МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство

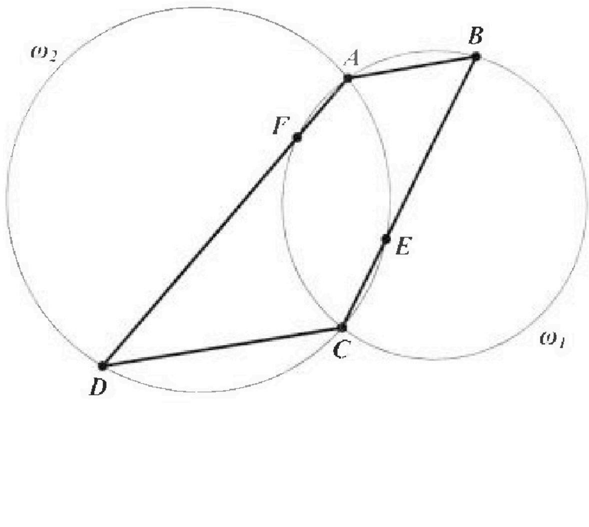
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0, \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0. \end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD $(AB<CD)$. Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1.

По теореме Пифагора из условия следует, что $|2x-2|^2+|x^2+3x|^2=|3x+1|^2$. А поскольку $|a|^2=a^2$ для любого $a\in\mathbb{R}$, то мы можем переписать выражение, как $(2x-2)^2+(x^2+3x)^2=(3x+1)^2$;

$4x^2-8x+4+x^4+6x^3+\cancel{9x^2}=\cancel{9x^2}+6x+1$;

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=0$.

По теореме о ~~рациональных~~ целых корнях многочлена если у многочлена есть целый корень, то он будет делить его свободный член (в нашем случае $a_0=3$). ~~Тогда~~ А по теореме Безу имеем, что остатком при делении $P(x)$ на $(x-a)$ будет $P(a)$. Отсюда заметим, что $P(1)=P(-3)=0$, значит, наш $P(x)\,\vdots\,(x-1)$ и $P(x)\,\vdots\,(x+3)$. Тогда $P(x)\,\vdots\,(x-1)(x+3)$, а $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$;

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+6x^3+4x^2-14x+3 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
-\;(x^4+2x^3-3x^2) & x^2+4x-1 \\ \cline{1-1}
4x^3+7x^2-14x & \\
-\;(4x^3+8x^2-12x) & \\ \cline{1-1}
-x^2-2x+3 & \\
-\;(-x^2-2x+3) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Найдём корни ~~много~~ двучлена $x^2+4x-1=0$;

$x^2+4x-1=0$;

$D=4^2-4\cdot1\cdot(-1)=20$;

$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm2\sqrt5}{2}=-2\pm\sqrt5$.

Отсюда корнями многочлена $x^4+6x^3+4x^2-14x+3$ являются числа 1, -3, $-2-\sqrt5$ и $-2+\sqrt5$. Но, возвращаясь к условию, заметим, что если $|2x-2|$, $|x^2+3x|$ и $|3x+1|$ ~~$\neq0$~~ — стороны треугольника, то они не равны 0. Отсюда $2x-2\neq0\Rightarrow x\neq1$, $x^2+3x=x(x+3)\neq0\Rightarrow x\neq0,-3$ и $3x+1\neq0\Rightarrow x\neq-\frac13$. Тогда из наших корней подойдут только $x_{1,2}=-2\pm\sqrt5$.

Ответ: $x_{1,2}=-2\pm\sqrt5$.

№2

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$;

$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$;

$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{29} - z\sqrt{29}$;

$\sqrt{2}(2x+3y-4) = \sqrt{29}(2-z)$;

Если обе части возвести в квадрат, то видим, что в получившемся выражении $2(2x+3y-4)^2 = 29(2-z)^2$ ~~если~~ в левой части делитель ~~2~~ 29 будет встречаться чётное количество раз, т.к. $2 \not\vdots 29$, а если $v_{29}(2x+3y-4) = t$, то $v_{29}((2x+3y-4)^2) = 2v_{29}(2x+3y-4) = 2t \vdots 2$, а в правой части если $v_{29}(2-z) = u$, то $v_{29}(29(2-z)^2) = v_{29}(29) + 2v_{29}(2-z) =$

$= 2u + 1 \not\vdots 2$, т.е. 29 будет встречаться нечётное количество раз. Но поскольку эти части равны, то, чтобы не возникало противоречия, ~~$(2-z)^2$ долж~~ обе части должны равняться нулю. Тогда $(2-z)^2 = 0$; $2-z=0$; $z=2$, соответственно и $2(2x+3y-4)^2=0$; $2x+3y-4=0$; $2x+3y=4$. Раз точное значение z нам стало известно, теперь достаточно вычислить минимальное значение x^2-y^2:

$2x+3y=4$; $2x = 4-3y$; $x = \frac{4-3y}{2} = 2-y-\frac{y}{2}$.

Поскольку $x \in \mathbb{Z}$, пусть $\frac{y}{2} = k$ $(k \in \mathbb{Z})$, тогда $y = 2k$,

$x = 2-y-\frac{y}{2} = 2-2k-k = 2-3k$;

$x^2-y^2 = (2-3k)^2-(2k)^2 = 4-12k+9k^2-4k^2 = 5k^2-12k+4$.

Это график квадратичной функции, парабола, ветви которой направлены вверх (т.к. $a=5>0$). Значит, минимальное её значение достигается в точке $k_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2\cdot 5} = 1{,}2$

Но поскольку $k \in \mathbb{Z}$, рассмотрим ближайшие к k_0 целые значения: 1 и 2. При $k=1$ $x^2-y^2=5\cdot 1^2-12\cdot 1+4=5-12+4=-3$, при $k=2$ $x^2-y^2=5\cdot 2^2-12\cdot 2+4=20-24+4=0$ – видим, что при $k=1$ получилось меньшее значение, тогда при $k=1$ $x=2-3\cdot 1=-1$, $y=2\cdot 1=2$, $x^2-y^2+z^2=(-1)^2-2^2+2^2=1-4+4=1$.

Ответ: 1.

(Замечание: В данной задаче $\vartheta_p(a)$ – степень вхождения ~~числа~~ простого делителя p в число a. Например, $\vartheta_3(24)=1$, т.к. по каноническому разложению $24=2^3\cdot 3$. Из обозначения вытекают свойства, что $\vartheta_p(a^k)=k\cdot\vartheta_p(a)$ и $\vartheta_p(ab)=\vartheta_p(a)+\vartheta_p(b)$.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3.

Рассмотрим числа a и b, где $a>b$, $a, b \in \mathbb{N}$, а ~~из~~ точнее их „хорошие" версии $a(a+1)$ и $b(b+1)$: ~~$a+$~~ по условию $a(a+1)-b(b+1)=81\cdot10^{2024}$;
$a^2+a-b^2-b=81\cdot10^{2024}$; $(a^2-b^2)+(a-b)=81\cdot10^{2024}$;
$(a-b)(a+b)+(a-b)=81\cdot10^{2024}$; $(a-b)(a+b+1)=81\cdot10^{2024}$.
Заметим, что если a и b одной чётности, то $a-b \vdots 2$, $a+b \vdots 2$, но $a+b+1 \not\vdots 2$, если a и b разной чётности, то $a-b \not\vdots 2$, $a+b \not\vdots 2$, но $a+b+1 \vdots 2$, т.е. в любом из случаев имеем, что один множитель чётный, другой - нечётный, т.е. один из множителей забирает все 2 из числа $81\cdot10^{2024}$ себе. А поскольку по каноническому разложению 2^{30} $81\cdot10^{2024}=2^{2024}\cdot3^4\cdot5^{2024}$, то для начала ~~скажем, что~~ рассмотрим случай, что $a-b$ забрал 2^{2024} себе, тогда способов ~~разместить~~ добавить туда же степень 3 – 5 (от 0-й до 4-й включительно, остальные 3 уйдут в $a+b+1$), аналогично способов разместить туда степень 5 – 2025. Значит, всего у нас $5\cdot2025$ ~~$=$~~ $=10125$ способов сделать множитель $a-b$ в этом случае. Аналогично получаем 10125 способов, если всю степень двойки забрало число $a+b+1$. Заметим, что раз $a>b\geq1$, то $a+b+1>2b+1\geq3$, поэтому случай, когда $a+b+1=1$, мы исключаем. Остаётся $10125+10125-1=20249$ способов. Теперь докажем, что пары чисел не совпадают друг с другом. Предположим, нашлись такие пары ~~$a+b$~~ (a_1, b_1) и (a_2, b_2), что $a_1-b_1=a_2+b_2+1$ и $a_2-b_2=a_1+b_1+1$. Очевидно, это невозможно, т.к. из 1 уравнения $a_1-a_2=b_1+b_2+1$, из 2-го $a_2-a_1=b_1+b_2+1$, а это возможно только, когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$.

Ответ: 20249 пар.

№ 6.

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0, \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0. \end{cases}$$

Сложив оба уравнения системы, получим:

$x^2+2x-3xy+2y^2-3y+1=0.$

Решим здесь квадратное уравнение относительно x:

$x^2+x(2-3y)+2y^2-3y+1=0.$

$D=(2-3y)^2-4\cdot(2y^2-3y+1)=4-12y+9y^2-8y^2+12y-4=y^2.$

$x_{1,2}=\frac{-(2-3y)\pm\sqrt{y^2}}{2\cdot 1}=\frac{3y-2\pm y}{2}$ (так можно раскрыть квадратный корень, потому что в обоих случаях корни выйдут одинаковыми)

$x_1=\frac{3y-2-y}{2}=\frac{2y-2}{2}=y-1,$

$x_2=\frac{3y-2+y}{2}=\frac{4y-2}{2}=2y-1.$

~~1)~~ Для более лёгкого поиска решений выразим x через y во втором уравнении ~~выражении~~, получим $x(2-y)-y^3+5y^2-3y+2=0,$

$x(2-y)=y^3-5y^2+3y-2,\quad x=\frac{y^3-5y^2+3y-2}{2-y}.$

1) $x=y-1$: из второго уравнения $\overset{x}{\cancel{(y-1)}}(2-y)-y^3+5y^2-3y+2=0$ получим $(y-1)(2-y)-y^3+5y^2-3y+2=0;$

$2y-y^2-2+y-y^3+5y^2-3y+2=0;\quad -y^3+4y^2=0;\quad y^3-4y^2=0;$

$y^2(y-4)=0.$ Если отсюда $y=0$, то $x=0-1=-1$ – подставляя в первое уравнение, выясняем, что такая пара подходит. Если $y=4$, то $x=4-1=3$, и такая пара тоже, аналогично первой, подходит.

2) $x=2y-1$: из второго уравнения аналогично случаю 1 получаем $(2y-1)(2-y)-y^3+5y^2-3y+2=0;$

$4y-2y^2-2+y-y^3+5y^2-3y+2=0;\quad -y^3+3y^2+2y=0;\quad |:(-1)$

$y(y^2-3y-2)=0.$ Если $y=0$, то $x=2\cdot 0-1=-1$, а такая пара уже была, значит, осталось проверить корни двучлена

~~$y^2-3y+2=0;\ y^2-3y+2=y^2-2y-y+2=y(y-2)-(y-2)=(y-1)(y-2)=0$~~

~~Если $y=1$, то $x=2\cdot 1-1=1$~~

$y^2-3y-2=0$:

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$

$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

y Если $y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, то $x = 2 \cdot \frac{3-\sqrt{17}}{2} \cancel{x} - 1 = 2 - \sqrt{17}$.

Если $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, то $x = 2 \cdot \frac{3+\sqrt{17}}{2} - 1 = 2 + \sqrt{17}$. Подставляя обе эти пары в первое уравнение, получаем, что они тоже подходят.

Ответ: $(x; y) = (-1; 0), (3; 4), \left(2-\sqrt{17}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right), \left(2+\sqrt{17}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7.

Обозначим углы $\angle ABC = \alpha$ и $\angle ADC = \beta$. Тогда, раз $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 180° - \angle ADC = 180° - \beta$, $\angle BCD = 180° - \angle ABC = 180° - \alpha$.

Рассмотрим $ABCF$: заметим, что он вписан в окружность ω_1, значит, сумма его противоположных углов равна $180°$. Отсюда $\angle AFC = 180° - \angle ABC = 180° - \alpha$. Аналогично $ADCE$ вписан в ω_2, отсюда $\angle AEC = 180° - \angle ADC = 180° - \beta$.

$\angle DFC = 180° - \angle AFC = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$, аналогично $\angle AEB = 180° - \angle AEC = 180° - (180° - \beta) = \beta$.

Рассмотрим ΔDFC: $\angle FDC = \beta$, $\angle DFC = \alpha \Rightarrow \angle DCF = 180° - \alpha - \beta$.

Аналогично в ΔABE $\angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, $\angle BAE = 180° - \alpha - \beta$.

~~$\angle FCE = \angle D$~~ $\angle ECF = \angle ECD - \angle FCD = \angle BCD - \angle DCF = (180° - \alpha) - (180° - \alpha - \beta) = \beta$; $\angle EAF = \angle BAF - \angle BAE = \angle BAD - \angle BAE = (180° - \beta) - (180° - \alpha - \beta) = \alpha$. Отсюда, раз $\angle ECF = \angle AEB = \beta$, $AE \parallel CF$, тогда $AECF$ – трапеция.

Пусть радиус окружности ω_1 – R_1, окружности ω_2 – R_2. Тогда по теореме синусов для ΔABC $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R_1$, для ΔACD $\frac{AC}{\sin\beta} = 2R_2$. Поделив ~~первое~~ второе выражение на первое, получим $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2R_2}{2R_1} = \frac{R_2}{R_1} = 2$; $\sin\alpha = 2\sin\beta$.

Поскольку $AECF$ – трапеция, $\angle AEF = \angle CFE$, т.к. FE – секущая для AE и CF. Тогда по теореме синусов для ΔAFE $\frac{FE}{\sin\alpha} = \frac{AF}{\sin\angle AEF}$, для ΔFCE $\frac{FE}{\sin\beta} = \frac{CE}{\sin\angle CFE}$. Поделив ~~первое~~ второе выражение на ~~второе~~ первое, получим $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CE \cdot \sin\angle AEF}{AF \cdot \sin\angle CFE}$, а поскольку $\angle AEF = \angle CFE$, то $\frac{CE}{AF} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2$; $\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ΔAFE: $\dfrac{FE}{\sin\alpha} = \dfrac{AF}{\sin\angle AEF}$

ΔFCE: $\dfrac{FE}{\sin\beta} = \dfrac{CE}{\sin\angle CFE}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{CE}{AF} = 2$

$CE = 2AF$

$\dfrac{AF}{CE} = \dfrac{1}{2}$.

$\angle AEF = \angle EFC$

$x^2+2x-3xy+2y^2-3y+1=0$.

$x^2+x(2-3y)+(2y^2-3y+1)=0$.

$\mathcal{D} = (2-3y)^2-4\cdot1\cdot(2y^2-3y+1) = 4-12y+9y^2-8y^2+12y-$

$-4 = y^2$

$x_{1,2} = \dfrac{3y-2\pm y}{2}$

$x = \dfrac{y^3-5y^2+3y-2}{2-y}$

1) $x = y-1$: $(y-1)^2-2y(y-1)+y^3-3y^2-1=0$

$y^2-\cancel{2y}+\cancel{1}-2y^2+\cancel{2y}+y^3-3y^2-\cancel{1}=0$.

$y^3-5y^2=0$; $y^2(y-5)=0$; $y=0;5$

$y=0$: $\cancel{x-0x^2}$ $2x+2=0$, $x=-1$ – для 1-го подходит

$y=5$: $\cancel{x^2}$ $2x-5x-5^3+5\cdot5^2-3\cdot5+2=0$;

$-3x-17=0$; $x=-\dfrac{17}{3}$.

$\left(-\dfrac{13}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{13}{3}\right)\cdot5+5^3-3\cdot5^2-1 = \dfrac{\cancel{289}\,169}{9}+\dfrac{\cancel{170}\,130}{3}+125-$

$-75-1 = \cancel{\dfrac{289+169+390}{3}+49} > 0 \Rightarrow 0$.

2) $x=2y-1$: $(2y-1)^2-2y(2y-1)+y^3-3y^2-1=0$;

$\cancel{4y^2}-4y+\cancel{1}-\cancel{4y^2}+2y+y^3-3y^2-\cancel{1}=0$.

$y^3-3y^2-2y=0$; $y(y^2-3y-2)=0$.

$y=0$: $x=-1$ – было

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{y^2-3y-2=0.\quad D=9+8=17}$

$\cancel{y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}}$

$x=2y-1:\quad (2-y)(2y-1)-y^3+5y^2-3y+2=0.$

$4y-2-2y^2+y-y^3+5y^3-3y+2=0.$

$4y^3-2y^2+2y=0.$

$y(2y^2-y+1)=0.$

$y_1.\ D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1=-7<0.$

1сл. $(2-y)(y-1)-y^3+5y^2-3y+2=0.$

$2y-2-y^2+y-y^3+5y^2-3y+2=0$

$-y^3+4y^2=0;\quad y^3\ \ y^2(y-4)=0$

$y=4:\quad x=\frac{4^3-5\cdot4^2+3\cdot4-2}{2-4}=\frac{64-80+12-2}{-2}=$

$=\frac{-6}{-2}=3.$

$3^2-2\cdot3\cdot4+4^3-3\cdot4^2-1=9-24+64-48-1=0.$

$(\cancel{0;}\ (-1;0),\ (3;4).$

$(2-\sqrt{17})^2-2\cdot(2-\sqrt{17})\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2-$

$-1=4-4\sqrt{17}+17-6+2\sqrt{17}+6\sqrt{17}-34+$

$+27$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

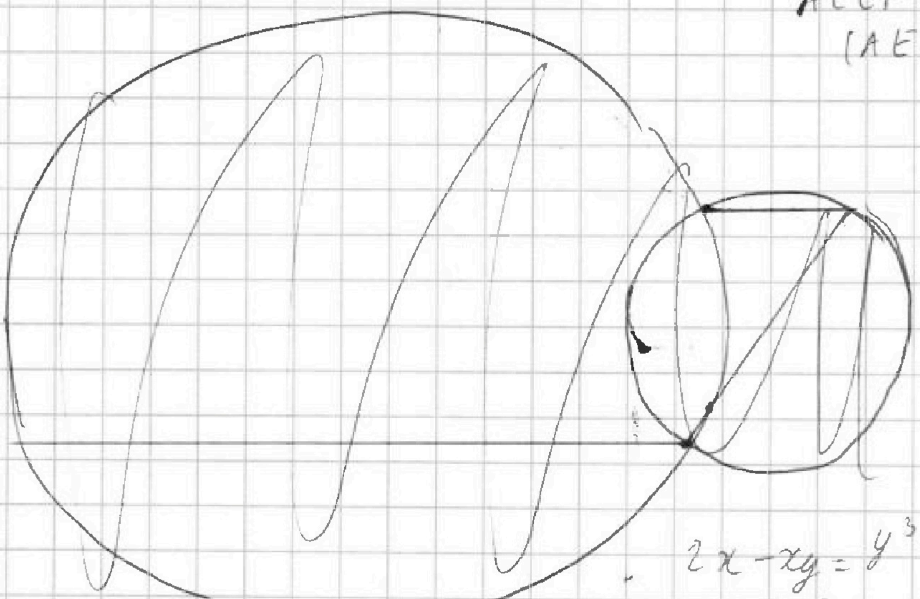
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~CE || AF, т.к. ∠AEB = ∠FCB. Тогда AD || BC =>~~

~~=>~~ AE || CF, т.к. ∠AEB = ∠FCE. ~~AF || CE =>~~

~~=> AFCE - парал-м Тогда $\frac{AF}{CE} = 1$.~~

AECF - трап. (AE || CF).



$2x - xy = y^3 - 5y^2 + 3y - 2$

$\cancel{-x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{y-2}}$

№6.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

$4x - 2xy - 2y^3 + 10y^2 - 6y + 4 = 0.$

$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0.$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 3xy + \frac{9}{4}x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}.$

$(x+1)^2 + (y - \frac{3}{2}x)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}(x^2+1)$

$x^2 - 4x + 3y^3 - 13y^2 + 6y - 5 = 0.$

$x^2 - 2xy + y^2 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = y^2 - 3y$

$-\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

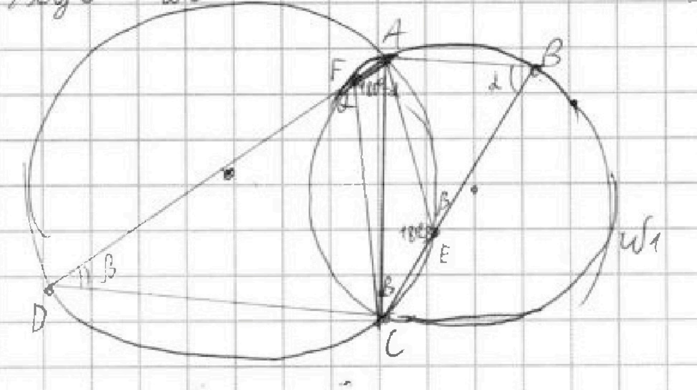
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~№ 6.~~ ~~x^2-2xy+~~ № 7. ω_2

$\frac{AF}{CE} = ?$

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$



$(180°-\alpha-\beta)-(180°-\alpha) = -\beta$

$(180°-\beta)-(180°-\alpha-\beta) = \alpha$.

$\frac{ABC}{\sin\alpha} = 2R_1$ $\quad \frac{AC}{\sin\beta} = 2R_2$

$AC = 2R_1\sin\alpha = 2R_2\sin\beta$

$R_1\sin\alpha = R_2\sin\beta$; $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}$;

~~$\sin\alpha = 2\sin\beta$~~

$\Delta BEA \sim \Delta FDC$ ~~$(k=2)$~~

$AB \parallel CD$

ω_1: ΔACF: $\frac{AC}{\sin(180°-\alpha)} = 2R_1$

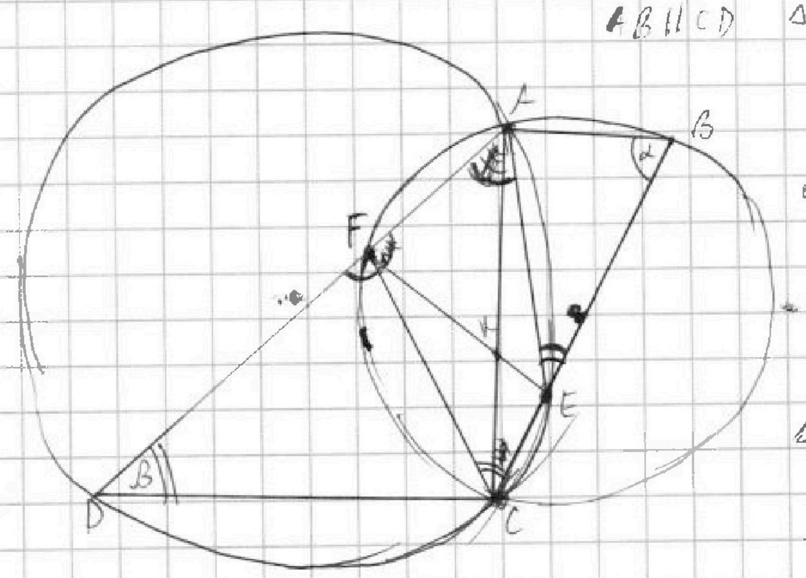
~~$\frac{AC}{}$~~ $\frac{AF}{\sin\angle ACF} = 2R_1$

ω_2: ΔAEC: $\frac{CE}{\sin\angle CAE} = 2R_2$

$\frac{AF\cdot\sin\angle CAE}{CE\cdot\sin\angle ACF} = \frac{1}{2}$.

ΔACF: $\frac{AC}{\sin\angle AFC} = \frac{AF}{\sin\angle ACF}$

~~$\sin\angle ACF = \frac{AC\cdot\sin\angle AFC}{AF}$~~



~~AC - секущая $AF \parallel CE$~~

$\angle FAC = \angle ACE$.

~~$AF \parallel CE$~~

~~$CE \parallel AF$?~~

~~ΔACF: $\frac{CF}{\sin\angle FAC} = 2R_1$~~ $\quad$ ~~$\frac{CF}{AE} = \frac{1}{2}$.~~

~~ΔCAE: $\frac{AE}{\sin\angle ACE} = 2R_2$~~ $\quad$ ~~$AE = 2CF$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

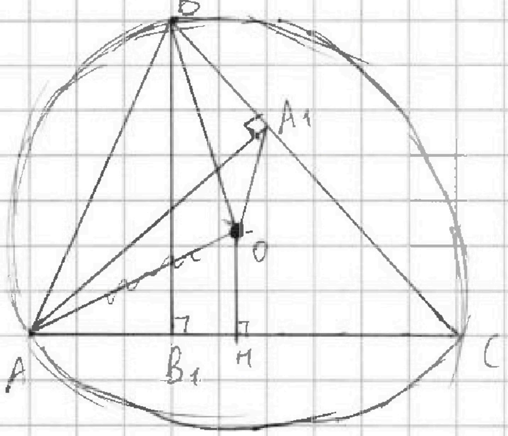
$3y^2 - x^2 + 2xy + 1 = 5y^2 - xy + 2x - 3y + 2.$

$2y^2 + x^2 - 3xy + 2x - 3y + 1 = 0.$

$4y^2 + 2x^2 - 6xy + 4x - 6y + 2 = 0.$

$\cancel{9y^2 - 6y + 1 \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0.}$

№5.



$OH - ?$

$S_{OBA_1} = 6.$

$AB_1 = 6.$

№1.

$|2x-2|^2 + |x^2+3x|^2 = |3x+1|^2$

$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$

$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + \cancel{9x^2} = \cancel{9x^2} + 6x + 1$

$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0.$

$1 + 6 + 4 - 14 + 3 = 0.$

$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \mid x - 1$

$- \; x^4 - x^3 \qquad \mid x^3 + 7x^2 + 11x - 3$

$7x^3 + 4x^2$

$- \; 7x^3 - 7x^2$

$11x^2 - 14x$

$- \; 11x^2 - 11x$

$- \; -3x + 3$

$-3x + 3$

0

$x^3 + 7x^2 + 11x - 3 = 0.$

$\cancel{1 + 7 + 11 - 3 =} \quad x = -3.$

$\cancel{27 +} \; -27 + 63 - 33 - 3 = 0.$

$\Rightarrow \; : (x+3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l|l} x^3+7x^2+11x-3 & x-3 \\ -\ x^3-3x^2 & \overline{x^2+10x} \\ \hline \quad 10x^2+11x & \\ -\ 10x^2-30x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+7x^2+11x-3 & x+3 \\ -\ x^3+3x^2 & \overline{x^2+4x-1} \\ \hline \quad 4x^2+11x & \\ -\ 4x^2+12x & \\ \hline \quad\quad -x-3 & \\ -\ \quad -x-3 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2+4x-1=0.$

$D=4^2-4\cdot1\cdot(-1)=20.$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{20}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm2\sqrt5}{2}=-2\pm\sqrt5.$

№6.

$x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0.$

$D=(-2y)^2-4(y^3-3y^2-1)=-4y^3+16y^2-4.$

№4.

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\le\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}-\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\geqslant0.$$

$$\frac{\sqrt{4x^2-x^2-3}-3-\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{x^2+x-2}}{(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})(\sqrt{4x-x^2-3}-3)}\geqslant0.$$

$\cancel{(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})(4}$

$a_1-b_1=a_2+b_2+1$ почему не противоречат?

$a_2-b_2=a_1+b_1+1$

$a_1-a_2=b_1+b_2+1$

$a_2-a_1=b_1+b_2+1$

↓

$\cancel{a_1=a_2;\ b_1=b_2.}$

$a-b$	$a+b+1$
$2^{2024}\cdot3$	$3^3\cdot5^{2024}$
$2^{2024}\cdot3\cdot5$	$3^3\cdot5^{2023}$
…	
$2^{2024}\cdot3\cdot5^{2024}$	3^3

$\Big\}$ 2025 вар.

аналогично если 2^{2024} содержит $a+b+1$

10125 вар. ← аналогично если $a-b$ содержит 0, 2, 3, 4 тройки $\Rightarrow 2025\cdot5=10125$ вар.

↓

$10125\cdot2=20250$ вар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3.

$a(a+1)$, $a \in N$ – хорошее число

$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$ кол-во таких пар – ?

$a^2 + a - b^2 - b = (a^2 - b^2) + (a-b) = (a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$.

$81 \cdot 10^{2024} = 2^{2024} \cdot 3^4 \cdot 5^{2024}$.

$a-b$ – ч. => a и b одной чётн. аналогично 2^{2024} в одном дел-е

$a-b$ – н. => $a+b$ – ч.

$a+b$ – ч., $a+b+1$ – н.

$$\begin{cases} a-b=k, \ k\text{ – дел-ь } 81 \cdot 10^{2024} \\ a+b+1 = \dfrac{81 \cdot 10^{2024}}{k} \end{cases}$$

$$2a + 1 = \frac{k^2 + 81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$2a = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$a = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

$$b = a - k = \cancel{\frac{2k - (k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024})}{2k} = \frac{-k^2 + 3k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}}$$

$$\frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024} - 2k^2}{2k} = \frac{-k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

№2.

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$\min(x^2 - y^2 + z^2)$ – ?

$\sqrt{32} + \sqrt{116} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$.

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29}$

$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$

$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{29} - z\sqrt{29}$;

$\sqrt{2}(2x + 3y - 4) = \sqrt{29}(2 - z)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{2(2x+3y-4)^2 = 29(2-z)^2}$

$2x+3y-4$ не может содержать $\sqrt{29}$.

$\sqrt{z}$ тоже, тогда $2x+3y-4=0$; $z=2$.

дост-о найти $\min\ x^2-y^2$.

$2x+3y-4=0$; $2x+3y=4$.

$2x = 4-3y \rightarrow 4-3y \,⋮\, 2$; $y \,⋮\, 2$.

$x = \frac{4-3y}{2} = 2 - y - \frac{y}{2}$.

$\frac{y}{2} = k$: $x = 2-2k-k = 2-3k$.

$y = 2k$.

$x^2-y^2 = (2-3k)^2-(2k)^2 = 4-12k+9k^2-4k^2 =$

$= 5k^2-12k+4$.

$5\cdot \overset{7,2}{1,2^2} - \overset{14,4}{12\cdot 1,2} + 4 = -3,2$.

$k_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2\cdot 5} = 1,2$.

$k=1$: $x^2-y^2 = 5-12+4 = -3$ (при $x=-1$, $y=2$)

$k=2$: $20-24+4=0$. ~~(при $x=-4$, $y=4$)~~

$x^2-y^2+z^2 = \overset{(-1)^2}{1} - \overset{2^2}{\cancel{4}} + 2^2 = 1$.

№6.

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0, \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y^3 = 3y^2-x^2+2xy+1 \\ y^3 = \cancel{-5y^2+xy-2x+3y-2} \\ \quad 5y^2-xy+2x-3y+2. \end{cases}$$