



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- × (1) [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- × (2) [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- × (3) [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
- × (4) [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
- (5) [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
- × (6) [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$a_0 = 143^\circ$$

$$d = 2 \text{ мм } (-2)$$

$$0^\circ < a_n < 180^\circ$$

н.ч. : a_{max} ?

Решение:

$$180 \cdot (n-2) = \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} \cdot n$$

$$180n - 360 = \frac{143n + d(n^2 - n)}{2}$$

$$180n - 360 = 143n + \frac{2(h^2 - n)}{2}$$

$$180n - 360 = 143n - h^2 + n$$

$$h^2 + 36h - 360 = 0$$

$$D = 1296 + 1440 = 2736$$

$$\sqrt{2736} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow d \neq (-2)$$

$$a_n = 143 + 2 \cdot (n-1)$$

$$a_{18} = 143 + 2 \cdot 17 = 177 \text{ мм}$$

$$180n - 360 = 143n + h^2 - h$$

$$h^2 - 38h + 360 = 0$$

$$D = 1444 - 1440 = 4$$

$$h_1 = \frac{38-2}{2} = 18 \quad h_2 = \frac{38+2}{2} = 20$$

$$a_{20} = 143 + 2 \cdot 19 = 181 > 180 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$\ln(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \ln 6$$

$$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$$

$$\frac{4x+3y+3z}{2} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{НОД}(3; 2) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{3} \Rightarrow 2 \frac{4x+3y+3}{2} = 1$$

$$4x+3y+3 = 1$$

$$4x+3y = -2$$

$$x = \frac{-2+3y}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4+12y+9y^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{4+12y+25y^2}{16} + 1$$

Выражение будет принимать наименьшее значение при наименьшем $4+12y+25y^2$, когда

значение которой находится в каждой вершине параболы. $y_0 = -\frac{12}{2 \cdot 25} = -0,24$

$$x = \frac{-2 - 0,24 \cdot 3}{4} = -0,32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,1024 + 0,0576 + \frac{1}{9} = 1,16 \quad \text{Ответ: } 1,16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим элемент множества S и возводим в квадрат суммы:

$$a_0 = a_0$$

$$S_0 = 6a_0 + 15$$

$$S_1 = 6a_0 + 16$$

$$a_1 = a_0 + 1$$

$$S_2 = 6a_0 + 17$$

$$a_2 = a_0 + 2$$

$$S_3 = 6a_0 + 18$$

$$a_3 = a_0 + 3$$

$$S_4 = 6a_0 + 19$$

$$a_4 = a_0 + 4$$

$$S_5 = 6a_0 + 20$$

$$a_5 = a_0 + 5$$

$$S_6 = 6a_0 + 21$$

$$a_6 = a_0 + 6$$

$$S_7 = 28$$

Заметим, что от четности a зависит четность чисел, а потому мы можем выбрать пары возводимых p и q :

$$1) 6a_0 + 17 \text{ и } 6a_0 + 15$$

$$2) 6a_0 + 20 \text{ и } 6a_0 + 18$$

Обозначим второе число в каждой паре за x , а в q за y ,

$$3) 6a_0 + 19 \text{ и } 6a_0 + 17$$

$$4) 6a_0 + 20 \text{ и } 6a_0 + 16$$

тогда:

$$(6a_0 + x)^2 - (6a_0 + y)^2 = 492$$

$$5) 6a_0 + 19 \text{ и } 6a_0 + 15$$

$$6) 6a_0 + 18 \text{ и } 6a_0 + 16$$

$$x^2 + 12a_0(x - y) + y^2 = 492$$

$$7) 6a_0 + 21 \text{ и } 6a_0 + 15$$

Подставив в уравнение каждый из 3 вариантов и подставив их, мы

$$8) 6a_0 + 21 \text{ и } 6a_0 + 17$$

обнаружим, что четный a_0 . Будем считать паре $p = 6a_0 + 19$ и $q = 6a_0 + 17$,

$$9) 6a_0 + 21 \text{ и } 6a_0 + 19$$

тогда мы можем написать a_0 :

$$17^2 + 12a_0 \cdot 2 - 15^2 = 492$$

$$24a_0 = 420$$

$$a_0 = 17 \Rightarrow a_1 = 18, a_2 = 19, a_3 = 20, a_4 = 21, a_5 = 22, a_6 = 23$$

Ответ: 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18.

$a_6 = 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

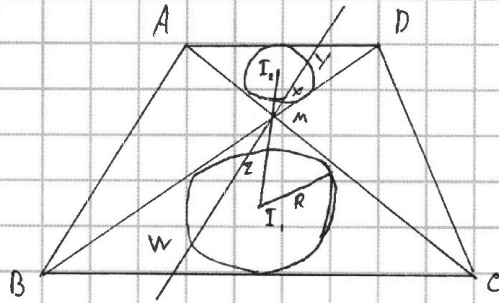
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
 $AD:BC = 1:2$
 $I_1 I_2 = 13/2$
 $MZ \cdot MY = 5$
 k -мн:
 $R = ?$

Решение:



$$\left. \begin{array}{l} \angle DAM = \angle MCB \text{ (накрест.)} \\ \angle CBM = \angle MDA \text{ (накрест.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADM \overset{\sim}{\sim} \triangle BMC \quad \left. \begin{array}{l} \\ AD:BC = 1:2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k\text{-накр. подобия: } 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} MI_1 - \text{секс. } \angle AMD \\ MI_2 - \text{секс. } \angle BMC \\ \angle AMD \text{ и } \angle BMC - \text{вертикальные} \end{array} \right\} \Rightarrow M \in I_2 I_1 \quad \left. \begin{array}{l} \triangle ADM \overset{\sim}{\sim} \triangle BMC, k=2 \\ \Rightarrow MI_1 = 2 MI_2 = \frac{13}{2} \cdot 2 = \frac{13}{3} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADM \overset{\sim}{\sim} \triangle BMC, k=2 \\ \angle AMD \text{ и } \angle BMC - \text{верт.} \end{array} \right\} \Rightarrow MY \cdot 2 = MW \quad MZ \cdot MW = (MI_1 - R)(MI_1 + R)$$

$$2 \cdot 5 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - R^2$$

$$R^2 = \frac{169 - 90}{9}$$

$$R = \frac{\sqrt{79}}{3} \quad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{79}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14} \quad 5 - 4 \sin \left(\frac{3\pi}{14} + \frac{\pi}{14} \right) \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \left(\frac{3\pi}{14} - \frac{\pi}{14} \right)$$

$$5 - 4 \left(\sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \right) \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \left(\sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \right)$$

$$5 \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{7}, \cos \frac{\pi}{14} + 5 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} + 4 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14} + 4 \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} + 9 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14}$$

$$5 \stackrel{?}{=} \cos \frac{\pi}{7} \left(4 + 9 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14}$$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку никакие 4 из 5 точек вне плоскости L не лежат на одной плоскости, мы можем построить треугольные пирамиды, содержащие 2, 3 или 4 из этих точек, 7 пирамид с большим количеством точек в основании будут иметь равно одну из этих точек.

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} + \frac{7!}{7!} \cdot 5 = 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + (35 + 21 + 7 + 1) \cdot 5 = 460 + 320 = 780$$

Ответ: 780

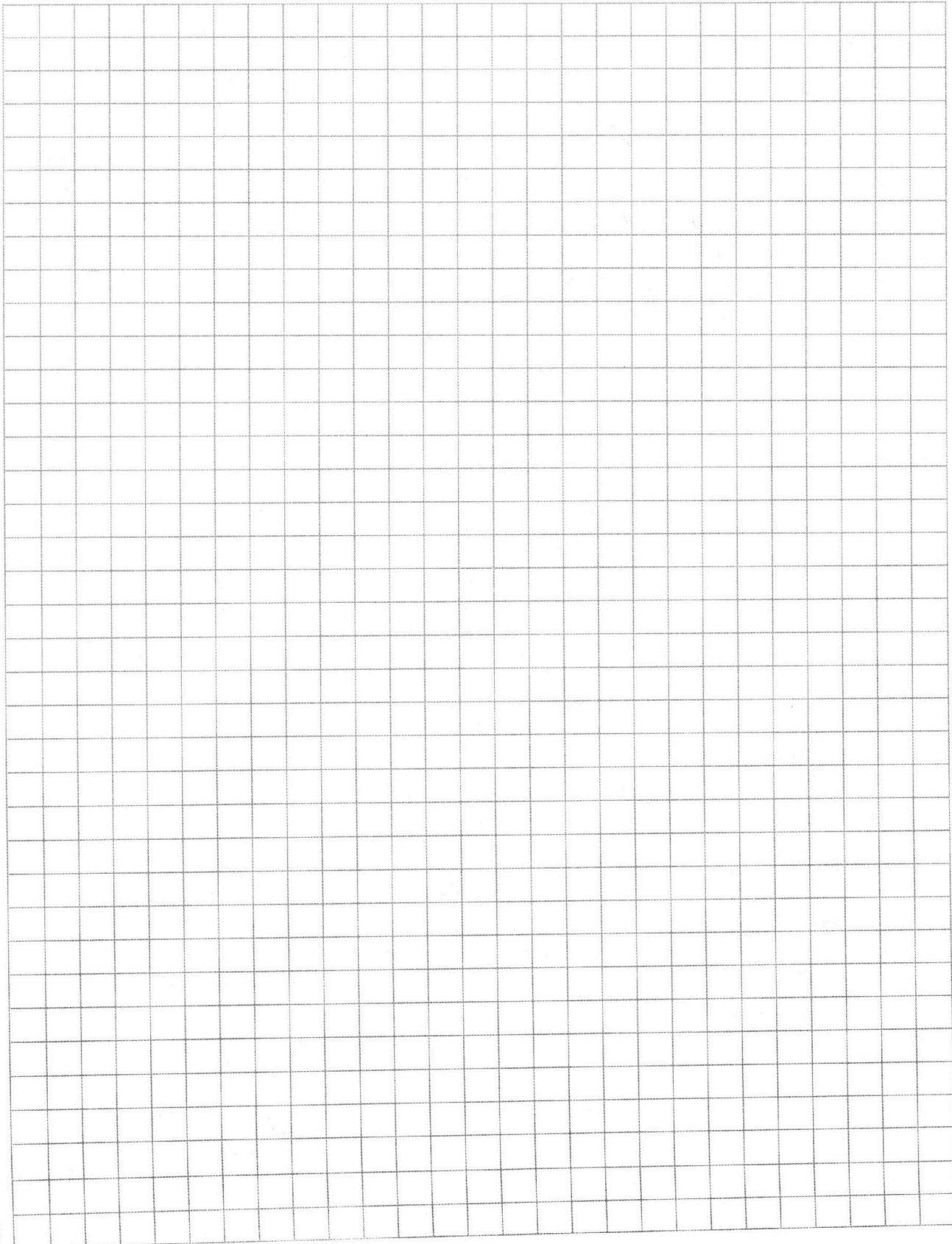


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$441 - 361 = 80$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ - 289 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 292 \\ - 132 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 640 \\ - 48 \\ \hline 592 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ - 68 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$21/15$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ - 227 \\ \hline 214 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 192 \\ - 216 \\ \hline -24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ - 48 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$480 = 24 \cdot 20$$

$$19/17$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ - 289 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 792 \\ - 42 \\ \hline 750 \end{array}$$

$$12 + 21 = 33$$

$$72 + 21 = 93$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

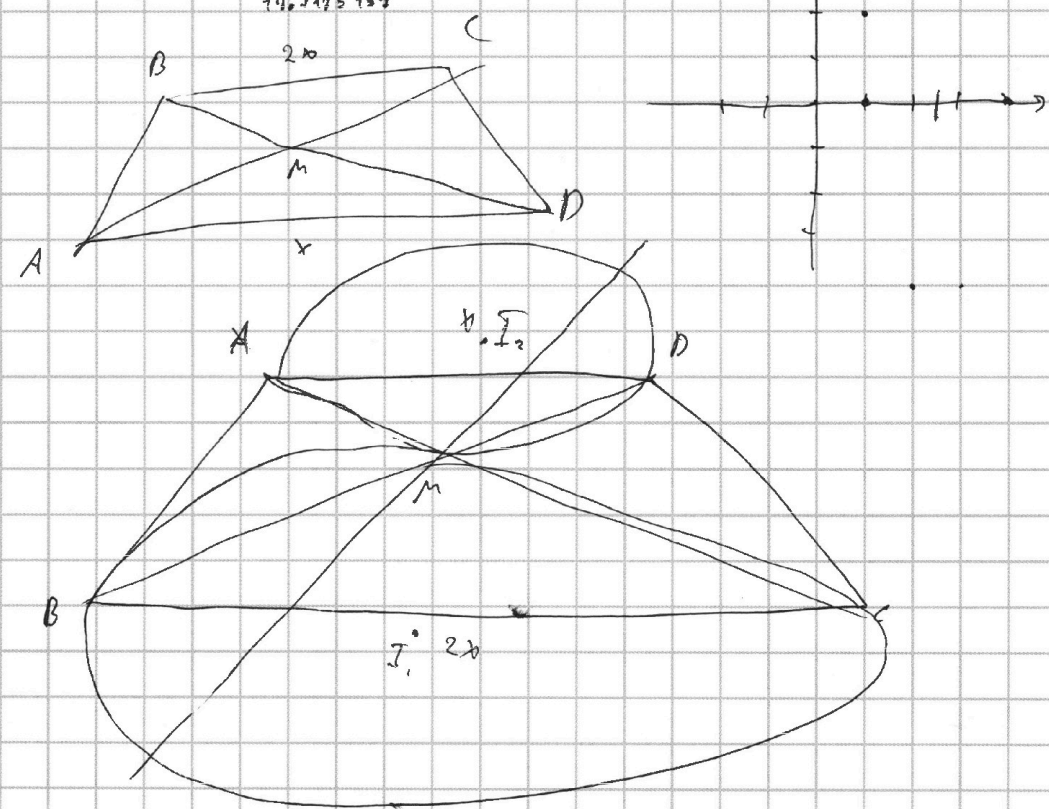
$$\frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$720 = 24 \cdot \alpha,$$

$$\alpha = 30$$

$$2 \cdot 180 + 19 = 379$$

$$19 \cdot 17 = 323$$



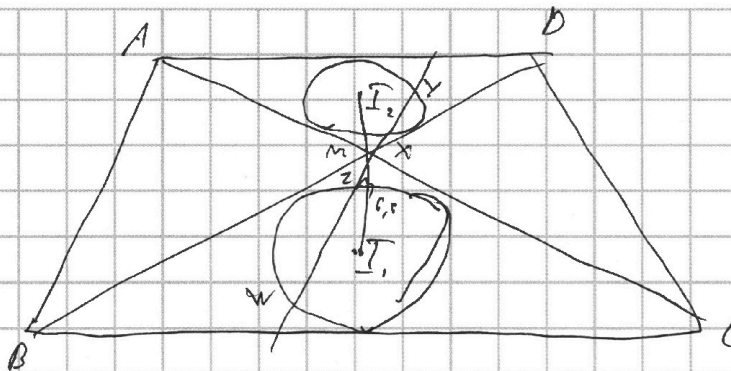


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{26 + 39}{18}$$

$$\frac{13}{2} = x + \frac{x}{2}$$

$$\frac{13}{2} \times \frac{2x}{2}$$

$$x = \frac{13}{3}$$

$$\frac{13}{3} + \frac{13}{6} = \frac{39}{6}$$

$$\frac{13}{2}$$

$$I_1, I_2 = 13, 6, 5$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

$$\frac{13}{2}$$

$$3, 5$$

$$MZ = \frac{13}{3}$$

$$2R_1 = 2R_2 \cdot 2$$

$$MZ \cdot MW = 10$$

$$\left(\frac{13}{3} - R\right)\left(\frac{13}{3} + R\right) = 10$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ + 24 \\ \hline 309 \\ + 30 \\ \hline 339 \\ + 25 \\ \hline 364 \end{array}$$

$$546 \cdot 5 = 2730$$

$$280$$

$$4$$

$$\frac{169 - R^2}{9} = 10$$

$$2R^2 = 49$$

$$A_{11}^3$$

$$P_{11}^3$$

$$70 + 29 = 99$$

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 11 \cdot 3 \cdot 5 = 165 - 35 = 130$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 35 = 85$$

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 9 \cdot 4 = 36 - 35 = 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 - 35 = 21$$

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 20 - 35 = -15$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} = 7$$

$$7 = 1$$

$$99 \cdot 5 = 495$$

$$495 + 285 = 780$$

$$130 + 85 + 49 + 21 = 285$$

1



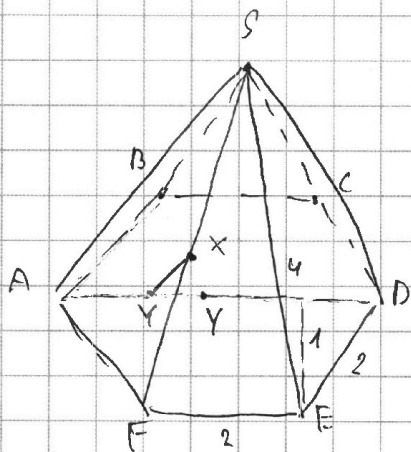
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sinh \frac{R}{4} < \frac{1}{2}$$



$$\sinh \frac{2R}{11} \cdot \cos \frac{R}{11} - \cos \frac{2R}{11} \cdot \sinh \frac{R}{11}$$

$$\sinh \frac{3R}{14} = \sinh \frac{R}{14} \cdot \cos \frac{R}{14} + \sinh \frac{R}{14} \cdot \cos \frac{R}{14}$$

$$\cos \frac{2R}{14} = \frac{\cos \frac{R}{14}}{\sinh \frac{R}{14}} - \frac{\cos \frac{R}{14}}{\sinh \frac{R}{14}} = 1 - 2 \sinh^2 \frac{R}{14}$$

$$5 - 4 \sinh \frac{2R}{14}$$

$$4 - 8 \sinh \frac{2R}{14} = 5 \sinh \frac{2R}{14}$$

$$4 = \sinh \frac{2R}{14}$$

5

$$4 \cos \frac{R}{4} - 10 \cos \frac{2R}{4} \cdot \sinh \frac{R}{14}$$

$$4 \sinh \frac{2R}{14} < \sinh \frac{R}{4} \Rightarrow < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos \frac{R}{4} (2 - 5 \sinh \frac{R}{14})$$

$$4 \cos \frac{R}{4} - \sinh \frac{R}{4} \cdot \cos \frac{R}{4} + 9 \cos \frac{2R}{4} \cdot \sinh \frac{R}{14} = 5 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\cos \frac{R}{4} (4 - 9 \cos \frac{R}{4} \cdot \sinh \frac{R}{14})$$

$$2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$16 \cdot \frac{y}{8} \cdot 24 = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$4x + 3y + z = 2$$

$$2 \cdot 4x + 3y + z = 2$$

$$4x + 3y + z = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$x = \frac{-2 - 3y}{4}$$

$$\frac{4 + 12y + 9y^2}{16} + y + 1$$

$$\frac{4 + 12y + 25y^2}{16} + 1$$

$$25y^2 + 12y + 4$$

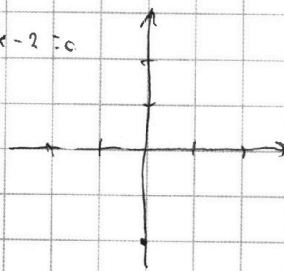
$$y = \frac{-12}{50} = -0,24$$

$$4x - 0,72 = -2$$

$$4x = -1,28$$

$$x = -0,32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (0,32)^2 + (-0,24)^2 + 2 \cdot 0,1024 + 0,0528 \cdot 1 = 1,16$$



$$x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{array}{r} 0,32 \\ \times 0,32 \\ \hline 0,1024 \\ 0,24 \\ \hline 0,1024 \\ 0,1024 \\ \hline 0,1600 \end{array}$$

$$0,24 \cdot 3 = 0,72$$

$$\frac{1,28}{4} = 0,32$$