < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} < \sin \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{4} < \sin^2 \beta < \frac{1}{2}$$

$$-8 < -16\sin^2 \beta < -4$$

$$\frac{\pi}{3} < 2\beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < 3\beta < \frac{3\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12] $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad | : \ln 5 \quad \min(x^2 + y^2 + z^2) - ?$

$$x \log_5 25 + y \log_5 75 + z \log_5 125 = \log_5 45$$

$$2x + (2 + \log_5 3)y + 3z = 1 + 2 \log_5 3$$

$$2x + 2y + 2z = 1 + 2 \log_5 3 - 2 - \log_5 3 \cdot y$$

$$2x + 2y + 2z = 2 + 1 + 2 \log_5 3 + (1 - \log_5 3)y$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{x + y + z}{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} =$$

$$2x + (2 + \log_5 3)y + 3z = 2(2 + \log_5 3) - 3$$

$$e^{x \ln 25} \cdot e^{y \ln 75} \cdot e^{z \ln 125} = 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 5^2 \cdot 3^2$$

$$2x + 2y + 3y = 1$$

$$x = y = z \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4(1 + 2 \log_5 3 - 2 - \log_5 3)}{3} \quad y = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1+3z}{2}\right)^2 + 4 + z^2 = \frac{1+6z+9z^2+4z^2}{4} + 4 =$$

$$p, q \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{7-6}{3} = 21 = \frac{13z^2 + 6z + 17}{4}$$

$$z = \frac{3}{15}$$

$$z = -1, x = 1 \quad \textcircled{6} \quad z = 1 \quad x = 2$$

13] $p^2 - q^2 = 1080$

p, q - простые

Ладженкова из 7

$$(p^2 - q^2)(p + q) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

каждый из них делит 1080

S - сумма

$n, n+1, \dots, n+6$

$$108 = 36 \cdot 3$$

$$(S-x)^2 - (S-y)^2 = 1080$$

$$S = \frac{2n+6}{2} \cdot 7 = (n+3) \cdot 7$$

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 3 =$$

$$= 2^3 \cdot 3^3$$

$$(y-x)(2S-x-y) = 1080$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1) $\alpha_1 = 132^\circ$

1) $d = 2^\circ$

n -угольнику

$$(n-2)180 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n)}{2} \cdot n = \frac{2\alpha_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$(n-2)180 = (132 + n-1)n$$

$$180n - 360 = 132n + n^2 - n$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

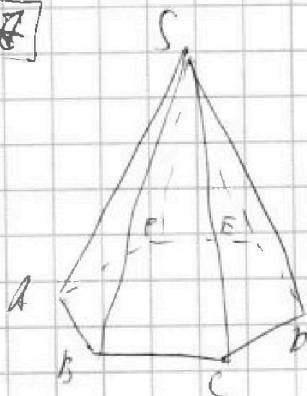
$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 49^2 - 4^2 \cdot 9^2 = 10$$

$$(n-9)(n-40) = 0$$

$n=9, n=40$

\times н.к. $\alpha_1 = 132 + 35 \cdot 2 = 230^\circ$

2)



$AB = 1, SA = \sqrt{2}$

$X \in SF, Y \in AB, XY \perp (SAB)$

$\min(XY) = ?$

$\min(XY) = ?$

2) $d = -2$

$$(n-2)180 = \frac{2\alpha_1 - (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$(n-2)180 = (132 - n + 1)n$$

$$180n - 360 = 132n - n^2$$

$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$D = 47^2 + 4 \cdot 360 = 360$$

$$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) n, n+1, \dots, n+6$$

$$S = \frac{2n+6}{2} \cdot 7 = 7n+21$$

Число, которое все делит: $1)n$ — $6n+21 : 3$ X

2) $n+1$ $6n+20 : 2$ X

3) $n+2$ $6n+19 = p$ ✓

4) $n+3$ $6n+18 : 3$ X

5) $n+4$ $6n+17 = q$ ✓

6) $n+5$ $6n+16 : 2$ X

7) $n+6$ $6n+15 : 3$ X

$$p = 6n+19, q = 6n+17$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$6n+19 = 252+19 = 271$$

$$(p-q)/(p+q) = 1080$$

$$6n+17 = 252+17 = 269$$

$$2 \cdot (p - 12n + 36) = 1080$$

$$12n + 36 = 540$$

$$n+3 = \frac{540}{12} = \frac{90}{2} = 45$$

$$n = 42$$

$$M = \{42, 43, \dots, 48\}$$



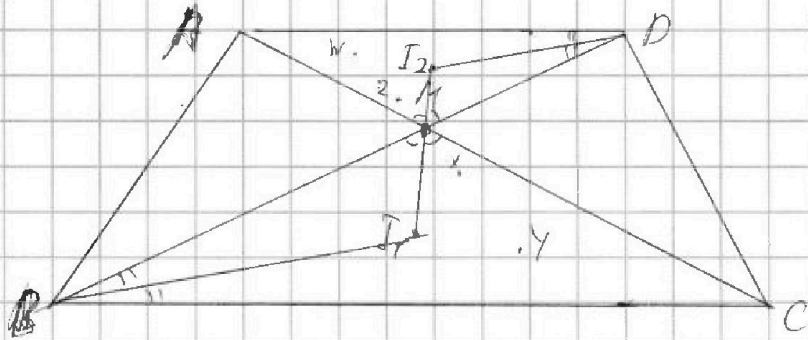
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14



$$AD, BC = r_2$$

$$I_1 I_2 = 8$$

$$M_2 M Y = 9$$

$$r_1 = ?$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \text{ (из условия)}$$

$$\triangle B I_1 M \sim \triangle D I_2 M. \quad \frac{M I_1}{M I_2} = \frac{B M}{D M} = 2$$

$$\frac{I_1 Y}{\sin \alpha} = \frac{M Y}{\sin \alpha}$$

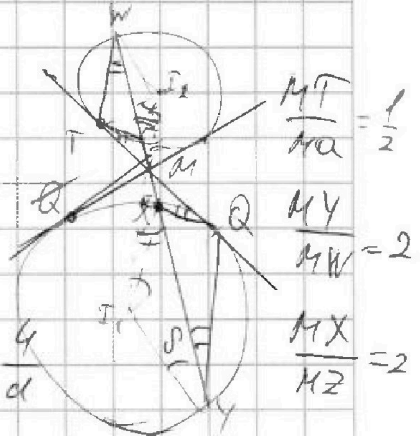
$$M I_1 = \frac{8x}{3}$$

$$M I_2 = \frac{8y}{3}$$

$$\frac{M I_1}{I_1 Y} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{M I_2}{I_2 W} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M X}{M Z} = d \quad \frac{M Y}{M W} = \frac{4}{d}$$



$$\frac{M Y}{M X} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{M Y}{M W} = 2$$

$$\frac{M X}{M Z} = 2$$

$$M Z \cdot M W - M X \cdot M Y = \left(\frac{16}{3} - r_2\right) \left(\frac{16}{3} + r_2\right) \left(\frac{8}{3} - r_2\right) \left(\frac{8}{3} + r_2\right) \quad M Z \cdot M W = M I_2^2 - r_1^2$$

$$M X = 2 M Z, \quad M W = \frac{M Y}{2} \Rightarrow M X \cdot M W = M Z \cdot M Y \quad M X \cdot M Y = M I_1^2 - r_1^2$$

$$256 + 128 = 256 - 162 = 94$$

$$M X \cdot M Y = 4 M Z \cdot M W$$

$$(4 M Z \cdot M Y)^2 = \left(\frac{256}{9} - r_1^2\right) \left(\frac{64}{9} - r_2^2\right)$$

$$81 = \left(\frac{256}{9} - 4 r_2^2\right) \left(\frac{64}{9} - r_2^2\right) \quad 81 = 4 \left(\frac{64}{9} - r_2^2\right)^2 \quad 4 \cdot 9^2 t^2 - 542 \cdot 9 t + (16 \cdot 8)^2 - (9)^2 = 0$$

$$r_2^2 = t, \quad 81 = \left(\frac{256}{9} - 4t\right) \left(\frac{64}{9} - t\right)$$

$$81 = \frac{(16-3t)^2}{9^2} - \frac{256t}{9} - \frac{256t}{9} + 4t^2 \cdot 9$$

$$\frac{64}{9} - r_2^2 = \pm \frac{9}{2}$$

$$1) \quad r_2^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{2} = \frac{128 - 81}{18} = \frac{47}{18}$$

$$4 r_2^2 = \frac{2 \cdot 47}{9} \quad r_2 = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

$$2) \quad r_2^2 = \frac{64}{9} + \frac{9}{2} = \frac{209}{18} \quad r_2 = \frac{\sqrt{209}}{3}$$