МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство

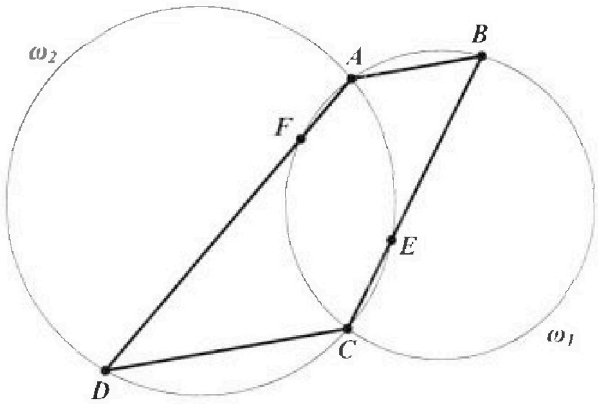
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0,\\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0.\end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB<CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Для прямоугольного треугольника выполняется

(0) $(|2x-2|)^2+(|x^2+3x|)^2=(|3x+1|)^2$, а также длина

стороны не может быть равной нулю, поэтому

$|2x-2|\neq 0$ (1)

$|3x+x^2|\neq 0$ (2) Условие

$|3x+1|\neq 0$ (3)

P.S $(|a|)^2=a^2$

Решая ур-е (0), получаем:

- Раскроем все скобки и перенесем в одну часть:

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=0$. Это эквивалентно

$(x-1)(x+3)(x^2+4x-1)=0$

Но 1 и 3 не могут быть решениями, ибо это противоречит (1) и (2) соответственно. Поэтому решениями будут только корни квадратного уравнения

$x^2+4x-1=0$

$x=-2\pm\sqrt{5}$

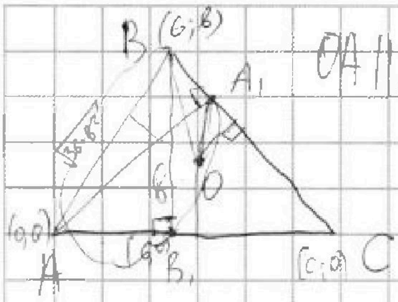
Ответ: $x_1=-2-\sqrt{5}$; $x_2=-2+\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

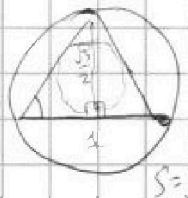
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$OA \parallel AA_1$

черновик



$2R = \frac{1}{\sin 60} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$R = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$36 + b^2 = AA_1^2 + A_1B$

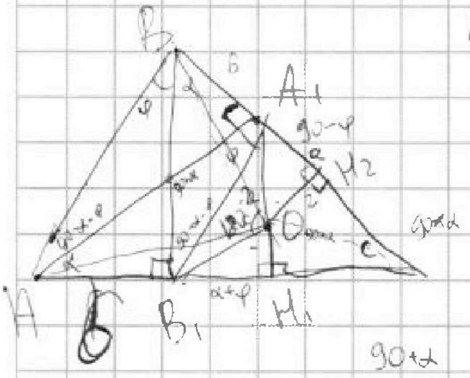
$S = BB_1 \cdot$

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}$

AB_1A_1B – вписанный

Не одинаковы ли площади OBA_1 и OAB_1

$OH_1 \cdot AB_1 \; ? \; OH_2 \cdot BA_1$



$AA_1 = y$

$BB_1 = x$

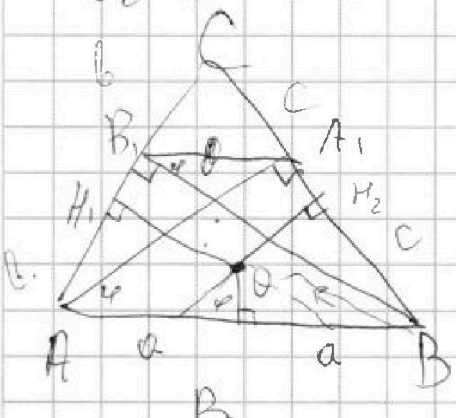
$A_1B^2 = 36 + x^2 - y^2$

$OB = OA = \sqrt{4 + (6+a)^2}$

$4a^2(c^2 - b^2) \; ? \; R \cdot BB_1 \cdot \frac{c^2 - b^2}{b^2}$

$\frac{S}{C} \cdot \frac{2abc}{S}$

$4a^2b^2 \; ? \; R \cdot BB_1 = \frac{S}{c}$



$R(a, b, c)$

$AA_1 \cdot 2b = BB_1 \cdot 2c$

$AA_1 = BB_1 \frac{c}{b}$

$R = \frac{S}{4abc}$

$\frac{S}{c}$

$A_1B = \sqrt{4a^2 - (BB_1 \frac{c}{b})^2}$

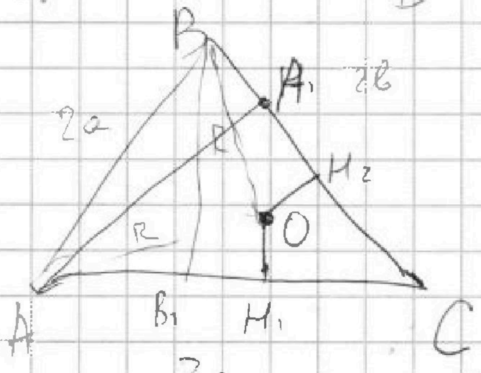
$OH_1 = \sqrt{R_{on}^2 - b^2}$

$AB_1 = \sqrt{4a^2 - BB_1}$

OH_2

$R \cdot S = 2abc$

$R = \frac{2abc}{S}$



$A_1B = \sqrt{4a^2 - (BB_1 \frac{c}{b})^2}$

$OH_2 = \sqrt{R^2 - b^2}$

$AB_1 = \sqrt{4a^2 - BB_1^2}$

$OH_1 = \sqrt{R^2 - c^2}$

$\left(\frac{b}{c}\right)^2 \left(4a^2 - (BB_1 \frac{c}{b})^2\right)(R^2 - b^2)$

$4a^2c^2 - (RBB_1)^2 \; ? \; 4a^2b^2 - (RBB_1 \frac{c}{b})^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть мы нашли два таких числа, $a(a+1)$ и $b(b+1)$.
Рассмотрим их разность $a(a+1)-b(b+1)$ (пусть $a>b$ для определенности). Тогда:

$$a^2+a-b^2-b=81\cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1)=81\cdot 10^{2024}.$$

Заметим, что эти скобки имеют разную четность, тогда одна скобка должна делиться на 2^{2024}, а вторая - вообще не делиться на 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \le \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} \le 0$$

$$\frac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3}{(\sqrt{4x-x^2-3}-3)(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})} \le 0$$

При решении ОДЗ уже выяснили, что

$\sqrt{4x-x^2-3}-3<0$, поэтому домножим на него, меняя знак нер-во.

$$\frac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} \ge 0$$

Числитель всегда больше знаменателя, ибо равен знаменателю + положит. число. Поэтому когда знаменатель >0, нер-во выполняется:

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}>0$$

$\sqrt{2x-x^2} > \sqrt{x^2+x-2}$. Оба подкоренных выраж. >0

$2x-x^2 > x^2+x-2$

$2x^2+x-2<0$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

Учитывая ОДЗ, в ответ: $x\in\left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

Если же числитель ≤ 0, то и знаменатель <0, такие случаи нам тоже подходят. Иные же (числ >0 и знам<0 — не подходят)

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3 \le 0$$

ОДЗ:

1) $4x-x^2-3\ge 0$

$(x-3)(x-1)\le 0$

$x\in[1;3]$

2) $x^2-2x\le 0$

$x(x-2)\le 0$

$x\in[0;2]$

3) $x^2+x-2\ge 0$

$(x+2)(x-1)\ge 0$

$x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$

$\Downarrow$

$x\in[1;2]$

4) $\sqrt{4x-x^2-3}\ne 3$

$x^2-4x+6>0$

$\forall x\in\mathbb{R}$

5) $\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}\ne 0$

$x\ne\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

Итог ОДЗ:

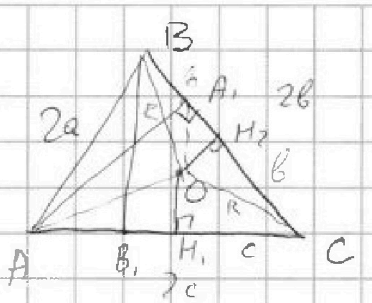
$x\in\left[1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};2\right]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Введем следующие обозначения: $AB = 2a$; $BC = 2в$; $AC = 2c$. Серединные перпендикуляры к AC и BC соответственно, на пересечении которых и лежит O, OH_1 и OH_2.

Также $AA_1 \cdot 2в = BB_1 \cdot 2c = 2S_{ABC} \Rightarrow AA_1 = BB_1 \cdot \frac{c}{в}$;

Тогда по Th. Пифагора: $A_1B = \sqrt{(2a)^2 - (BB_1 \cdot \frac{c}{в})^2}$

$AB_1 = \sqrt{(2a)^2 - BB_1^2}$. Обозначив $OA = OB = OC$ за R, получаем

$OH_1 = \sqrt{R^2 - c^2}$ (т.к. $H_1C = c$) и $OH_2 = \sqrt{R^2 - в^2}$ ($H_2B = в$).

Но $\sqrt{4a^2 - (BB_1 \cdot \frac{c}{в})^2} \sqrt{R^2 - в^2} = \sqrt{4a^2 - BB_1^2} \sqrt{R^2 - c^2}$.

Действительно: (возводим в квадрат, все положительно)

$(4a^2 - (BB_1 \cdot \frac{c}{в})^2)(R^2 - в^2) = (4a^2 - BB_1^2)(R^2 - c^2)$

$\Updownarrow$

$4a^2c^2 - R \cdot BB_1^2 = 4a^2в^2 - (R\, BB_1 \frac{c}{в})^2$

$4a^2(c^2 - в^2) = R^2 \cdot BB_1^2 \cdot \frac{c^2 - в^2}{в^2}$ Если $c^2 - в^2 = 0$ выполняется, если нет — сокращаем

$4a^2 = R^2 \cdot \frac{BB_1^2}{в^2}$. Возьмем корень, все расст. > 0

$2aв = R \cdot BB_1$. Но $BB_1 = \frac{S_{ABC}}{S}$, а $R_{оп} = \frac{8aвc}{S}$.

Тождество доказано. Но тогда $A_1B \cdot OH_2 = OH_1 \cdot AB_1 = 2S_{OBA_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow OH_1$ (искомая величина, перп.) $= \frac{2 \cdot S_{OBA_1}}{AB_1} = \frac{2 \cdot 6}{6} = 2$.

Ответ: 2.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^3-3y^2-1=0 \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \end{cases}$$

$x=\dfrac{y^3-5y^2+3y-2}{2-y}$. $y\neq 2$, это решение не подходит.

Подставляя в первое ур-е и раскрывая скобки, получаем.

$y-7y^5-2y^4+8y^3-2y=0$

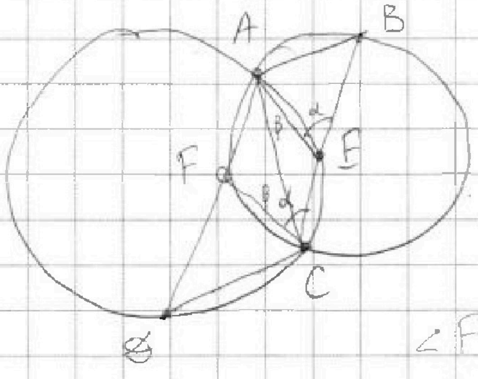
$y(y+1)(y^4-8y^3+6y^2-2y-2)=0$.

При $y=0$ $x=\dfrac{-2}{2-0}=-1$.

При $y=-1$: $\dfrac{-2+5-3-2}{2+1}=\dfrac{-1}{3}$

Ответы $(-1;0)$ и $(-\frac{1}{3};-1)$.

(одни из)



~~Док-во: D~~

Решение: Для начала докажем, что $AE \parallel FC$. Пусть $\angle FCE = \alpha$, тогда $\angle FAB = 180 - \alpha$ из вписанности $CFAB$, тогда $\angle ADC = \alpha$ из того, что $ABCD$ - трапеция, тогда $\angle AEB = \alpha$ из вписанности $DCEA$ $\Rightarrow \angle AEB = \angle FCB \Rightarrow AE \parallel FC$. Но тогда $\angle ACE = \angle ACF = \beta$ как накрест лежащие. Тогда:

$\frac{EC}{\sin\beta} = 2R(w_2)$, а $\frac{AF}{\sin\beta} = 2R(w_1) \Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{R(w_1)}{R(w_2)} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \geq \sqrt{4x-x^2-3} - 3$

меньше 0 должен быть — меньше 0

$x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 2\right]$ – уже решали.

Тогда возведение в квадрат ~~не скура~~ меняет знак

$2x - \cancel{x^2} - x^2 - x + 2 - 2\sqrt{2x-x^2}\sqrt{x^2+x-2} \geq 9 + 4x - \cancel{x^2} - 3 - 6\sqrt{4x-x^2-3}$

$x^2 + 3x + 4 \leq -6\sqrt{4x-x^2-3} - 2\sqrt{2x-x^2}\sqrt{x^2+x-2}$

~~$-6\sqrt{4x-x^2-3} - 2\sqrt{2x-x^2}\sqrt{x^2+x-2} \geq -6\sqrt{4x^2-x^2-3}$. При $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 2\right]$~~

~~Это выражение может возрастает. Поэтому $f(x) = 4x^2 - x^2 - 3$~~

~~при $x = 1{,}25 \leq f(x)$ при $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 2\right] \Rightarrow$ Со знаком~~

~~минус наоборот, $6\sqrt{4x-x^2-3}$~~

$x^2 + 3x + 4 > 0$ при ~~положит.~~ $x \in [1, 2]$, а правая часть < 0. То есть, такое не выполняется при $x \in$ ОДЗ $\Rightarrow$ это невозможно

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$

$2x\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$

$(z-2)\sqrt{29} = \sqrt{2}(4-2x-3y)$.

Если $z \neq 2$, можем поделить на $(2-z)$; и $4-2x-3y \neq 0$

$\sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{4-2x-3y}{z-2}$.

Рациональное число равно иррациональному, противоречие. Тогда $z=2$, и

$4-2x-3y = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$.

Нам нужно минимизировать (x^2-y^2). При этом $2x+3y=4$ $(x, y \in \mathbb{Z})$. Решая Диофантово ур-е, получаем: $\begin{matrix} x = 2-3t \\ y = 2t \end{matrix}$, $t \in \mathbb{Z}$. А (x^2-y^2) тогда:

$(2-3t)^2 - (2t)^2 = 5t^2 - 12t + 4$, парабола с ветвями вверх достигает минимума в $x_в = \frac{+12}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}$. Ближайшая целая точка (из св-в параболы) и будет t_{min} (в других целых точках значения будут больше, парабола симметрична относительно вершины).

Тогда $t_{min} = 1$ (ближе всего к $\frac{6}{5}$), $x=-1$; $y=2$ $\Rightarrow$

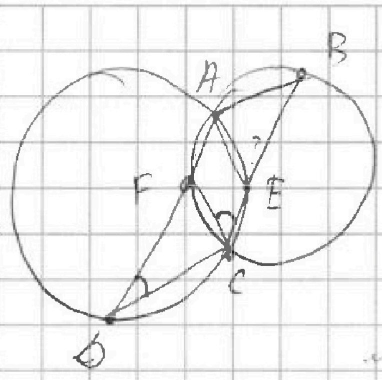
$\Rightarrow x^2-y^2+z^2 = (-1)^2 - 2^2 + 2^2 = 1$. Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



FCE = 180 - FAB (из вп.) = ∠ADC = ∠AEB

AE ∥ FC

Это a-b: $a - b = 2^{2024} \cdot X$ $\quad X \leq 10^{1012} \cdot 9$

$a = b + 2^{2024} \cdot X$

2b+1>0

$1 + 2b + 2^{2024} \cdot X = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{X}$

Не больше половины 5-рок

$2^{2024} \cdot X$

0 троек

4 тройки

$2b = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{X} + 2^{2024} \cdot X - 1$

2-ки сюда

$4y^3 - 24y^2 + 12y - 2$ производная

$a(a+1) = b(b+1)$ $\quad (a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$

делится на 81

5^{n} $\quad 5^{2024-n}$

$2y^3 - 12y^2 + 6y - 1 = 0$

$2^{2024} \cdot 5^{n} < 5^{2024-n}$

$2^{2024} \leq 5^{2024-2n}$

$2^{2024} <$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

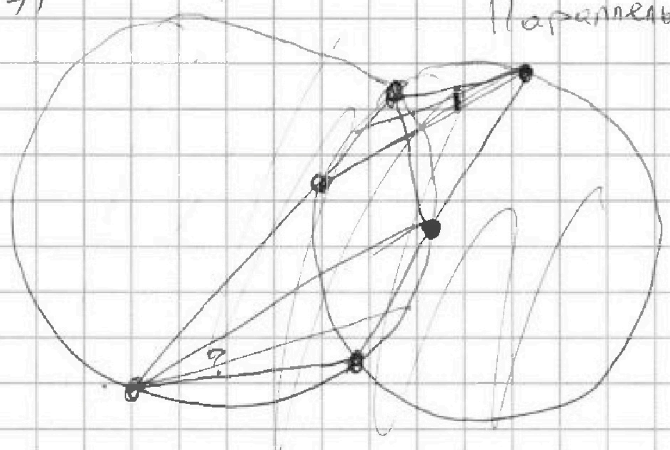
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

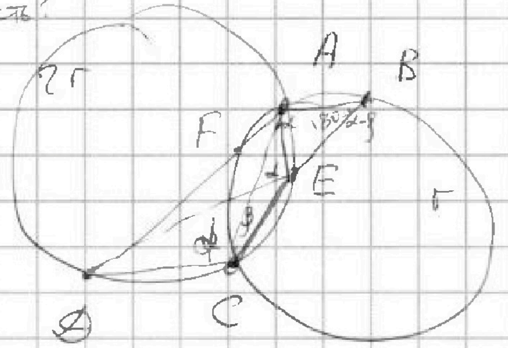
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7)

Параллельность?



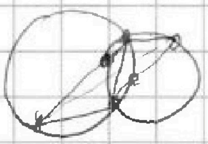


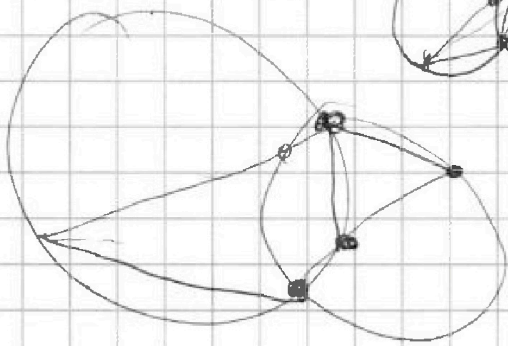
$\frac{CE}{AF}$?

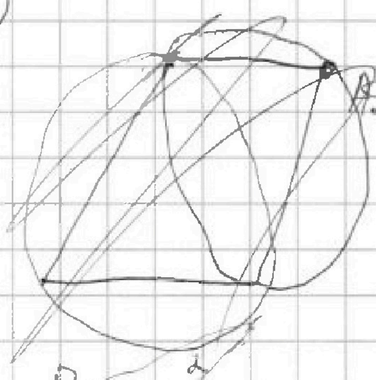
$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2r$

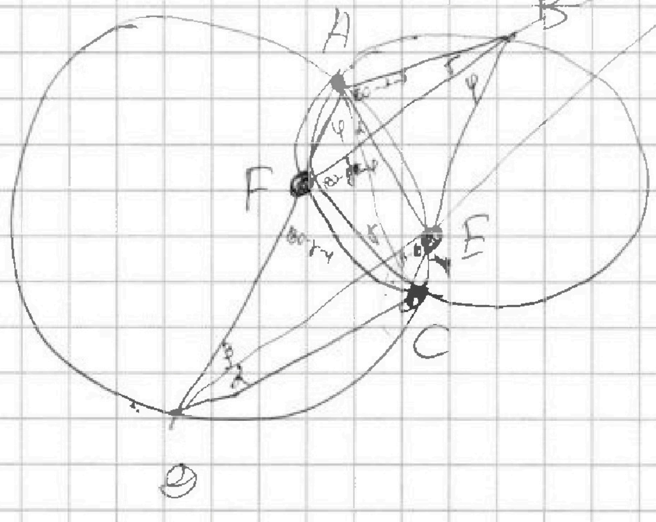
$\frac{AD}{\sin\alpha} = 4r$

$AD = 2BC$









Достаточно: $\angle ACB = \beta$

Или $ACF = \alpha$

$FCB = \alpha + \beta$ из вписанности

$AFC = 180 - \gamma - \varphi$

$CAB = 180 - \alpha - \beta - \cancel{\alpha} - \varphi =$

$= 180 - \beta - \varphi - \alpha$

$\cancel{(\beta + \varphi + \ldots)}$

$180 - \gamma - \varphi - (\beta + \alpha)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4) $\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \le \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} - \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} \le 0$

$\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3}{\underbrace{(\sqrt{4x-x^2-3}-3)}_{\text{всегда} <0}(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})} \le 0$

$\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3}{(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})} \ge 0$

Знаки знаменателя:

$y^4-8y^3-6y^2-2y-2 \,|\, y^2-2$

$y^4-0y-2y^2$

$-8y^3-4y^2-2y$

$y^4-8y^3-6y^2-2y-2 \,|\, y-(\frac{3-\sqrt{17}}{2})$

$y^4-\frac{3-\sqrt{17}}{2}y^3$

$\frac{-13+\sqrt{17}}{2}y^3$

$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

ОДЗ:

1) $x^2-4x+3\le0$ $\cdot(-1)$

$(x-3)(x-1)\le0$

$x\in[1;3]$

2) $x^2-2x\le0$

$x\in[0;2]$

3) $x^2+x-2\ge0$

$(x+2)(x-1)\ge0$

$x\in[-2;1]$

Всё существует только при $x=1$.

$x\in[-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$

$x\in[1;2]$

$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}\ne0$

$2x-x^2\ne x^2+x-2$

$2x^2-x-2\ne0$

$D=17$

$x(x-2)\;?\;(x+2)(x-1)$

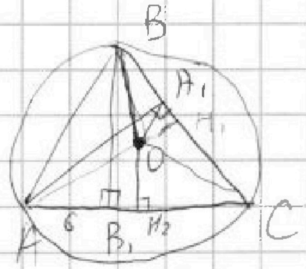
$5-3-1{,}25=0{,}75$

$S(OBA_1)=6$

$S(OBA_1)=OH_1\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{OB\cdot BC}{2}=6$

$OB=$

$OB=\sqrt{\frac{1}{2}BC^2\cdot OH_1^2}$



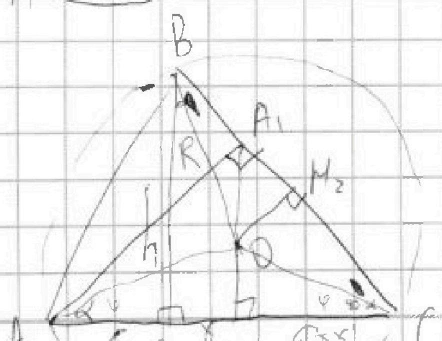
$4x-x^2-3=9$

$x^2-4x+6=0$

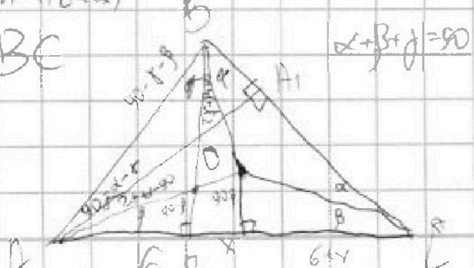
$BB_1=h \Rightarrow AB=\sqrt{h^2+36}$

$BC=\sqrt{h^2+(6+2x)^2}$

$6=\frac{AB_1\cdot OH_2}{2}$



$A_1AC \sim B_1BC$



$\alpha+\beta+\gamma=90$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1) $|2x-2| \neq 0$
$|3x+1| \neq 0$
$|x^2+3x| \neq 0$

~~Все~~

$|2x-2| > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow$ Все подмодульные > 0

$(2x-2)^2 + \cancel{x^2}(\cancel{x}+3)^2 = (3x+1)^2$

$a = 5t+2$
$b = 5k+2$

$+6x^3$

$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + \cancel{9x^2} = \cancel{9x^2} + 6x + 1$

$\vdots 5$

$81 - 18 - 42 + 3 \neq 0$

~~$x^4 - 2x^2 - 14x + 3 = 0$~~

$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$

$(x-1)$ делится

$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \mid x-1$
$x^4 - x^3 \qquad x^3 + 7x^2 + 11x - 3$
$7x^3$
$7x^3 - 7x^2$
$11x^2 + 11x$
$-3x + 3$

$(x-1)(x^3 + 7x^2 + 11x - 3) = 0$

$(x-1)(x^2 + 4x - 1)(x+3) = 0$

$-27 + 63 - 33 - 3 = 0$

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$

~~$x^4 + 6x^3$~~

$x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \mid x+3$
$x^3 + 3x^2 \qquad x^2 + 4x - 1$
$4x^2 + 11x$
$4x^2 + 12x$
$-x + 3$

$2x\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$

$\sqrt{2}(2x + 3y - 4) = \sqrt{29}(2 - z)$

Пусть $z \neq 2$

целое число не может быть вида $\sqrt{\frac{29}{2}}$ ...

$D = 20$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$

ответ

$\frac{2x + 3y - 4}{2 - z} = \sqrt{\frac{29}{2}}$

рац = иррац $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow z = 2$

$2x + 3y - 4 = 0$

x	y
2	0
−1	2
−4	4

$x = 2 - 3t$
$y = 2t$

$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$

Все 2-ки в одной

$a^2 - b^2 + a - b$

$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$

$(2-3t)^2 + (2t)^2 =$
$= 4 - 12t + 13t^2$
$\min$ в t: $\frac{+12}{26} = \frac{6}{13}$

Они разной четности. $a - b < a + b + 1$

Ближе всего $t = 1$

$a - b = 1$ $\qquad a + b + 1 = 81 \cdot 10^{2024}$
$a - b = 3$ $\qquad a + b + 1 = 27 \cdot 10^{2024}$
$a - b = 9$ $\qquad a + b + 1 = 9 \cdot 10^{2024}$
$a - b = 81$ $\qquad a + b + 1 = 10^{2024}$

5 вариантов

$(-1)^2 + 2^2 + 2^2 = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$\cancel{x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0}$

$\cancel{-2x+xy+y^3-5y^2}$

$2x^2-5xy+y^3-y^2-3y=0$

$y=0 \Rightarrow x=\pm 1$, $x=-1 \Rightarrow x=-1$

$x^2+2x-3xy+2y^2-3y+1=0$

$(x+1)$

$y^2-2y+1+y^2-y-1$

$(x+1)^2+y(2y-3x-3)=0$

$x=1 \Rightarrow y^3-3y^2-2y=0$

$y(y^2-3y-2)=0$

$y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

$-3y(x+1)+2y^2=0$

$4x-2xy-2y^3+8y^2-6y+4=0$

$(x+1)(x+1-3y)+2y^2=0$

$x^2-4x+3y^3-13y^2-6y-9=0$

y^2-2

$\cancel{(x^2-1)^2+(y-1)^2-3xy+y+1-y^3}$ $(x-2)^2=$

$8-20+6-2$

$x(2-y)=y^3-5y^2+3y-2$

$y\neq 2$.

$x(x-2y)+y^3-3y^2-1=0$

$16-64+24+2$

$8-8\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}-2$

$\frac{y^3-5y^2+3y-2}{2-y}\left(\frac{y^3-5y^2+3y-2}{2-y}-2y\right)+y^3-3y^2-1=0$

$\left(\frac{y^3-5y^2+3y-2}{2-y}\right)\left(\frac{y^3-3y^2-y-2}{2-y}\right)+y^3-3y^2-1=0$

$(y^3-5y^2+3y-2)(y^3-3y^2-y-2)+(y^3-3y^2-1)(y^2-4y+4)=0$

$y^6-3y^5-y^4-2y^3-5y^5+15y^4+5y^3+10y^2+3y^4-9y^3-3y^2-6y-2y^3+6y^2+4y+4+$

$+y^5-4y^4+4y^3-3y^4+12y^3-12y^2-y^2+4y-4=0$

$=y^6-7y^5-2y^4+8y^3+2y^2-2y=0$

$: y+1$

$y(y^5-7y^4-2y^3+8y^2-2)=0$

$y(y+1)(y^4-8y^3+6y^2+2y-2)=0$

$y^5-7y^4-2y^3+8y^2-2 \mid y+1$

y^5+y^4

$-8y^4$

$-8y^4-8y^3$

$6y^3+6y^2$

$y^4-8y^3+6y^2+2y-2$

$2y^2-2$

$2y^2+2y$

$-2y-2$